S. 1802. C. 28.

~~23. 6. 12.~~
4/2. 4. 11

S 1802 C.28.

NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOM. XIV.

pro Anno MDCCLIX

PARS PRIOR

CONTINENS CLASSEM MATHEMATICAM, PHYSICO-MATHEMATICAM ET PHYSICAM.



PETROPOLI

TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM

MDCCLXX.

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

SVMMARIVM
DISSERTATIONVM,
QVAS CONTINET
NOVORVM COMMENTARIORVM
TOMVS XIV.
PARS I.

PRAEFATIO.

Nouorum Commentariorum quartum decimum propter rerum varietatem atque multitudinem in duo volumina partiri placuit Academiae. Nam quum annus MDCCLXVIIII. maxime inclytus eſſet duobus coeleſtibus vno die phaenomenis, tranſitu Veneris per Solem et deliquio ſolari, Indulgentiſſimae Roſſiarum omnium *Dominae*, *Imperatrici* CATHARINAE II. viſum eſt, ad ſuſtinendos horum phaenomenorum cauſa ſusceptos labores atque peregrinationes erogare de fiſco ſuo ſumtus neceſſarios.

Primo quidem deſtinauerat Academia loca obſeruationibus coeleſtibus idonea quatuor, a ſeptemtrione *Kolam* in Laponia, et

 mona-

monaſterium Solowetzkoi in inſula maris albi, quibus ex locis mora Veneris in Sole cognoſceretur; a meridie autem Orenburgum et Guriew, oppida ad ripas Iaici fluminis ſita, vnde egreſſus Veneris ex Sole cerneretur; poſtea vero quam placuit AVGVSTAE numerum cum locorum tum obſeruatorum ampliari, quinque rubellorum millibus, quae antea largita fuerat, ſuperaddidit ſex millia altera, quo ſumtus ad duplicatum obſeruatorum numerum ſufficerent, et vt coëmerentur noua ad hanc operam neceſſaria inſtrumenta, quibus carere poterat Academia, ſi prior numerus conſtitiſſet.

Tanta AVGVSTAE munificentia excitata Academia obſeruationibus aſtronomicis aptiſſima iudicauit loca *Kolam*, *Vmbam* et *Ponoi*, tria in Laponia oppida, tria alia propter amnem Iaicum ſita, Orenburgum, Orsk et Guriew, denique Iacutum, in vltimis Sibiriae regionibus *Lenae* flumini adiacens oppidum. Agitauerat etiam animo ablegare quempiam Aſtronomiae peritum Kildunam, inſulam oceani ſeptemtrionalis, cultoribus vacuam, frigidiſſimam illam et a cultioribus locis longiſſime remotam; ſed verita, ne tantis malis ſuſtinendis non ſufficeret obſeruator, a propoſito deterrita eſt.

Hiſce

Hiſce expeditionibus praefecti fuere duo Academici, *Rumowskoi* et *Lowitz*, Adiunctus *Krafft*, Aſtronomi Geneuenſes *Mallet* atque *Pictet*, centurio *Isleniew* et ſubcenturio *Euler*. Quam quisque obſeruandis coeleſtibus phaenomenis ſortitus fuerit ſtationem, indicatur in ipſo Commentario.

Sub idem fere tempus placuit AVGVSTAE alias inſuper adornari expeditiones *Hiſtoriae naturalis*, ſuperiori quidem tempore feliciter incoatas a *Meſſerſchmidio*, *Gmelino*, *Stellero* et *Kraſcheninnikovio*, ſed poſtea neglectas. Quibus expeditionibus qui praeficerentur electi ſunt ex Academicis *Gmelin* et *Pallas*, ex Adiunctis *Lepechin* et *Güldenſtaedt*, et ſecundum hos Director horti pharmaceutici *Falck*, non ille quidem Academiae Ordinarius, ſed huius expeditionis cauſa ab Academia ad tempus conſtitutus.

Quamuis ad ſuſtinendas expeditionis aſtronomicae impenſas iam vndecim millia rubellorum gratificata fuerat AVGVSTA, tamen, ne quid deeſſet expeditioni rerum naturalium cauſa inſtitutae, ad priorem ſummam decem millia rubellorum adiici iuſſit *Clementiſſima Imperatrix*, omnibusque cum praefectis tum adminiſtris harum expeditio-

num

num praeberi ſtipendium duplex, et mercedem veredariis debitam diſſolui ex aerario; atque ne quid morae intercederet, prouinciarum Praeſidibus miſſa ſunt edicta, Imperatoria manu ſignata, quibus iuſſi erant Acamicos humaniter excipere, atque iis de omnibus, quae ad expeditionem pertinerent, benigne gratificari. Denique ſingulis expeditionum praefectis data ſunt ab Ampliſſimo Ordine diplomata, Praeſidibus prouinciarum et procuratoribus (воеводамъ) exhibenda.

Prius quam itinera ſua ingrederentur Academici, Excellentiſſimi Academiae Directoris WLADIMIRI COMITIS ORLOVII opera, in conſpectum et venerationem *Sereniſſimae* PRINCIPIS, Eiusque Filii, *Imperii Heredis* et *Magni Ducis*, PAVLI PETROWITSCH admiſſi ſunt.

MATHE-

MATHEMATICA.

I.

Diſquiſitiones Analyticae de nouo Problemate coniecturali

Auctore Daniele Bernoulli. pag. 3.

Quod in nouorum Commentariorum volumine XII, Illuſtr. Auctor huius diſſertationis, attulerat inſigne exemplum, quaeſtionis ad doctrinam probabilitatum pertinentis, ope ſolius calculi infiniteſimalis ſolutae, id hac diſſertatione vberius exponere et explicare conſtituit. Quaeſtio autem, quam heic ſibi pertractandam propoſuit ſequens eſt: Si ex duabus, tribus vel pluribus vrnis, in quibus ſchedulae certo et aequali numero repoſitae ita ſunt, vt vnius cuiusuis vrnae ſchedulae ab illis reliquarum vrna-

 rum

rum peculiari diſtinguantur colore; vnaquauis permutatione, vna extrahatur ſchedula et in vrnam ordine ſequentem transponatur, ſic vt, quae ex vltima vrna extracta ſit, in primam reponatur; dato permutationum ſecundam hanc legem factarum numero, determinare numerum ſchedularum cuiusvis coloris, probabiliter in quauis vrna contentarum? Vt iam vera, quibus ſolutio huiusquaeſtionis innititur principia tanto euidentius explicare liceret, caſum primo ſimpliciſſimum, quamuis in ſe ſatis obuium, Illuſtr. Auctori adferre placuit, eum ſcilicet, quo duae tantum eiusmodi proponuntur vrnae, pro quo quidem caſu poſtquam ex principiis doctrinae combinationum expreſſionem deduxit generalem numeri ſchedularum pro quouis permutationum numero, oſtendit quem valorem, haec induat expreſſio, ſi non ſolum numerus factarum permutationum ponatur infinite magnus; ſed etiam numerus ſchedularum permagnus fuerit et ſic quidem pro infinito haberi poſſit. Hac facta ſuppoſitione valorem eiusdem expreſſionis calculo infiniteſimali in ſubſidium vocato eruit, quo eundem plane obtinuit, quem antea ex regulis doctrinae combinationum deduxerat. Hac vero quoque conſtituta hypotheſi, alia problemata, quae proprie ad doctrinam permutationum non pertinent, facilem admittunt ſolutionem, quemadmodum ſi duo ſupponantur vaſa duobus canaliculis inter ſe communicantia, et duobus fluidis diuerſis impleta, quorum

quorum perpetua fiat transuaſatio ex vno vaſe in alterum, et quaeratur quaenam certo tempore elapſo ſit lex permixtionis.

Deinde explicationem caſus aliquanto difficilioris, quo tres proponuntur vrnae adgreſſus eſt Illuſtr: Auctor, oſtendit autem huius quaeſtionis ſolutionem eo reduci, vt inueſtigetur lex permutationum pro ſchedulis, quae ſolae ab initio in prima vrna repoſitae erant; inde enim reliquarum permutationes facili negotio deduci poſſunt. Ex praeceptis igitur doctrinae combinationum, inuentis expreſſionibus numerum ſchedularum albarum, in quauis vrna contentarum explicantibus, inſigni artificio analytico adhibito, explicauit quomodo his expreſſionibus alia forma induci queat, vt terminos contineant numero finitos, eosque omnes reales. Tum vero eandem hanc ſolutionem, vt pro caſu priori fecerat, etiam ex principiis calculi infiniteſimalis deduxit, quo ipſo vtriusque conſenſus egregie illuſtratur. Denique conſiderationes quasdam ſingulares ſuperaddidit, ad illuſtrandam legem, quam hae permutationus ſequuntur, vbi quidem obſeruauit non ſolum totum ſyſtema ad ſtatum permanentem vergere, quo omnes ſchedulae in ſingulis vrnis aequaliter inter ſe ſunt permixtae ſed etiam infinitas fieri, vltra citraque hunc ſtatum permanentem tranſitiones, antequam ad eum perueniatur.

II.

II.

Menſura ſortis ad fortuitam ſucceſſionem rerum naturaliter contingentium applicata.

Auct. Daniele Bernoulli. pag. 26.

Inter ſingulares naturae leges, quas tabulae anthropologicae offerunt, praecipue attentionem meretur illa, quae proportionem concernit, qua nati in vtrumque diuiduntur ſexum, et quemadmodum in genere quidem conſtet prolem maſculam praeualere, ita difficulter determinari poteſt, vtrum hoc merae ſorti adſcribendum ſit, an vero natura ad procreationem prolis maſculae aliquanto procliuior ſit quam ad eam ſexus foeminini? Hanc autem quaeſtionem optime dirimi poſſe exiſtimat Illuſtr: huius diſſertationis Auctor, ſi inquiratur in leges probabilitatis, quae pro vtraque hypotheſi locum inuenturae ſint, atque hac quidem occaſione eas, quae pro prima hypotheſi, qua natura ad vtriusque ſexus procreationem aeque procliuis aſſumitur, locum obtinent, exponere conſtituit.

Tradita igitur primum formula generali, qua probabilitas pro quocunque puerorum numero dato exprimitur, oſtendit maximam probabilitatem adeſſe, dum infantum vtriusque ſexus idem eſt numerus, ipſam

ipſam vero a medio recedendo decreſcere et pro aequalibus a medio diſtantiis eandem eſſe; deinde quo maior ſit numerus partuum, tanto difficilius contingere vt in vtrumque ſexum aequaliter diſtribuatur, eo tamen non obſtante inaequalitatem per numerum partuum diuiſam ſemper decreſcere. Inſignis autem et maxime memoratu digna eſt lex, quam natura pro decremento probabilitatis, ex incremento partuum oriundo, ſequitur, et quae hoc continetur theoremate, quod probabilitas quam proxime ſit in ratione inuerſa ſubduplicata prolis genitae. Vt vero pro dato quouis partuum numero haec probabilitas facillime determinetur, inuenit Illuſtr. Auctor hoc inſtitutum optime proſequi, ſi ex probabilitate, quae pro ipſo medio obtinet, reliquae verſus extremitates definiantur, in quo negotio id ſingulare occurit phaenomenon vt in mediocri a medio diſtantia omnis probabilitas tantum non euaneſcat. Formula denique traditur ſimplex qua pro quouis caſu probabilitas ſatis exacte exprimi poteſt, vbi ſenſibiles aberrationes metuendae non ſunt, niſi dum probabilitates abſolutae fere iam euaneſcunt.

III.

Conſiderationes de Traiectoriis orthogonalibus.

Auct. L. Eulero. pag. 46.

Quemadmodum natura linearum curuarum per aequationem coordinatas ipſarum orthogonales et quantitates conſtantes inuoluentem exprimitur, ita ſi quaedam harum conſtantium variabilis aſſumitur, infinitas inde lineas curuas communi lege contentas prodire euidens eſt, curuae autem illas normaliter traiicientes, ipſarum traiectoriae orthogonales dicuntur. Solutio igitur problematis de curuis hiſce traiectoriis eo redit vt ex aequatione, qua relatio differentialium parametri et coordinatarum pro curvis ſecandis exprimitur, inueſtigetur alia aequatio differentialis relationem coordinatarum pro curuis ſecantibus exprimens, quae aequatio ad integrabilitatem perduci debet. Quum vero id in genere nequidem aggredi liceat omnino e re eſt, iſtos noſſe caſus, quibus id perfici poteſt, et qui imprimis ad hos ſequentes redeunt. Primo ſi parameter p fuerit functio ipſarum coordinatarum x et y aequatio differentialis pro traiectoriis duas tantum variabiles x et y continebit adeoque eius integratio pro conceſſa haberi poteſt. Secundo ſi y fuerit functio ipſa-

rum

rum x et p problematis ſolutio redit ad integrationem aequationis differentialis ſolas p et x inuoluentis, vnde ſaltem per conſtructionem x ex p adeoque et y inueniri poteſt. Tertio ſi x fuerit functio ipſarum p et y, vbi omnis difficultas conſiſtet in integratione aequationis differentialis ſolas y et p involuentis. Haec autem tantum valere cenſenda ſunt ſi iſtae expreſſiones pro p, x et y fuerint explicitae ſin vero formulas continerent integrales, tum integratio aequationis differentialis ad quam peruenitur non amplius pro conceſſa ſpectari poteſt. Interim tamen ſingulari artificio excogitati eſt ſolutio, iſtius caſus quo y per hanc formulam ſummatoriam $\int V dx$ exprimitur, vbi V eſt functio quaecunque ipſarum p et x.

In praeſenti autem diſſertatione Illuſtr. Auctor potiſſimum conſideratione dignam iudicauit, inſignem harum curuarum proprietatem, qua inter ſe reciprocantur. Quum enim vtriusque ſyſtematis natura exprimatur certa relatione inter coordinatas x et y et parametros, ſi pro poſteriori ſyſtemate parameter dicatur q, inde liquet non ſolum p et q per ſolas x et y, ſed etiam viciſſim x et y per ſolas p et q determinari poſſe. Inſignis autem proprietas, qua relatio harum quatuor quantitatum definitur, ſequenti aequatione exprimitur

$$\left(\frac{dx}{dp}\right)\left(\frac{dx}{dq}\right)+\left(\frac{dy}{dp}\right)\left(\frac{dy}{dq}\right)=0$$

Hac vero aequatione in ſubſidium vocata, x et y per functiones ipſarum p et q exprimere licet, et expreſſiones quidem pro x et y inde oriundae ita comparatae ſunt, vt ſi bina linearum ſe mutuo orthogonaliter ſecantium ſyſtemata inventa ſunt, inde infinita alia talium ſyſtematum paria deduci queant. Inſigne autem hoc artificium, viam quoque ſternit, ad ſolutionem iſtius problematis, quo ea quaeruntur linearum algebraicarum ſyſtemata, quarum traiectoriae itidem ſint lineae algebraicae. Cognitis ſcilicet ſimplicioribus quibusdam eiusmodi ſyſtematum caſibus, inde infinitos alios facillimo negotio deriuare licet. Similiter vero et hinc ſolutiones aliorum non minus elegantium problematum erui poterunt, quorum praeprimis haec attentionem merentur, primum quo bina eiusmodi linearum orthogonalium quaeruntur ſyſtemata, quae eadem aequatione continentur, eo tantum cum diſcrimine, quod dum pro priori valor parametri ſit poſitiuus, pro poſteriori negatiuus aſſumatur, et alterum quo eiusmodi quaeruntur curuae ſecandae, vt curuae ſecantes, eo tantum ab ipſis diſcrepent, quod coordinatae x et y inter ſe permutentur.

IV.

IV.

De formulis integralibus duplicatis.

Auctore L. Eulero pag. 72.

Disquiſitio de corporum ſoliditatibus et ſuperficiebus, quum ad eiusmodi formulas integrales deducatur, quae ex producto differentialium duarum variabilium x et y, et functione quadam harum quantitatum componantur, adeoque duplicem integrationem requirunt, antequam valor ipſis competens determinari poſſit; res omnino fuit maximi momenti in naturam et proprietates harum formularum accuratius inquirere. De formulis autem eiusmodi integralibus, quas duplicatas appellare Illuſtr. Auctori viſum eſt, tenendum eſt, quod ſi binae variabiles x et y plane a ſe inuicem non pendeant, duplicem earum integrationem ita inſtituendam eſſe, vt in vna earum ſola x variabilis, in altera vero ſola y ponatur, tum vero loco conſtantium quantitatum duas quaslibet functiones ſingularum x et y adiici oportere, vt integrale completum inueniatur, et perinde omnino eſſe quo ordine eiusmodi inſtituatur integratio, quum ſemper idem prodire debeat integrale. Hae autem formulae plane diuerſae ſunt ab iis, quibus ſoliditas vel ſuperficies corporum exprimitur, in his enim poſterioribus omnino aliqua relatio inter x et y intercedit, vnde

earum integratio ita inſtituenda erit, vt poſtquam in priori altera variabilium vt x pro conſtante aſſumta ſit, hac integratione peracta, ea per omnes valores ipſius y extendi debeat, et loco y extremus valor, quem recipit, ſubſtituendus erit, vnde fit vt in poſteriori integratione y non amplius ab x ſit independens, ſed plerumque aliqua functione ipſius x exprimatur, adeo vt poſteriorem integranem vnica variabilis x ingrediatur. Ad determinationem vero integrationum inueſtigandam, functionem qua productum $dx\,dy$ multiplicatum eſt, vnitati aequalem ſupponere licet, liquet enim aream baſis hac formula $\int\int dx\,dy$ exprimi, ex cuius formulae igitur integratione, etiam iſtae conditiones quae pro hac altera $\int\int Z\,dx\,dy$ valent praeſcribi poſſunt. Inſignes autem et plane ſingulares ſunt affectiones harum formularum duplicatarum, in earum transformatione conſpicuae, ſcilicet quemadmodum variabiles x et y, in alias t et v certa ratione ab ipſis dependentes, transformari poſſunt ita etiam, pro x et y his earum valoribus inuentis, ſubſtitutis nouae oriuntur formulae duplicatae alias variabiles inuoluentes. Iam cum quam maxime probabile videri poſſet nouas has formulas integrales non ſolum in ſe complectere tales quas productum $dt\,dv$ ingreditur, ſed praeter has quoque alias quae ex dv^2 et dt^2 conſtant, facile tamen perſpicitur hoc fieri non poſſe, quia poſteriores hae formulae dv^2 et dt^2 in ſe complectentes, ex numero

mero formularum duplicatarum excludantur. Hoc autem dubium facile diluetur ſi conſideretur non plane neceſſarium eſſe, vt noua formula integralis duplicata priori prorſus ſit aequalis, quoniam in hac poſteriore aliae plane, ſunt conditiones ſub quibus integratio peragenda eſt, ac in priori. Potiſſimum igitur fundamentum cui haec transformatio innititur ex eo peti debet, quod prima integratio formae integralis per transformationem ortae ita inſtitui debeat, vt vel *u* vel *t* pro conſtanti habeatur. Inſignem autem hae transformationes ſaepius habent vſum ad ſolutiones faciliores reddendas, quod imprimis exemplo famoſi iſtius problematis Florentini illuſtratur, cuius plurimas ſolutiones elegantes Illuſtr Auctor hac occaſione adduxit, quarum quae §. 44. occurrit generaliſſima eſt. Caeterum quoque notari meretur huic diſſertationi occaſionem dediſſe elegans problema, de inuenienda figura corporis, quod inter omnia eiusdem ſoliditatis, minima ſuperficie contineretur, cuius tamen problematis ſolutio quomodo inueniri queat, nondum patet.

V.

Euolutio inſignis paradoxi circa aequalitatem ſuperficierum.

Auctore L. Eulero, p. 104.

Quemadmodum in doctrina linearum curuarum, haec ſemper locum obtineat proprietas, vt pro-

propoſita quacunque linea curua, nulla alia aſſignari poſſit, priori ita longitudine aequalis, vt arcus omnibus abſciſſis reſpondentes ſint aequales, ita contrarium plane in doctrina ſolidorum locum habere inuenitur, ſcilicet propoſita ſuperficie quadam, innumerabiles ſemper inueniri poſſunt ſuperficies diuerſae quarum portiones, ſpatio cuique plani cuiusdam fixi imminentes prorſus inter ſe ſunt aequales. Vt autem ratio diſcriminis, quod hoc reſpectu inter doctrinam linearum et ſuperficierum intercedit, melius intelligatur, perpendendum eſt punctum quodlibet ſuperficiei alicuius determinari per aequationem, inter tres coordinatas orthogonales, quarum binae in plano quodam fixo ducuntur, tertia vero diſtantiam huius puncti a plano fixo exprimit. Si igitur priores dicantur x, y et tertia z, inde differentiale ipſius z huiusmodi nanciſcetur formam $dz = pdx + qdy$, elementum autem quoduis ſuperficiei ſic exprimetur $dxdy \sqrt{(1+pp+qq)}$. Propoſita iam alia ſuperficie quae quum priori congruere debet, intelligitur poſito $dz = rdx + sdy$ eſſe elementum ſuperficiei pro eadem $dxdy \sqrt{(1+rr+ss)}$, vnde oportet eſſe $pp+qq = rr+ss$. Quodſi autem quis dubitauerit, vtrum haec aequalitas alia ratione locum inueniat, quam ea qua $p = r$, et $q = s$, ponat ſolum $p = v$ ſin. θ, $q = v$ coſ. θ et $r = v$ ſin. Φ, $s = v$ coſ. Φ et mox inueniet praefatam aequalitatem adhuc locum obtinere. Maxime igitur curioſum hinc naſcitur problema: quomodo propoſita quacunque ſuper-

ſuperficie, aliae vel omnes ipſi congruentes inueniri poſſunt, quod quum latiſſimo ſenſu ſolutionem non admittat, caſus praecipuos ſolutionem admittentes euoluere Illuſtr. Auctori viſum eſt In problemate igitur primo, poſtquam generaliter in naturam earum ſuperficierum inquiſiuit quae cum ſuperficie plana ad datum planum fixum vtcunque inclinata congruunt, oſtendit non ſolum omnes alias ſuperficies planas ad baſin aeque inclinatas cum primum propoſita congruere, ſed ſuperficies quoque conicas, quarum axes baſi perpendiculariter inſiſtunt, tum vero generalem et elegantiſſimam adfert conſtructionem pro ſuperficiebus cum plano congruentibus, ſcilicet ſi in plano pro baſi aſſumto, linea curua ad lubitum deſcribatur, et a ſingulis eius punctis ducantur rectae ad curuam normales, ad baſin autem inclinatae, ſub eodem angulo, quo ſuperficies plana propoſita inclinatur, omnes hae rectae totae, ſitae erunt in ſuperficie congruente. In reliquis inſequentibus Problematibus caſus aliquanto difficiliores conſiderantur, vbi quidem partim inſignes iſtae ſubſtitutiones, quibus Illuſtr. Auctor vſus eſt ad ſolutiones inueniendas, partim etiam elegantes conſtructiones, quae inde deriuatae ſunt, ſingularem analyſtarum merentur attentionem. In Problemate demum quinto, eae quaeruntur ſuperficies, quae cum ſphaerica congruunt, etſi autem ſolutionem difficillimi huius problematis Illuſtr. Auctori eruere licuerit; ex ea tamen vix aliqua ſuperficies ſimplior ſphaericae

 con-

congruens determinari poteſt. De ſolutione autem huius problematis in genere monendum eſt, eam non ſolum admittere eiusmodi ſuperficies, quarum natura exprimitur per aequationes, quae quantitates continuitatis vinculo inter ſe iunctas comprehendunt, ſed etiam tales vbi nulla continuitatis lex locum habere animaduertitur, ſic pro ſolutione quidem problematis primi, ſuperficies pyramidales aeque ſatisfacere deprehenduntur ac ſuperficies conicae.

VI.

De ſummis Serierum numeros Bernoullianos inuoluentium.

Auctore L. Eulero. pag. 129.

Numeri *Bernoulliani*, qui ita ab inuentore *Iacobo Bernoullio* magni nominis Mathematico vocantur, eo magis notatu digni ſunt, quod non ſolum ipſe iisdem ſit vſus ad inueniendas ſummas progreſſionum ex poteſtatibus numerorum naturalium ſed etiam quod hi numeri poſtmodum ab Illuſtr. huius diſſertationis Auctore ad ſummandas ſeries poteſtatum reciprocarum adhibiti fuerint In hac autem diſſertatione, Illuſtr. Auctori propoſitum fuit, in eiusmodi ſerierum ſummas inquirere, quorum termini numeros *Bernoullianos*, praeterea vero quoque alios factores ſecundum legem quandam cognitam

tam progredientes, inuoluunt. Propoſita igitur primum ſimpliciſſima huius generis ſerie, oſtendit quomodo per certas transformationes ope integrationis vel differentiationis inſtituendas, innumerabiles aliae inde deduci poſſint, quarum ſummas itidem aſſignare licet. Dein vero alium fontem, ex quo iſtiusmodi ſeries promanant in conſiderationem ducit, ſcilicet formulam hanc generalem:

$$2S = 2\int X dx + X + \frac{\mathfrak{A}\, dX}{1.2.3.dx} - \frac{\mathfrak{B}\, d^3X}{1.2 \ldots 5 dx^3} + \frac{\mathfrak{C}\, d^5X}{1.2 \ldots 7\, dx^5} - \text{etc.}$$

in qua X terminum deſignat generalem ſeriei cuiuscunque pro indice x, S vero terminum ſummatorium et $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ numeros *Bernoullianos*. Si enim in hac ſerie introducantur numeri A, B, C, D quorum relatio ad priores $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ ab initio diſſertationis expoſita fuit, hinc huiusmodi naſcetur expreſſio

$$\frac{A\,dX}{2\,dx} - \frac{B\,d^3X}{2^3\,dx^3} + \frac{C\,d^5X}{2^5\,dx^5} - \frac{D\,d^7X}{2^7\,dx^7} + \text{etc.} = S - \int X dx - \tfrac{1}{2}X$$

quae indicat ſummam iſtius ſeriei litteras A, B, C inuoluentis ſemper in poteſtate eſſe, quoties ſumma progreſſionis, cuius X eſt terminus generalis aſſignari poſſit. Ad vlteriorem autem huius veritatis explicationem, Illuſtr: Auctor, eas conſiderauit ſeries in quibus $X = \frac{1}{x^n}$, potioresque earum caſus ſeorſim euoluit, eos ſcilicet quibus n ſignificat vel 2 vel 4 vel numerum quemcunque, vel etiam vnitatem. Pro ſingulis autem docetur quomodo earundem ſerierum ſummae ope methodi primum pro-

poſitae inueſtigari debeant, vt eo ipſo non ſolum vtriusque methodi conſenſus exponatur, ſed etiam appareat, quibus in caſibus vna alteri ſit praeferenda.

VII.

De Partitione Numerorum in partes tam numero, quam ſpecie datas.

Auctore L. Eulero, p. 168.

Methodus, qua Illuſtr. huius diſſertationis Auctor, problema de partitione numerorum olim tractauit, quum ita ſit comparata, vt etiam ad alia problemata ſoluenda adhiberi poſſit, hac occaſione eam ad ſolutionem vulgatiſſimi problematis, quo quaeritur quot modis datus numerus, dato teſſerarum numero proiici poſſit, applicare conſtituit. Haec autem quaeſtio generaliter concepta eo redit, vt inueſtigandum ſit, quot modis datus numerus, in datum partium numerum diſpertiri queat, quarum ſingulae ſpecie dentur, data quoque multitudine omnium harum partium. Si nimirum concipiantur eiusmodi teſſerae quae non ſex vt vulgo habent hedras, ſed in quibus hedrarum numerus ad m numerum vtcunque magnum aſcendat, tum vero faciebus harum hedrarum inſcripti ſint numeri α, β, γ, δ, quaeſtio in eo verſatur, vt determinetur quot modis, proiiciendo n eiusmodi teſſeras, numerus

rus N-produci poſſit. Vt vero ad huius problematis tractationem eo facilior aditus pateret, Illuſtr: Auctor caſum primo vulgarem, quo teſſerae numeris naturalibus ab 1 vsque ad 6 notantur conſiderauit, circa quam oſtendit, ſi huiusmodi expreſſionis $(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^n$ fiat euolutio, tum quamuis poteſtatem x^N in ea toties occurrere, quot modis proiiciendo n teſſeras, numerus N cadere poſſit. Deinde quomodo haec euolutio aptiſſime ſit inſtituenda docet, et quaenam inde oriatur determinatio coefficientium, quae ita comparata eſt, vt ſemper quilibet coefficiens per tres praecedentes exprimatur, vbi id tamen notatu dignum euenit, vt licet hi coefficientes tandem in nihilum abeant, et poſtremi primis ſint pares, id tamen ex ipſa earundem relatione inuenta nequaquam perſpicere liceat.

Porro faciliorem exponit modum, quo hi coefficientes inueſtigari poſſunt, pro quouis teſſerarum numero, ſi iidem pro numero vnitate minore iam fuerint inuenti, vbi etiam Tabulam ſubiungit oſtendentem, quot modis omnes numeri ab 1 ad 36 teſſeris vulgaribus quarum numerus vsque ad 8 aſcendit cadere poſſit. At vero quum euolutio formulae primum propoſitae, alia ratione inſtitui poſſit, vt quilibet coefficiens abſolute aſſignetur neque praecedentibus ad hoc opus ſit, iſthaec euolutio, tanto magis expoſitionem meruit, quo facilius eadem ad ipſum problema generale applicari queat. Neque

 maiorem

maiorem quidem moleſtiam, hac euolutione adhibita, faceſſit problema adhuc generalius propoſitum, quo ſingulae teſſerae inaequali hedrarum numero praeditae ſupponuntur. Si enim ex: cauſſa proponantur tres teſſerae, quarum prima hexaedra, ſecunda octaedra, tertia vero dodecaedra eſt, quarum faciebus numeri naturales ab vnitate incipiendo inſcripti ſint, atque quaeratur quot modis tribus his teſſeris numerus N cadere poſſit; reſolutio eius quaeſtionis pendebit ab euolutione huius producti
$(x+x^2+..x^6)(x+x^2+x^3..\;x^8)(x+x^2+x^3...+x^{12})$
coefficiens nimirum poteſtatis x^N, oſtendet caſuum numerum. Denique mentio inſtituitur quorundam elegantium Theorematum Fermatii, quorum demonſtrationes, ope huius methodi, aptiſſime inveſtigari poſſe videntur, licet nondum conſtet quomodo id perficere liceat. Horum prius eſt quod omnes numeri in tres numeros trigonales reſolubiles ſint, poſterius vero quod omnes numeri ex additione quaternorum quadratorum oriantur, quibus etiam hoc adiici poteſt quod omnis numerus ſit aggregatum m numerorum polygonalium, laterum numero exiſtente $=m$ vel pauciorum.

VIII.

VIII.

De inuentione quotcunque mediarum Proportionalium citra radicum extractionem.

Auctore L. Eulero. Pag. 188.

In hac diſſertatione Illuſt. Auctor, methodum exponit facilem et elegantiſſimam, medias quotcunque proportionales ope approximationis, quantumuis accurate inueniendi. Fundamentum autem cui haec ſuperſtruitur methodus in eo ſitum eſt, quod ſi numeri quicunque continue proportionales proponantur, eorum quoque differentiae in continua proportione geometrica eiusdem exponentis ſint, ſin vero ſeries numerorum propoſitorum a proportione geometrica aliquantum aberret, multo maiorem fore differentiarum aberrationem, ex quo viciſſim colligitur ſi proponatur ſeries numerorum a proportione geometrica aliquantum aberrantium, ſummas horum numerorum ad proportionem geometricam propius accedere. Propoſitis igitur duobus numeris A et rA inter quos media proportionalis quaerenda eſt, ita procedere licet, vt aſſumtis pro lubitu binis numeris a et b inde formentur hi tres

$a+b$; $ar+b$, et $ar+br$, quorum bini priores ſi compendii cauſſa vocentur a', b', inde iterum

hos

hos numeros elicere licet $a' + b'$, $a'r + b'$, nec non vlterius progrediendo hos

$a'' + b''$, $a''r + b''$ ex quo intelligitur eiusmodi fractiones $\frac{l''}{a''}$, $\frac{b'''}{a'''}$ eo propius ad valorem mediae proportionalis accedere, quo longius haec operatio continuata fuerit. Simili ratione duae mediae proportionales inueniuntur, aſſumendo primum pro lubitu tres numeros a, b, c, ex iisdem vero continuo formando alios hac lege vt ſit $a' = a + b + c$: $b' = b + c + ar$; $c'' = c + ar + br$; quo enim vlterius haec operatio continuetur eo propius eiusmodi numeri

$a^{(n)}$, $b^{(n)}$, $c^{(n)}$, $ra^{(n)}$ quatuor numeros in proportione geometrica progredientes exhibebunt. Sic quidem ſi inter duos numeros rationem duplam tenentes, quaerantur bini medii proportionales, ponendo $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, poſt ſeptimam operationem inuenietur $a^{(7)} = 10080$ $b^{(7)} = 12700$ $c^{(7)} = 16001$, vnde hae rationes $\frac{12700}{10080}$ et $\frac{16001}{12700}$ valorem mediorum proportionalium ſatis exacte exhibebunt, erroribus infra decies milleſimam partem vnitatis ſubſiſtentibus. Conſimili autem operatione vti licet ad tres vel quatuor medias proportionales inueſtigandas, quin etiam in genere huius methodi ope, inter duos numeros datam tenentes rationem, quotcunque medii proportionales expedite inueniri poſſint. Series autem numerorum

a, a', a'' etc. b, b', b'' etc. c, c', c'; $d, d' d''$ etc.

ſingula-

ſingularem merentur attentionem, quum earum terminos generales ſemper concinne exprimere liceat, et ita quidem vt mutua relatio, quae has ſeries intercedit inde facillime perſpiciatur.

IX. et X.

De integratione Aequationis differentialis

$$a^n d^n y + b a^{n-1} d^{n-1} y dx + c a^{n-2} d^{n-2} y dx^2 + \ldots + r y dx^n = X dx^n.$$

et

Methodus integrandi, nonnullis aequationum differentialium exemplis illuſtrata.

Auctore A. I. Lexell. p. 215 et 238.

Aequatio differentialis, cuius integrandi Methodus in priori harum diſſertationum proponitur, eo magis attentione digna videtur, quod inter pauciſſimas earum ſit, quae ſub forma generali propoſitae completam admittant integrationem. Poſtquam vero haec eadem aequatio differentialis a ſummis noſtri aeui Geometris, Illuſtr. *Eulero* et *d'Alembertio*, iam dudum ſit tractata, ſuperfluum quidem videri poſſet, quicquid ad eam illuſtrandam adiiceretur; quum tamen methodus in hac diſſertatione expoſita, in quibusdam ab antea allatis differat, et

ſemper conducat eandem veritatem pluribus modis el cuiſſe, non prorſus inutilem exiſtimauit Cl. Auctcr huius diſſertationis operam, quam huic materiei explicandae impenderat. Quum igitur haec aequatio differentialis, ſit generalis gradus nimirum n, vbi n numerum quemcunque integrum denotat, primum disquirendum fuit, qualis ſit forma aequationis differentialis, gradus proxime inferioris $n-1$, ex propoſita per integrationem eliciendae, ſcilicet inuentum eſt eius formam plane ſimilem fore propoſitae, atque ita repraeſentari poſſe:

$$a^n d^{n-1}y + \alpha a^{n-1} d^{n-2}y dx + \beta a^{n-2} d^{n-3}y dx^2 + . + \lambda a y dx^{n-1} = z dx^{n-1}$$

vbi $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ denotant coefficientes ex quantitatibus conſtantibus conflatas z vero functionem ipſius x, vnde totum integrationis negotium reducitur ad inueniendos valores α, β, λ et functionis z Heic vero ſingularis haec ſe prodit circumſtantia, quod ex aequatione propoſita, tot oriantur aequationes differentiales gradus proxime inferioris, quot n continet vnitates, vbi tamen ſaepenumero fit, vt plures earum inter ſe prorſus congruentes deprehendantur, pro diuerſis igitur his caſibus, integrale completum diuerſa ratione inueſtigandum eſſe perſpicitur. Primum itaque ſi omnes aequationes differentiales gradus proxime inferioris inter ſe ſint diuerſae ab vna earum reliquas ſubtrahendo, eruentur aequationes differentiales gradus adhuc inferioris $n-2$ tot, quot hic numerus $n-2$ vnitatibus conſtat,

atque

atque ſi haec operatio continuetur, demum perveniet ad aequationem finitam valorem ipſius y exprimentem. Quum vero hic valor ipſius y ex tot functionibus ipſius x componatur, quot m continet vnitates, oſtenditur quomodo per ſolam differentiationem, coefficientes, quibus hae functiones ipſius x afficiuntur inueſtigari queant.

Deinde explicatur, qua ratione integrale completum quaeri debeat caſu, quo aequationum differentialium gradus $n-1$ quaedam inter ſe congruunt reliquae vero inter ſe ſint diuerſae, quin etiam qualem formam id integrale completum induat, dum plane omnes aequationes gradus $n-1$ congruunt, adeoque vt vnica ſpectari poſſunt. Porro et is caſus conſiderationem ſingularem meretur, quo plures dantur claſſes aequationum differentialium congruentium gradus $n-1$, pro quibus aeque facile ac pro reliquis integrale completum aſſignari poteſt. Denique exempla quaedam adiiciuntur, quibus regulae pro quocunque caſu allatae illuſtrantur.

In poſteriori harum diſſertationum, exempla quaedam aequationum differentialium ſuperiorum graduum adferuntur, quarum integratio ad plures aequationes differentiales gradus proxime inferioris deducit, per quarum igitur inter ſe comparationem vel ad aequationem finitam peruenire licet, vel etiam ſaltem ad aequationem differentialem multo ſimpliciorem, ad cuius igitur integrationem totum

 negotium

negotium denuo reducitur. Praeter eas autem aequationes differentiales, quas ibi attulerat Cl. Auctor etiam ſequens aequatio, eadem ratione tractanda, attentione digna videtur.

$$dy\, d^3y + a\, ddy^2 + b\, dy^2\, ddy + c\, dy^4 = 0.$$

Si enim huius integrale ponatur $ddy + a'\, dy^2 = b'\, e^{\lambda y}\, dy^n\, dx^{n-2}$ ſequentes pro a', λ et n inuenientur valores

$$n = -a;\ \lambda = \frac{-b \pm \sqrt{(bb - 4(2+a)c)}}{2}$$

et $a' = \frac{-c}{\lambda}$; b' vero fit quantitas conſtans pro lubitu aſſumta. Poſito iam maioris breuitatis gratia $f = \sqrt{(bb - 4(2+a)c)}$, ſequentes duo oriuntur aequationes differentiales

$$ddy + \frac{2c}{b-f}dy^2 = A.e^{\frac{-b+f}{2}y}.\, dy^{-a}\, dx^{2+a}$$

$$ddy + \frac{2c}{b+f}dy^2 = B.e^{\frac{-b-f}{2}y}\, dy^{-a}\, dx^{2+a}$$

vnde ſi poſterior a priori ſubtrahatur haec oritur aequatio:

$\frac{4cf}{bq-ff}.\, dy^2 = e^{\frac{-1}{2}by}(Ae^{\frac{1}{2}fy} - Be^{\frac{-1}{2}fy})dy^{-a}dx^{2+a}$ ſeu $\frac{f}{2+a}dy^{2+a} = e^{\frac{-1}{2}by}dx^{2+a}(Ae^{\frac{1}{2}fy} - Be^{\frac{-1}{2}fy})$, deſignante e numerum cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$

PHYSICO-

PHYSICO-MATHEMATICA.

I.

Commentationes Phyſico-Mechanicae de Frictionibus, variis illuſtratae exemplis.

Auctore Daniele Bernoulli. pag. 249.

Commentationibus hiſce occaſionem Illuſtr. Auctori ſubminiſtrauit quaeſtio de motu virgae plano aſpero incumbentis, cuius extremitati potentia quaedam oblique eſſet applicata, virgam motu lentiſſimo protrahens, cuius ſolutio licet primo intuitu facillima videbatur, aliquae tamen minus exſpectatae ſe manifeſtarunt difficultates, dum definiendae erant directiones, ſub quibus frictiones motui reſiſtunt. Hoc igitur argumentum de directione reſiſtentiae ex frictione oriundae, dignum iudicauit Illuſtr. Auctor quod heic aliquot praeceptis et exemplis illuſtraret. Dum vero effectus frictionis definiendus eſt, primum obſeruaſſe iuuat, haud maiores potentias corpori applicatas ſupponi debere, quam quae ad frictionem ſuperandam ſufficiunt, ne ſcilicet ſimul inertiae rationem

 habere

habere neceſſe ſit. Tum vero et hoc notari meretur a ſimplici potentia, duplicem corpori motum induci alterum rotatorium, alterum progreſſiuum, pro vtroque motu autem definiendo ſingulares obſeruandas eſſe regulas.

Caſus ſimpliciſſimus, quem heic conſiderationi ſubiecit Illuſtr, Auctor, is eſt, quo corpori ſimplici, cuius ſingula elementa motu communi proferri cenſentur, duae applicantur potentiae. Si ſcilicet plano horizontali incumbere concipiatur eiusmodi corpus ſimplex, eique applicetur potentia tanta, quae frictionem eius ſuperare valeat, adeo vt corpus motum directionem huius potentiae ſequatur, tum vero ſuperuenire putetur alia potentia cuius directio ad priorem ſit perpendicularis, quae autem intenſitate priori cedat, quaeritur quaenam inde in motu corporis oriatur mutatio? Licet enim non deſunt, qui exiſtiment, omnia in ſtatu priſtino permanſura, re tamen accuratius perpenſa inuenitur corpus iam motum ſuum proſecuturum, ſecundum directionem inter directiones potentiarum mediam, id quod facillimo hoc experimento abunde confirmatur: Si in tabula ad horizontem aliquantum inclinata, protrahatur corpus ſecundum directionem, inclinationi tabulae et plano horizontalis parallelam; deprehendetur corpus hoc ad interſectionem continuo propius accedere, quin et tanta iam non opus eſſe potentia ad corpus protrahendum, quanta opus foret ſi corpus tabulae

tabulae horizontali incumberet. Deinde eum explicat Illuſtr. Auctor caſum, quo duobus corporibus A et B ſimplicibus, filo tenui aut virga omnis ponderis experte inter ſe iunctis, motus inducitur applicando anteriori horum corporum B potentiam quamcunque obliquam, quaeritur nimirum, quaenam ſit relatio inter frictiones horum corporum et potentiam mouentem? Heic vero duo caſus ſeorſim conſiderandi ſunt, *prior* quo corpus B cui potentia applicatur motu circulari circa A feratur, *poſterior* quo ambo corpora mouentur. Horum *prior* oritur, ſi reſoluta potentia in duas directiones, vnam normalem ad lineam corpora iungentem AB, alteram cum ipſa coincidentem, vltima harum potentiarum minor ſit frictione ipſius corporis A, *poſterior* vero ſi haec eadem potentia aliquantillum ſuperet frictionem corporis A. His euolutis quaeſtionem aggreditur Illuſtr. Auctor de motu virgae plano aſpero incumbentis et cui potentia obliqua applicatur, ad cuius faciliorem explicationem conducere exiſtimauit ſi primum conſideraret motum rotatorium virgae circa punctum quoddam fixum, inde oriundum quod potentia perpendicularis ipſi applicetur, hinc enim ipſum centrum rotationis virgae liberae deduci debere animaduertit, ſi ſolummodo obſeruetur, hoc punctum ita ſitum eſſe, vt minima potentia virgae motus induci queat. Singularia autem omnino ſunt, quae circa hoc centrum rotationis obſeruanda occurrunt, ſcilicet ſi potentia extra virgam AB ad diſtan-

diſtantiam quaſi infinitam adplicetur, cadet centrum rotationis in ipſum medium virgae, ſi diminuatur diſtantia potentiae a virga, accedet centrum rotationis ad oppoſitum virgae terminum A, ſi applicatio fiat in ipſa virga, adhucpropius ad alterum virgae terminum A, qui a potentia magis diſſitus eſt accedet, donec applicatio in ipſo medio fiat, quo caſu idea centri rotationis plane deſinit, quia virga motu parallelo incedet, tranſlata autem potentia verſus alteram extremitatem virgae A, protinus centrum rotationis verſus terminum B transferetur.

II.

Sectio ſecunda de Principiis motus fluidorum.

Auctore L. Eulero. pag. 270.

Poſtquam in Prima Sectione Tomo XIII. horum Commentariorum inſerta Illuſt: EVLERVS naturam et ſtatum aequilibrii fluidorum pertractaſſet, in hac, principia quibus doctrina de eorum motu innititur, explicare conſtituit. *Primum* igitur huius Sectionis *caput*, conſiderationes circa motus fluidorum in genere continet, vbi oſtenditur perfectam motus fluidorum cognitionem, ad haec quatuor capita reduci, denſitatem, preſſionem, vires ſollici-

ſollicitantes et celeritates quibus quodcunque elementum fluidi ſecundum ternas directiones fixas inter ſe normales mouetur, quae ſi ad quoduis tempus aſſignari poſſunt, quicquid fere ad motus fluidorum cognitionem pertinet innoteſcet. Heic autem manifeſta ſe prodit differentia inter motum fluidorum et corporum ſolidorum, quemadmodum enim in ſolidis ſufficiat trium punctorum non in directum ſitorum motum determinaſſe pro inueniendo motu omnium, ita ex aduerſo in fluidis, ſingulis elementis peculiaris ineſſe poteſt motus, adeo vt praecepta pro motu ſolidorum heic nequaquam applicari poſſint. In reliquis ad hoc caput pertinentibus problematibus docetur, quomodo datis celeritatibus, quibus vnumquodque fluidi elementum mouetur, inueſtigari queant, translatio cuiuscunque moleculae huius fluidi tempuſculo infinite paruo, variatio quae inde in denſitatem infertur et ipſa acceleratio, et de vltima quidem id omnino notatu dignum occurrit, quod celeritatis incrementa ſecundum quamlibet directionem a binis reliquis celeritatibus pendeant, ſecus ac in corporis ſolidis fieri ſolet, in his enim ſi celeritas ſecundum quamcunque directionem dicatur v, tempore per t deſignato, acceleratio ſemper per hanc formulam $(\frac{dv}{dt})$ exprimetur. In *ſecundo* huius ſectionis capite principia explicantur motus fluidorum a viribus quibuscunque ſollicitatorum. Heic nimirum docetur, quomodo datis viribus corporis ſollicitantibus, non ſolum vires eius acceleratrices ſed

 etiam

etiam motus ipſius definiri debeant. Aequationes vero differentiales ad quas doctrina motus fluidorum reducitur, tanto magis notatu dignae ſunt, quod functiones quatuor variabilium a ſe inuicem non pendentium inuoluant, adeoque ad nouum calculi genus referendae ſunt. Quicquid enim in calculo integrali hucusque praeſtitum eſt, fere ad functiones vnicae tantum variabilis extenditur, ea huius calculi parte, quae circa functiones duarum variabilium verſatur parum adhuc exculta. Ex quo igitur liquet quanta etiamnunc calculi ſubſidia ad Theoriam fluidorum rite tractandam deſiderentur. Quamobrem in id quam maxime incumbendum eſt, vt aequationes, quibus haec doctina continetur, tam ad maximam quam fieri poteſt ſimplicitatem, quam minimum numerum reducentur. Inuenit autem Illuſtr. Auctor vniuerſam motus fluidorum doctrinam ad duas reduci poſſe aequationes differentiales ſecundi gradus, per quarum igitur integrationem quicquid hoc in negotio deſideretur abſolui poteſt. *Caput tertium* applicationem continet principiorum in capite praecedenti ſtabilitorum ad fluida eiusdem denſitatis. Quum vero vix ſperari queat, vt problema generaliter conceptum de motu fluidi homogenei, facilem admittat ſolutionem, conſultum duxit Illuſtr. Auctor caſus particulares conſiderare, quibus motum huiusmodi fluidorum definire licet. Ad quos imprimis ſequentes pertinent, primo ſi ternae celeritates plane euaneſcunt, quo caſu fluidum in aequilibrio verſa-

verſabitur, deinde ſi hae celeritates fuerint conſtantes, adeo vt omnia fluidi elementa motu vniformi et parallelo ferantur, tertio ſi ternae fluidi celeritates, per functiones temporis exprimantur, tum vero denique ſi fluidi celeritates certam et conſtantem inter ſe teneant rationem. Quum vero quae in hoc capite adferuntur, motum ſolum fluidorum homogeneorum progreſſiuum ſpectent, *ſequens* explicationi motus gyratorii huiusmodi fluidorum ab Illuſtr Auctore deſtinatum eſt, vbi eum quidem caſum praecipue notatu dignum iudicauit, quo fluidum ita circa axem fixum gyratur, vt ſingulorum elementorum motus ſit vniformis, celeritates vero functionibus quibuscunque diſtantiarum ab axe proportionales. In *Capite quinto* motus explicatur fluidorum pro eo caſu, quo haec formula $udx+vdy+wdz$ integrationem admittit, vbi x, y et z tres coordinatas orthogonales, quibus locus elementi fluidi definitur deſignant, u vero v et w celeritates eiusdem elementi ſecundum directiones fixas in quibus x, y et z captae ſunt. Huic vero caſui ideo peculiare aſſignatum fuit *caput*, quia is explicando motui fluidorum per tubos in quo Theoria praeprimis adhuc fuit occupata, inſeruiat. *Caput* demum *ſextum* tractationem continet de motu fluidorum ex ſtatu initiali definiendo id nimirum heic quaeritur, vt ex ſitu elementi cuiuscunque initiali, definiatur quem ſitum certo elapſo tempore habebit, nec non qua denſitate et preſſione afficiatur.

 PHY-

PHYSICA.

I.

Mus Suslica.

Auctore A. I. Gueldenſtaedt p. 389.

Murem hunc minus adhuc cognitum, camporum auſtralis orientalisque Ruſſiae deſertorum incolam, quem hic Zoologis offert Cl. Auctor, adeo ſolerter propoſuit, vt in delineatione ipſius plura deſiderari fere nequeant. Tractatio a Cl. Auctore de illo elaborata complectitur 1°. deſcriptionem omnium partium cum dimenſionibus accuratam, 2°. Anatomiam omnibus numeris abſolutam, 3°. oeconomiae ſingularis, fatorum morumque notitiam concinnam et 4°. annotationes, quibus *ſuslica* a *marmota*, *criceto* aliisque maxime affinibus generis murini ſpeciebus diſtinguitur, perſpicuas. Character ſpecificus hoc modo audit: *Mus corpore fuſco flaueſcenti, dorſo maculis rotundis albidis variegato, cauda pedum longitudine, depreſſa piloſa, palmis tetradactylis plantis pentadactylis.* Nobis mus hic ipſiſſimus eſt Citillus Agricolae, quem nemini Zoologorum poſt illum, etiamſi in Polonia et Roſſia auſtraliori frequentiſſimum animalculum, oculis videre licuit.

II.

II.

Anas nyroca.

Auctore A. I. Gueldenſtaedt p. 403.

Nomen triuiale, quo Cl. Auctor hanc anatis ab Ornithologis adhuc vix determinatam ſpeciem diſtinguit, *nyrocam* loquor, Roſſice vrinatorem нырокъ (Nyroc) ſignificat. Data exacta deſcriptione omnium partium vtriusque ſexus, characterem conſtituit hunc: *Anas rufo nigricans*, *abdomine*, *ſpeculo alarum criſſoque albis.* Maxime affinis *Anas nyroca* eſt *anati ſaligulae*, diuerſas tamen et conſtantes ſpecies illas conſtituere multifaria obſeruatione didicit Cl. Auctor. Memorabilia ſunt migratio, nuptiae, oeconomia, vſus, quae in fine operis adfert.

III.

Spalax nouum Glirium genus.

Auctore A. I. Gueldenſtaedt p. 409.

Praemiſſa notitia ordinis Glirium, examinatisque generibus, quae hic ordo comprehendit, ad ipſum Characterem animalculi nouum huius ordinis genus conſtituentis, Cl. Auctor explicandum accedit. Audit ipſi Spalax, *Glis dentibus primoribus*

in vtraque maxilla cuneiformibus planis; *roſtro proboſcoideo*, *pedibus pentadactylis*; *auriculis caudaque nullis*. Eſſentiam characteris huius generici itaque in dentium primorum figura ponit, nec Cl. Auctori a veritate alienum videtur, Spalacem, cui nomen triuiale *Microphtalmus* dedit, *Talpam verſicolorem* eſſe ſebae, quam Ill. a *Linne Talpam ecaudatam palmis tridactylis* nominauit.

Singulariſſimum eſt, et in hiſtoria quadrupedum res inaudita, quod viſu plane careat Spalax noſter: nulli enim oculi per cutem apparent; nec vllum foraminis veſtigium in cute caput obtegente detegendum. Spatium tamen inter apophyſin zygomaticam oſſis maxillaris et inter muſculum crotaphytem occupat conglomeratum quoddam glanduloſum, liquidum ſpiſſiuſculum puri laudabili ſimillimum, in cellulis continens; centro huius conglomerati per celluloſam adhaeret oculus corpuſculum nigricans, globoſum, vix ſemine papauerino maius, antice ſubpellucidum nitidum referens, in quo ob minutiem nec pupilla nec liquores diſcerni queunt. Anomalum igitur hunc eſſe oculum, nec ad uiſum deſtinatum vnusquisque animaduertit, quoniam non tantum, vt ſupra commemoratum, appertura per cutem careat, ſed etiam muſculo ſubcutaneo valido veſtita ſit.

IV.

IV.

Peregusna noua Muſtelae ſpecies.

Auctore A. I. Gueldenſtaedt p. 441.

Praemiſſa deſcriptione et anatomia Peregusnae, varia ad phyſiologiam animalis huius pertinentia pulchre adfert Cl. Auctor. Victitat haec beſtiola vt omnes congeneres carne, praeſertim muribus *marmota*, *criceto*, *ſuslica*, *jaculo* aliisque camporum tanaicenſium inermibus phytophagis, inter voraciſſima animalia eſt referenda idque ratione ſtructurae tractus inteſtinalis breuiſſimi nec valuuloſi, quae communis fere et maxime neceſſaria eſt omnium mere carniuorarum conditio. Olera, panem, oua et mel, quae peregusnae expoſuit Cl. Auctor, intacta reliquit, gallinam viuam oblatam autem mox pedibus prehendit, dentes femoribus gallinae infixit et ſanguinem auide ſuxit. Dentibus gaudet ad conterendas plantarum partes ineptiſſimis ad carnem autem dilacerandam et praedam necandam aptiſſimis.

Mirum in modum in campis tanaicenſibus aliisque auſtralis orientalisque Roſſiae deſertis vaſſiſſimis ſtabilita eſt politia naturae humana arte non turbata; numeroſiſſimae enim plantarum myriades campos hoſce obueſtientes partim inſectorem laruis, partim auibus graniuoris, partim quadrapedibus phy-

phytophagis deſtinatae, vt aequilibrum inter plantas ſeruetur, ne vna ſpecie nimis multiplicata altera ſuffocetur et pereat. Sed iterum cauendum fuit, ne horum animalium numero nimis aucto, nimia plantarum copia comedatur, et hac via plantae pereant; hinc conditori naturae quam plurimis auium inſectiuorarum ſpeciebus, haud paucis auibus ornithophagis, variis quadrupedibus carniuoris quadrupedibus phytophagis infeſtis, apta domicilia in his campis parare placuit; vt proportio inter creaturas, quae finis eſt politiae natura, ſeruetur.

Expoſitis variis quae mores, nuptias, domicilia aliaque ad oeconomiam animalis pertinentia ſpectant, peregusnam ſuam nomine ſpecifico a congeneribus diſtinguit ſequenti: *Muſtela pedibus fiſſis, capite et corpore ſubtus aterrimis; corpore ſupra brunneo luteoque vario; ore faſcia frontali, auriculisque albis.*

V.

De Ouo ſimplici gemellifero.

Auctore C. F. Wolff. pag. 456.

Foetus praeternaturaliter conſtituti, ſiue monſtra hi fuerint irregularia, ſiue foetus connati, ſiue gemelli, vni tamen ouo incluſi, ab omni tempore a phyſiologis magna cum attentione conſiderati fuerunt, eo fine et ea ſpe, vt aliqua tandem inde lux

lux theoriae generationis adfunderetur. De ouis gemellificis *Ariſtoteles* iam mentionem fecit. Deinde *Fabricius ab Aquapendente* de iisdem vberius ſcripſit. Denique *Harvaeus* quoque ſuas his addidit obſeruationes. Verum, quae oua gemellifica ab his auctoribus vocantur, ea neque vero ſenſu talia, ſed potius gemella oua, vni teſtae incluſa fuere; (ſiquidem vitello, qui eſſentiam oui conſtituit, non ſimplici, qui geminum foetum produceret, ſed duplici vitello dupliciqne albumine praedita fuerunt;) neque videntur illi auctores vnquam embryones horum ouorum ipſos in ouis incubatis, ſed mera tantum oua non incubata vidiſſe; quod ſatis ex deſcriptione, quam tradiderunt, et ex diſſenſu eorundem reſpectu foetuum apparet; dum *Ariſtoteles* foetum gemellum, *Fabricius* autem monſtrum potius fore ſuſpicatur, quod prodiret ex eiusmodi ouis gemellificis dictis, et *Harvaeus* tandem ab vtroque iterum diſſentit. Subiectum, de quo hic agitur, verum ouum gemelliferum fuit, ſimplici albumine, ſimplicique vitello, ex quo duplex embryo propullulat, inſtructum, ſex quidem dies incubatum; quo tempore ſcilicet foetus gallinaceus in ſtatu embryonis adhucdum verſatur et notabili tamen magnitudine iam gaudet, vt nudis etiam oculis perluſtrari queat, praetereaque plurimas partes inchoatas, licet nondum perfectas, iam habet. Praemiſſo diſcurſu de differentia inter oua gemella et gemellifera, deque in ſpecie priorum natura et ortu, *Clariſſimus Auctor*

 ſtatum

ſtatum naturalem oui ſex dies incubati breuiter deſcribit, vt accuratius eo intelligantur, quae ſingularia et praeter naturam huic ſubiecto inſunt. Deinde deſcriptionem oui gemelliferi ipſam aggreditur. Praeter ea, quae iam indicauimus, plura alia ſingularia non minus digna notatu in eo ouo occurrunt; veluti abſentia amnii et ſitus embryonum nudorum prorſus extra vitellum, cui pedunculorum ope adnectuntur; cum naturaliter intra externam vitelli membranam embryo incluſus eſt; et alia, quae in Diſſertatione ipſa legenda. Denique conſectaria quaedam addit de ſtatu oui gemelliferi ante ſextum incubationis diem; nam iſte quidem ex praeſenti ſtructura concludi poterat. Porro ſimili modo de ſtatu eiusdem poſt diem ſextum. Porro de partu vel excluſione foetuum eiusmodi gemellorum, qui illum terminum ſuperuiuere vix poſſe videntur. Denique de ortu monſtrorum, quae non fieri ex gemellis compreſſis et concreſcentibus, ſed ex vegetatione potius ipſa luxuriante, ſatis luculenter oſtenditur.

VI.

VI.

Deſcriptio piſcis, e Gadorum genere, Ruſſis Nawaga (HABARA) dicti, hiſtorico anatomica.

Auctore I. T. Koelreuter pag. 484.

Piſcem hunc oceani europaei incolam, ichthyologis quidem recentioribus notum a nemine autem deſcriptum, quem Cel. Auctori nobiſcum communicare placuit, ea ſolertia explicauit, quam Lectores in operibus *Koelreuterianis* pulcherrimis expectare conſueuerunt. Datis exactis deſcriptionibus omnium partium externarum omnibusque partibus internis cultro anatomico ſubiectis, ſynonyma Ill. a *Linne* et Artedii adfert. Eſt Nawaga *Gadus* (*Callarias*) *tripterygius cirratus varius*, *cauda integra*, *maxilla ſuperiore longiore Lin.* Syſt. Nat. ed. XII. Tom. I. pag. 436. n. 2. Dolendum eſt, vt de oeconomia plurimarum incolarum pelagicarum, quae iucundiſſima eſt Zoologiae pars, ichthyologis fere nihil dicere liceat.

VII.

Deſcriptio quorundam animalium. Auctore I. Lepechin pag. 498.

In hac commentatione ſex animalia quinque aues et vnum mammale deſcribit Cl. Auctor. *Prima* auis eſt Parus dorſo dilute coeruleo inferne albus capite albo tania ad oculos et medio abdomine macula oblonga ex atro coeruleis faſcia alarum media alba, qui Ruſſice Kniaeſiok (князїокъ) nominatur et in virgultis circa Synbirsk habitat. *Secunda* eſt ſterna Tſchegraua (чеграва) ſuperne ex albo cana, inferne niuea capillitio nigro albedine irrorato, roſtro coccineo, pedibus nigris, quae ad mare caſpium frequentiſſima et voce riſum aemulatur. *Tertia* eſt Fringa, inferne alba, ſupra nigra lituris longitudinalibus flaueſcentibus, faſcia alarum alba, pedibus lobatis, quae ad lacus ſalſos habitat et circa mare caſpium gregatim volitat. *Quinta* eſt Ardea pumila, capite et collo flauicante caſtaneo alboque variis, dorſo caſtaneo, inferne albicans, quae etiam ad mare caſpium habitat. *Quinta* eſt Motacilla Pleſchanca (плешанка) dorſo pectoreque nigris, capillitio abdomineque albis, quae in foſſis praeruptis circa Saratow et alibi ad Wolgam habitat, vbi in modum hirundinis ripariae effodit cauernas horizontales, profundas, aliquando etiam aliarum auium cavita-

vitates occupat. Singularis eſt propagatio huius auiculae: decem enim pullos Cl. Auctor in nido vnico inuenit.

Mammale de quo agit eſt Mus oculis minutiſſimis, auriculis caudaque nullis, corpore ruſo cinereo, quem incolae Slepyſchok (слепышокъ) vocant. Hunc murem Cl. Auctor primus omnium inuenit, idemque eſt animalculum quod Cl. *Gueldenſtaedt* Spalacem nominauit et cuius in hoc ſummario pag. 409. mentionem fecimus.

VIII.

De Capra Saiga et Erinaceo aurito Diſſertatio.

Auctore Samuel Gottlieb Gmelin pag. 512.

Prior pars diſſertationis huius exactam deſcriptionem Caprae Saigae exhibet, quam Illuſtr. a *Linne* in XII^{ma} editione ſyſt. naturae Tom. I. p. 97. n. 11. Capram *tataricam* cornibus teretibus rectiuſculis perfecte annulatis apice diaphanis, gula imberbi, nominauit, et beat. *Gmelinus* ſub nomine Ibicis imberbis in Commentariis noſtris propoſuit. Poſterior pars Erinacei nouam ſpeciem tradit, quam Cel. Auctor in regione Aſtrachanenſi frequentiſſimam obſeruabit et ob aures exſtantes *auritum* nominauit.

IX.

Lychnanthos volubilis et Limnanthemum peltatum noua plantarum genera.

Auctore Samuel Gottlieb Gmelin pag. 525.

Prior harum plantarum, quam Cel. Auctor ad Tanaim legit, ad Decandriam Trigyniam Ill. a *Linne* pertinet. Dato charactere generico, allata etiam deſcriptione omnium partium exacta, paululum adhuc haeſitare videtur; ita enim ſeſe exprimit: aut Lychnanthos noſter Silene erit, aut Cucubalus, aut demum Saponaria. Sed ſi haec genera bene diſtincta ſunt, neutrum recte ingreditur. *Faux coronata* a Cucubalo eundem ſeparat. Ab eodem et Silene *Bacca globoſa vnilocularis.* Atque a Saponaria *ſtylo trifido* recedit. Summe videtur conuenire cum Cucubalo baccifero, ſed cum eum nunquam vidiſſe meminerim nil determino. Nec errauit Vir Cel. et nobis Lychnanthos nihil aliud quam Cucubalus baccifer eſſe videtur.

Alterum genus Limnanthemum peltatum puta, quod ad vrbem Tſcherkask in paludibus inuenit, ad Pentandriam monogyniam Illuſtr. a *Linne* referendum eſt. Nos in Limnanthemo ſummam cum

cum Menyanthe nymphoide affinitatem animaduertimus: omnia enim quae de illo dixit Cel. Auctor etiam de hoc dici poſſunt, excepta *Corollae quinque petala*, quae in Menyanthe nymphoide *quinque partita*.

X.

Obſeruationes et deſcriptiones botanicae.

Auctore I. Gaertnero pag. 531.

Octo hac Diſſertatione plantarum partim nouarum partim minus ſufficienter antea deſcriptarum exactam delineationem Botanicis offert Cel. Auctor. Prima earum eſt noua ſpecies Veronicae, quae Cel. Viro Veronica *grandiflora* racemis lateralibus laxis, foliis oppoſitis, crenatis, hirſutis; caule adſcendente, ſtolonifero, audit. Secunda non quidem prorſus noua ſed minus rite hactenus definita planta, quam beat. *Stellerus* cum priore in Kamtſchatca legit et *Gmelinus* Fl. Sib. Tom. 3. p. 219. veronicam foliis inferioribus ouatis, crenatis; ſuperioribus rotundis mucronatis, caule ſpica terminato, appellauit. Hanc, cuius character in calyce altero latere fiſſo cum flore diandro conſiſtit, Cel. Auctor diuerſi et nouique generis eſſe cognovit et Lagotidem dixit. Nomen triuiale huius

plantae

plantae eſt Lagotis *glauca* foliis radicalibus petiolatis, caulinis et ſpica terminali ſeſſilibus. Tertia eſt Bromus *ouatus* panicula ouata, faſciculata, erecta; ſpiculis oblongis: intermediis primoribus breuius pedunculatis; ſecundariis ſeſſilibus, qui ad maris caſpii littora habitat. Quarta et quinta ſunt agropyri noui generis ex ordine graminum duae ſpecies, agropyron puta *criſtatum* ſpica compoſita, floſculis hirſutis, et Agropyron *triticeum* ſpica ſimplici, floſculis laeuibus. Prius Illuſtr. a *Linne* Bromum ſpiculis diſtiche imbricatis, ſeſſilibus, depreſſis, dixit, et beat. *Gmelinus* Feſtucam culmo ſpicato, ſpiculis multifloris, in Flora Sibirica nominavit: poſterius vero noua ſpecies eſt quae ad Wolgam et Iaicum vt et in tota fere Sibiria auſtrali in locis ſterilibus paſſim occurrit. Sexta eſt Rubia *cordifolia* frequentiſſima in rupeſtribus Sibiriae transbaicalenſis planta, cuius ſemina Zachertius Pharmacopola apud Argentifodinas argunenſes et botanophilus miſit. Septima eſt Anemone *puſilla* flore calyculato; ſcapo aphyllo pubeſcente, foliis radicalibus ternatis, inciſis, quae etiam inter plantas Sibiriae proprias numeranda. Octaua eſt pulchra Digitatis *glutinoſa* Chinae ſeptentrionalis incola.

XI.

XI.

Deſcriptiones Quadrupedum et Auium anno 1769. obſeruatarum.

Auctore P. S. Pallas pag. 547.

Trium quadrupedum et quinque auium minus antea cognitarum deſcriptiones Cel. Auctori hac Diſſertatione cum eruditis communicare placuit. Quadrupedes ſunt Mus *Citillus* et *talpinus* et Erinaceus *auritus* Aues vero Anas *rutila*, Sterna *Caſpia*, Motacilla *leucomela* Loxia *erythrina* et Parus *cyanus*. In omnibus his deſcriptionibus eadem elucet ſolertia, eadem eruditio, perſpicuitas ea, quam antea ſemper in ſcriptis noſtri Zoologi inuenerunt lectores.

XII.

Nouae Inſectorum ſpecies.

Auctore E. Laxmann pag. 593.

Si maguos illos ſcarabaeos americanos, quos Cel. *Koelreuter* pulchre deſcripſit, excipiamus, nihil de Inſectis in Commentariis noſtris occurrit. Vt etiam de Ruſſicis et Sibiricis Inſectis eruditis ali-

 quid

quid conſtaret, operae precium eſſe duxit Auctor, qui plurima haec vaſtiſſimi Imperii animalcula per totum ſexennium collegit, tredecim has ſpecies tradere. Primae ſeptem harum ad Coleoptera, octaua et nona ad Hemitera pertinent. Speciosiſſimae ſunt quatuor vltimae Myrmeleon puta *Kolywanenſe*, Ichneumon *gigas*, Conops *petiolatus* et Aranea *ſingorienſis*. Cum autem in deſcribendis ipſis breuitati magnopere ſtuduerit, plura de illis in hoc ſummario dicere ſuperuacaneum putauimus.

INDEX.

INDEX DISSERTATIONVM.

Mathematica.

D. Bernoulli, Diſquiſitiones Analyticae de nouo problemate coniecturali pag. 3.
Eiusdem, Menſura ſortis ad fortuitam ſucceſſionem rerum naturaliter contingentium applicata pag. 26.
L. Euleri, Conſiderationes de traiectoriis orthogonalibus pag. 46.
Eiusdem, De formulis integralibus duplicatis p. 72.
Eiusdem, Euolutio inſignis Paradoxi circa aequalitatem ſuperficierum pag. 104.
Eiusdem, De ſummis ſerierum numeros *Bernoullianos* inuoluentium pag. 129.
Eiusdem, De partitione numerorum in partes, tam numero quam ſpecie datas pag. 168.
Eiusdem, De inuentione quotcunque mediarum proportionalium citra radicum extractionem pag. 188.
A. I. Lexell, De integratione aequationis differentialis pag. 215.
Eiusdem, Methodus integrandi, nonnullis aequationum differentialium exemplis illuſtrata pag. 238.

Phyſico-Mathematica.

D. Bernoulli, Commentationes Phyſico-Mechanicae de frictionibus variis illuſtratae exemplis pag. 249.

L. Euleri, Sectio ſecunda de principiis motus fluidorum pag. 270.

Phyſica.

A. I. Gueldenſtaedt, Mus Suslica.

Eiusdem, Anas Nyroca pag. 403.

Eiusdem, Spalax, nouum glirium genus pag. 409.

Eiusdem, Peregusna, noua muſtelae ſpecies p. 441.

C. F. Wolff, Ouum ſimplex gemelliferum pag. 456.

I. T. Koelreuter, Deſcriptio piſcis, e gadorum genere, Ruſſis nawaga dicti, hiſtorico anatomica pag. 484.

I. Lepechin, Deſcriptio quorundam animalium p. 498.

S. G. Gmelin, De Capra Saiga et Erinaceo aurito pag. 512.

Eiusdem, Lychnanthos volubilis et Lymnanthemum peltatum noua plantarum genera pag. 525.

I. Gaertner, Obſeruationes et deſcriptiones botanicae pag. 531.

P. S. Pallas, Deſcriptiones quadrupedum et auium Anno 1769. obſeruatarum pag. 548.

E. Laxmann, Nouae Inſectorum ſpecies pag. 593.

MATHE-

MATHEMATICA.

DISQVISITIONES ANALYTICAE DE NOVO PROBLEMATE CONIECTVRALI.

Auctore

DANIELE BERNOVLLI.

§. 1.

Sint duae, tres, pluresue vrnae, in quibus ſingulis ſchedulae certo et aequali numero repoſitae putentur, ſchedulae autem vniuscuiusuis vrnae ſuo peculiari colore a ſchedulis reliquarum vrnarum ab initio diſtinctae ſint; tum porro ſchedulae ſucceſſive, ſorte tamen, permutentur hac lege vt quauis vice ex ſingulis vrnis ſchedula vna extrahatur, et deinde in vrnam ordine ſequentem transslocetur, illa autem quae ex vrna, vltimo loco poſita, extracta ſint, in primam reponatur: his ita poſitis datoque permutationum, praefato modo factarum, numero quaeritur numerus ſchedularum cuiusuis coloris quae probabiliter in quauis vrna

 conti-

continebuntur, quoties autem extractio ex ſingulis vrnis ſimul facta fuit, ſimulque eo, quo dixi, modo in vrnam ſequentem ſchedula quaeuis transpoſita, integram iſtam operationem vnius permutationis nomine indico. Tale eſt argumentum, quod nunc diſcutiendum mihi propoſui: potuiſſet quidem generalius proponi, ſumendo numeros ſchedularum primitiuos in diuerſis vrnis vtcunque inaequales easque vel ab ipſo initio qualitercunque permixtas, at aliquid concinnae breuitati dari poſſe putaui.

§. 2. Quamuis obuius ſit calculus pro duabus vrnis eum tamen ob nexum, quem habebit cum ſequentibus, apponam: ſint igitur in prima vrna n ſchedulae albae totidemque nigrae, in vrna altera, erit ſecundum notas combinationum atque probabilitatum regulas, poſt primam permutationem, numerus ſchedularum albarum in prima vrna reſiduarum $= n - 1$, poſt ſecundam permutationem $= \frac{(n-1)(n-2)}{n} + 1$, poſt tertiam permutationem habebitur ($\frac{(n-1)(n-2)^2}{nn} + \frac{n-2}{n} + 1$; poſt quartam $\frac{(n-1)(n-2)^3}{n^3} + \frac{(n-2)^2}{nn} + \frac{n-2}{n} + 1$; poſt quintam $\frac{(n-1)(n-2)^4}{n^4} + \frac{(n-2)^3}{n^3} + \frac{(n-2)^2}{nn} + \frac{n-2}{n} + 1$; et ſic porro; inde colligitur, ſi generaliter numerus factarum permutationum fuerit r atque ponatur breuitatis gratia $\frac{n-2}{n} = m$ fore numerum ſchedularum albarum in prima urna reliquarum $= \frac{1-m^{r-1}}{1-m} + (n-1)m^{r-1}$

$= \frac{1}{2} n$

$= \frac{1}{2}n(1 + m^r)$. De hinc reliquarum ſchedularum diſtributio per ſe intelligitur.

§. 3. Quia m ſemper eſt vnitate minor euaneſcit terminus m^r, ſi r ſit numerus admodum magnus atque tunc fit numerus ſchedularum albarum in prima vrna reſiduarum ſimpliciter $= \frac{1}{2}n$; ſtatus is eſt aſymptotos, ad quem dum permutationes fiunt, magis magisque peruenitur, niſi fuerit n vel aequalis vnitati vel binario; etenim ſi vnica ſchedula alba vrnae primae et vnica nigra vrnae alteri indita fuerit, fit $m = -1$ alternisque vicibus vel nulla vel vna ſchedula alba in vrna erit locata, quandoquidem formula noſtra abit in $\frac{1}{2}(1 + (-1)^r)$; ſi vero fuerit $n = 2$ fit $m = 0$ formulaque indicat vnitatem ſeu valorem medium ſiue probabilem inter ſingulos valores poſſibiles. Haec non vrgebo; aliud eſt quod potiſſimum intendo nempe vt inquiratur quid futurum ſit, cum ipſe ſimul numerus ſchedularum permagnus eſt ita vt pro infinito veluti haberi poſſit, nec enim tum amplius numerus m^r negligi poteſt, niſi r ſit veluti infinities maior vel ipſo numero n: Hac facta ſuppoſitione incidimus in argumentum, quod ſolo calculo infiniteſimali breuiter expediri poſſe, nulla combinationum habita ratione, oſtendi in Commentariorum volumine XII. Igitur conſenſum vtriusque methodi, vt novo argumento manifeſtarem, animum induxi, praeſertim cum hanc eandem methodum infiniteſimalem

malem in ſequentibus, quae magis erunt abſtruſa; pariter adhibere conſtitui; Nunc in viam redeo.

§. 4. Quod ſi proinde numerus n pro infinito habeatur, erit $\frac{2}{n}$ pari iure veluti infinite paruus, quem vocabo α fietque $m = 1 - \alpha$; ergo formula noſtra $\frac{1}{2} n (1 + m^r)$ numerum ſchedularum albarum in prima vrna reſiduarum exprimens dabit $\frac{1}{2} n (1 + (1-\alpha)^r)$: Eſt vero $(1-\alpha)^r = 1 - r\alpha + \frac{rr\alpha\alpha}{1.2} - \frac{r^3\alpha^3}{1.2.3} + \frac{r^4\alpha^4}{1.2.3.4} -$ etc. quae ſeries aequalis eſt ſimpliciter $c^{-r\alpha}$ vel $= \frac{1}{c^{r\alpha}} = \frac{1}{c^{\frac{2r}{n}}}$; vbi litera c denotat numerum, cuius logarithmus hyperbolicus vnitas eſt, aut proxime numerum 2, 718. Igitur ſi numerus quaeſitus ſchedularum albarum poſt r permutationes in prima vrna reſiduarum indicetur per x, habebitur

$$x = \frac{1}{2} n \left(1 + \frac{1}{c^{\frac{2r}{n}}}\right).$$

§. 5. Iam vero quaeritur quemadmodum idem valor altera methodo inueniri queat, conſiderando nempe quantitates x et r tanquam fluentes, quod vtique fieri poteſt, quamdiu vnitas pro valde parua reſpectu numeri ſchedularum in vrna reſiduarum haberi poteſt: Hoc ita poſito haud difficulter apparet fore $dx = \frac{-x}{n} dr + \frac{n-x}{n} dr$, vbi primum membrum debetur ſchedulae extractae: alterum immiſſae. Inde habetur $\frac{dx}{2x-n} = \frac{-dr}{n}$ vel $\frac{1}{2} \log \frac{2x-n}{n} = \frac{-r}{n}$ vel

vel $\frac{2x-n}{n} = c^{\frac{-2r}{n}}$, vnde protinus fit $x = \frac{1}{2}n\left(1 + \frac{1}{c^{\frac{2r}{n}}}\right)$, plane vt antea habuimus.

§. 6. Sunt itaque huiuscemodi quaeſtiones ſolutu multo faciliores, cum numerus ſchedularum ceu infinitus haberi poteſt, quin fere totam ſuam indolem mutant et vix adhuc in cenſum probabilium referendae videntur, etiamſi ſolutionem alteram ex meris principiis artis coniectandi deduxerim; perſpicuum enim eſt, poſteriorem noſtram ſolutionem plane eandem fore, ſi duo ſupponantur vaſa duobus canaliculis inter ſe communicantia, per quos perpetua fiat transuaſatio duorum fluidorum in ambobus vaſis contentorum et protinus perfecte permiſcibilium, ſique lex permixtionis pro quouis temporis puncto quaeratur. Velim autem notetur numeros vel mediocriter magnos ſine ſenſibili errore pro infinitis haberi poſſe; fuerit, verbi gratia, $n = 200$ et $r = 100$, dabit formula paragraphi ſecundi numerum ſchedularum albarum in prima vrna probabiliter reliquarum $= 136\frac{3}{5}$, dum hypotheſis infinitae magnitudinis exhibet $136\frac{2}{3}$. Imo potuiſſent numeri ſeligi multo minores.

§. 7. Faciem aliam Problema noſtrum induit cum plures quam duas proponimus vrnas, tres modo ſi fuerint, protinus in calculos incidimus ſatis perplexos; miratus ſum nouam adhibendi calculi indolem inde-

indeque iudicaui latius patere ac putaueram vſum algorithmi infiniteſimalis in huiuscemodi quaeſtionibus pertractandis. Prius vero quam ad examen de numero ſchedularum veluti infinito deſcendam, ſolutionem exponam generalem ex principiis vſitatioribus deductam vt ſic quisque perſpiciat, ſi rem vlterius proſequi voluerit, viam quam debeat calcare.

§ 8. Sint igitur nunc tres vrnae, quarum prima ab initio contineat n ſchedulus albas, altera totidem nigras, tertia autem totidem rubras, ſupponaturque poſt datum factarum permutationum numerum, ſupereſſe in prima vrua A ſchedulas albas, ſimulque in vrna ſecunda atque tertia numerum ſchedularum albarum eſſe B et C: Eſt autem perpetuo $A + B + C = n$; His ita poſitis quisque facile videbit fore poſt nouam ſuperuenientem permutationem numerum ſchedularum in prima, ſecunda atque tertia vrna $\frac{(n-1)A+C}{n}$; $\frac{(n-1)B+A}{n}$ atque $\frac{(n-1)C+B}{n}$; Cognita autem diſtributione ſchedularum albarum caetera omnia ſua ſponte innoteſcunt erit nempe numerus ſchedularum nigrarum in vrna prima $= C$; in ſecunda $= A$; in tertia $= B$ atque rubrarum in vrna prima $= B$, in vrna ſecunda $= C$; in tertia $= A$; Igitur de ſola diſtributione albarum inquiram. Quia vero, vt vidimus, ſtatus ſequens ex dato praecedente cognoſcitur, ſtatusque initialis datus eſt, omnis variatio ab initio vsque ad quamuis factam permutationem intelligitur. Ta-

bulam

bulam adiicio, qua progreſſio terminorum magis eluceſcit.

Numerus permutationum.	Numerus ſchedularum albarum, quae probabiliter erunt in vrna. Prima	Secunda	Tertia
0.	$n.$	0.	0
1.	$n-1$	1.	0
2.	$\frac{(n-1)^2}{n}$	$\frac{2(n-1)}{n}$	$\frac{1}{n}$
3.	$\frac{(n-1)^3+1}{nn}$	$\frac{3(n-1)^2}{nn}$	$\frac{3.(n-1)}{nn}$
4.	$\frac{(n-1)^4+4(n-1)}{n^3}$	$\frac{4(n-1)^3+1}{n^3}$	$\frac{6(n-1)^2}{n^3}$
5.	$\frac{(n-1)^5+10(n-1)^2}{n^4}$	$\frac{5(n-1)^4+5(n-1)}{n^4}$	$\frac{10(n-1)^3+1}{n^4}$
6.	$\frac{(n-1)^6+20(n-1)^3+1}{n^5}$	$\frac{6(n-1)^5+15(n-1)^2}{n^5}$	$\frac{15(n-1)^4+6(n-1)}{n^5}$
7.	$\frac{(n-1)^7+35(n-1)^4+7(n-1)}{n^6}$	$\frac{7(n-1)^6+35(n-1)^3+1}{n^6}$	$\frac{21(n-1)^5+21(n-1)^2}{n^6}$
8.	$\frac{(n-1)^8+56(n-1)^5+28(n-1)^2}{n^7}$	$\frac{8(n-1)^7+70(n-1)^4+8(n-1)}{n^7}$	$\frac{28(n-1)^6+56(n-1)^3+1}{n^7}$
9.	$\frac{(n-1)^9+84(n-1)^6+84(n-1)^3+1}{n^8}$	$\frac{9(n-1)^8+126(n-1)^5+36(n-1)^2}{n^8}$	$\frac{36(n-1)^7+126(n-1)^4+9(n-1)}{n^8}$
	etc,	etc.	etc.

§ 9. Quicunque animum ad praemiſſam tabellam attenderit, hic facile perſpiciet legem progreſſionis, quae talis eſt. Indicetur numerus factarum permutationum generaliter littera r, aſſumaturque binomium cuius alterum membrum ſit $n-1$ alterum 1, iſtudque binomium eleuetur ad dignitatem r, ſic vt habeatur $((n-1)+1)^r$; conuertatur dein haec quantitas in ſeriem:

$$(n-1)^r + r(n-1)^{r-1} + \frac{r.r-1}{1.2}(n-1)^{r-2} + \frac{r.r-1.r-2}{1.2.3}(n-1)^{r-3} \ldots\ldots + 1.$$

In iſta ſerie, quam vocabo, generatrice addantur primus, quartus, ſeptimus etc. terminus, eorumque ſumma diuidatur per n^{r-1}, ſicque habebitur numerus ſchedularum in prima vrna; Deinde ſi addantur ſecundus, quintus, octauus etc. terminus ſummaque pariter diuidatur per n^{r-1} habebitur numerus ſchedularum albarum in vrna ſecunda; Denique ſumma tertii, ſexti, noni etc. termini diuiſa per n^{r-1} dabit numerum ſchedularum albarum in tertia vrna. Vnde per ſe liquet, numerum omnium ſchedularum albarum, vi huius conſtructionis, eſſe conſtanter $= n$, prouti natura rei poſtulat.

§. 10. Res eo, quo mihi obſeruatae fuerunt ordine profero; Iam vero facile intelligere potui ex praecedente paragrapho, quotcunque fuerint vrnae, praefatam ſeriem generatricem ſemper eandem per-„manere, primum autem eius terminum pertinere „ad primam vrnam, ſecundum terminum ad ſecun-„dam vrnam, tertium ad tertiam et ſic porro donec peruentum fuerit ad vrnam vltimam, tumque terminos ſequentes eodem ordine iterum tribuendos eſſe vrnae primae, ſecundae etc. donec ſecunda periodus finita fuerit, quo facta tertia incipit periodus incipiendo iterum ab vrna prima et ſic deinceps, vsque dum omnes ſeriei termini fuerint exhauſti. Erunt porro ſinguli termini diuidendi per n^{r-1}; hoc facto indicabit ſumma omnium terminorum ad eandem

eandem vrnam pertinentium numerum omnium ſchedularum albarum in iſta vrna contentarum. Et haec eſt ſolutio generalis problematis noſtri paragrapho primo expoſiti.

§. 11. Videamus nunc an iſta ſolutio generalis conſentiat cum ſolutione, quam dedimus pro duabus vrnis in fine §. 2. vbi vidimus eſſe numerum ſchedularum albarum in prima vrna contentarum $= \frac{1}{2}n(1 + m^r)$ vel $= \frac{1}{2}n\left(1 + \left(\frac{n-2}{n}\right)^r\right)$, nam ibi breuitatis gratia poſueramus $m = \frac{n-2}{n}$; Praeſens vero ſolutio generalis dat numerum ſchedularum albarum in prima vrna $= \frac{(n-1)^r}{n^{r-1}} + \frac{r.(r-1)(n-1)^{r-2}}{1.\ 2.\ n^{r-1}}$

$$+ \frac{r.(r-1)(r-2)(r-3)(n-1)^{r-4}}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ n^{r-1}} + \text{etc.}$$

oportet igitur vt praefata ſeries indefinita ſit aequalis $\frac{1}{2}n\left(1 + \left(\frac{n-2}{n}\right)^r\right)$, vt iſta aequalitas appareat, conſiderabimus praefatam quantitatem ſub hac altera forma $\frac{1}{2}n\left(\left(\frac{(n-1)-1}{n}\right)^r + 1\right)$ ſiue $\frac{((n-1)-1)^r + ((n-1)+1)^r}{2\ n^{r-1}}$;

Nunc vero ſi ambo numeratoris binomia in ſeriem indefinitam conuertantur fiet vt termini plane iidem alternatim vel duplicentur vel deſtruantur ſicque ipſiſſimam ſolutionis generalis formam exhibeant. At pro caſu hoc particulari praeferenda vtique eſt expreſſio paragraphi ſecundi ceu longe compendioſior.

 Si

Si vnica conſideraretur vrna, permaneret vtique in illa idem conſtanter numerus ſchedularum albarum, quod ipſum pariter ſolutio generalis indicat.

§. 12. Iam propius ad id accedo, quod potiſſimum conſtitutum habebam nempe vt pro tribus vrnis oſtenderem quemadmodum iſtud negotium ope calculi infiniteſimalis confici poſſit, ſi quamplurimae ſint ſchedulae ſaepiusque permutationes fuerint repetitae ita vt numeri n et r veluti infiniti cenſeri poſſint, cuiusmodi examen fecimus pro duabus vrnis §. §. 4 et 5, hanc diſquiſitionem vtraque methodo, analyſi nempe communi atque infiniteſimali faciam, vt rurſus conſenſus inter vtrumque eluceſcat.

Si ſtatim ſermo ſit de vrna prima, habebimus, vi paragraphi noni, numerum ſchedularum albarum in illa contentarum, mutata tantiſper forma neglectisque terminis negligendis ita expreſſum $n, (1 - \frac{1}{n})^r (1 + \frac{r^3}{1.2.3\, n^3} + \frac{r^6}{1.2.3.4.5.6\, n^6} + \text{etc.})$.

Eſt vero per paragraphum quartum quantitas $(1 - \frac{1}{n})^r = c^{\frac{1}{\frac{r}{n}}}$, quae proin quantitas ſubſtitui poteſt; poſtmodum pari methodo definiri poteſt numerus ſchedularum albarum in vrna ſecunda ac denique

denique in tertia, hoc modo inuenimus numerum ſchedularum albarum.

$$\text{In vrna I.} = \frac{n}{c^{\frac{r}{n}}}\left(1 + \frac{r^3}{1.2.3\,n^3} + \frac{r^6}{1.2.3.4.5.6\,n^6} + \text{etc.}\right).$$

$$\text{In vrna II.} = \frac{n}{c^{\frac{r}{n}}}\left(\frac{r}{n} + \frac{r^4}{1.2.3.4.n^4} + \frac{r^7}{1.2.3.4.5.6.7\,n^7} + \text{etc.}\right).$$

$$\text{In vrna III.} = \frac{n}{c^{\frac{r}{n}}}\left(\frac{rr}{1.2.nn} + \frac{r^5}{1.2.3.4.5\,n^5} + \frac{r^8}{1.2.3.4.5.6.7.8\,n^8} + \text{etc.}\right).$$

Hic ſupereſt vt et in hiſce formulis factorem poſteriorem, ſerie infinita expreſſum, ad quantitatem terminis finitis circumſcriptam reducere tentemus qua quidem in re non memini, quid ab aliis iam praeſtitum fuerit: quicquid id ſit, haud abs re mea fore puto, ſi omnia ſimul conſpectui exponam.

§. 13. Incipiam a prima ſerie infinita $1 + \frac{r^3}{1.2.3\,n^3} + \frac{r^6}{1.2.3.4.5.6\,n^6} +$ etc. cuius ſumma S quaeritur, atque ſic habebimus.

$$1 + \frac{r^3}{1.2.3\,n^3} + \frac{r^6}{1.2.3.4.5.6\,n^6} + \text{etc.} = S$$

Huius aequationis ſumatur differentiale tertii ordinis ponendo elementum dr conſtans et conſiderando quantitatem r tanquam fluentem; ſic recurremus ad ipſam ſeriem propoſitam,

 mul-

multiplicatam per $\frac{d r^3}{n^3}$, proindeque habebimus.

$$\frac{S d r^3}{n^3} = d^3 S.$$

Completa huius aequationis integratio neceſſario tres continebit quantitates conſtantes, equidem facile apparet aſſumi poſſe aequationem $S = \alpha c^{\frac{m r}{n}}$, ſi ponatur $m^3 = 1$: habebit ſic m tres radices, nempe $m = 1$; $m = (-1 + \sqrt{-3}) : 2$ et $m = (-1 - \sqrt{-3}) : 2$, qua propter nunc aſſumere poſſumus aequationem $S = \alpha c^{\frac{r}{n}} + \beta c^{(-1 + \sqrt{-3})\frac{r}{2n}} + \gamma . c^{(-1 - \sqrt{-3})\frac{r}{2n}}$, quae ſic tribus gaudet quantitatibus conſtantibus arbitrariis α, β et γ, quarum ope ſingulis circumſtantiis ſatisfieri poteſt, quae in eo conſiſtunt, quod numerus ſchedularum initialis in quauis vrna arbitrarius eſt, ſi quaeſtio generaliſſima proponatur; vnde liquet argumentum noſtrum, ſi vel decem ponerentur vrnae non niſi aequatione differentiali decimi ordinis recte explicari poſſe, quae tamen ſemper integram admittet integrationem, Notum autem eſt, quantitates exponentiales imaginarias in ſinus et coſinus conuerti poſſe; eſt ſcilicet $c^{\frac{r\sqrt{-3}}{2n}} = \text{ſin.} \frac{r\sqrt{3}}{2n}$ et $c^{\frac{-r\sqrt{-3}}{2n}} = \cos \frac{r\sqrt{3}}{2n}$ atque his factis ſubſtitutionibus obtinebimus aequationem meris terminis realibus expreſſam, nempe

$S =$

$$S = \alpha c^{\frac{r}{n}} + \beta c^{\frac{-r}{2n}} \text{ſin.} \frac{r\surd}{n} + \gamma c^{\frac{-r}{2n}} \cos. \frac{r\surd 3}{2n}.$$

Iam aliud non ſupereſt quam vt determinentur quantitates conſtantes α, β et γ: id vero exinde petendum eſt, quod facto $r = 0$ fieri debeat $S = 1$, $dS = 0$, atque $ddS = 0$ hinc ſequitur eſſe $\alpha + \gamma = 1$; deinde $\frac{\alpha}{n} + \frac{\beta\surd 3}{2n} - \frac{\gamma}{2n} = 0$ atque $\frac{\alpha}{nn} - \frac{\beta\surd 3}{2nn} - \frac{\gamma}{2nn} = 0$. Ex hiſce aequationibus deducitur eſſe $\alpha = \frac{1}{3}$; $\beta = 0$ et $\gamma = \frac{2}{3}$, ſicque fit

$$S = \tfrac{1}{3} c^{\frac{r}{n}} + \tfrac{2}{3} c^{\frac{-r}{2n}} \text{coſin}; \frac{r\surd 3}{2n}.$$

Atque iſte valor, terminis finitis ſimulque realibus expreſſus, poteſt ſubſtitui ſeriei in infinitum continuatae $1 + \frac{r^3}{1.2.3.n^3} + \frac{r^6}{1.2.3.4.5.6.n^6} + \text{etc.}$ ſit verbi gratia $\frac{r\surd 3}{2n} =$ quadranti circuli cuius radium vnitas exprimit $= \pi =$ proxime $\frac{11}{7}$, fiet $S = \frac{1}{3} c^{\frac{2\pi}{\surd 3}}$. Haec ad vrnam primam.

Simili plane modo determinatur valor ſeriei ſecundae quae pertinet ad vrnam ſecundam; iſte quippe valor eadem exprimitur aequatione generali cum hoc ſolo diſcrimine quod coefficientes α, β et γ nunc alium acquirunt valorem, quandoquidem facto $r = 0$ fieri debet iſta ſecunda ſeries $= 0$ ſiue, ſi ſeries indicetur per S', oportet ſit $S' = 0$; tum $\frac{dS'}{dr} = \frac{1}{n}$ atque $\frac{ddS'}{dr^2} = 0$, vnde $\alpha + \gamma = 0$;

$\alpha +$

$\alpha + \frac{1}{2}\beta\sqrt{3} - \frac{1}{2}\gamma = 1$ et $\alpha - \frac{1}{2}\beta\sqrt{3} - \frac{1}{2}\gamma = 0$ atque ſic fit $\alpha = \frac{1}{3}$; $\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\gamma = -\frac{1}{3}$; Igitur

$$S' = \frac{1}{3} c^{\frac{r}{n}} + \frac{1}{\sqrt{3}} c^{\frac{-r}{2n}} \text{ſin.} \frac{r\sqrt{3}}{2n} - \frac{1}{3} c^{\frac{-r}{2n}} \cos. \frac{r\sqrt{3}}{2n}.$$

Denique ſi ſummam ſeriei ad tertiam vrnam pertinentis indicemus per S'', reperiemus pauculis mutatis iisque, plane obuiis.

$$S'' = \frac{1}{3} c^{\frac{r}{n}} - \frac{1}{\sqrt{3}} c^{\frac{-r}{2n}} \text{ſin.} \frac{r\sqrt{3}}{2n} - \frac{1}{3} c^{\frac{-r}{2n}} \cos. \frac{r\sqrt{3}}{2n}.$$

§. 14. Quod ſi nunc in paragrapho 12. inventos modo valores loco ſerierum ſubſtituamus inveniemus numerum ſchedularum albarum pro ſingulis vrnis, nempe.

In vrna prima $= \frac{1}{3}n + \frac{2}{3}n.\, c^{\frac{-3r}{2n}}.\cos.\frac{r\sqrt{3}}{2n}$

In vrna ſecunda $= \frac{1}{3}n + \frac{n}{\sqrt{3}}.\, c^{\frac{-3r}{2n}}.\text{Sin.}\frac{r\sqrt{3}}{2n} - \frac{n}{3}.\, c^{\frac{-3r}{2n}}.\text{Coſ.}\frac{r\sqrt{3}}{2n}$

In vrna tertia $= \frac{1}{3}n - \frac{n}{\sqrt{3}}.\, c^{\frac{-3r}{2n}}.\text{Sin.}\frac{r\sqrt{3}}{2n} - \frac{n}{3}\, c^{\frac{-3r}{2n}}.\text{Coſ.}\frac{r\sqrt{3}}{2n}.$

Deinde ſchedulae nigrae ſe habebunt in vrna ſecunda, tertia atque prima ſimulque ſchedulae rubrae in vrna tertia prima et ſecunda, quemadmodum ſchedulae albae ſe habent in vrna prima, ſecunda et tertia, ſic vt omnes et ſingulae ſchedularum diſtributiones in ſingulis vrnis, ſecundum regulas probabilitatis nunc ſint exacte determinatae pro hypotheſi

theſi quod numeri n et r ita ſint magni, vt veluti pro infinitis haberi queant. Iſtaque omnia terminis finitis exprimuntur, quae antea non aliter quam per ſeries indefinitas determinari poterant. Notetur porro velim, omnia et ſingula ex principiis artis coniectandi communi analyſi fuiſſe deducta; etenim quae §. 13. dicta ſunt non tam ob rem ipſam, quam in gratiam calculi commodioris maiorisque concinnitatis expoſui, tum etiam vt notabili oſtenderem exemplo inſignem conſenſum inter methodos communes et nouam methodum, quem iam paſſim pro huiuscemodi quaeſtionibus adhibui ſolis calculis infiniteſimalibus vſus: fateor equidem et nouam iſtam methodum ſuas habere ſpinas tricasque; at, ni fallor, tanto melius ſcopo noſtro reſpondebit ſuaque praeſtantia ſimul ac nouitate erit commendabilis. Caeterum ipſa iſta methodus requirit vt numeri n et r permagni ſint, quod idem in poſtremis tribus paragraphis vsque ſuppoſuimus.

§. 15. Sit itaque, retentis denominationibus caeteris, numerus ſchedularum albarum in vrna prima $= x$ et in vrna ſecunda $= y$; ſic erit numerus iſte pro vrna tertia $= n - x - y$; ſi nunc quantitates x, y, et r tanquam fluentes conſideremus, erit $dx = \frac{-x}{n} dr + \frac{n - x - y}{n} dr$, vbi prius membrum debetur extractioni ex vrna prima, alterum transportationi ex vrna tertia in primam; vnde $dr = \frac{n\,dx}{n - 2x - y}$; ſimiliter erit $dy = -\frac{y\,dr}{n} + \frac{x\,dr}{n}$ vel

$dr = \frac{n\,dy}{x-y}$, vnde $\frac{dx}{n-2x-y} = \frac{dy}{x-y}$ vel $x\,dx - y\,dx = n\,dy - 2\,x\,dy - y\,dy$: haec aequatio paullo fiet ſimplicior ſi ponatur $x = \frac{1}{3}n + p$ et $y = \frac{1}{3}n - q$, ſic enim fit $2pdq - qdq = pdp + qdp$. Haec aequatio ob permixtionem indeterminatarum, cum nondum integrari poſſit, ponam $q = tp$ atque $dq = tdp + pdt$; ſic fiet, ſi calculus recte ponatur $\frac{dp}{p} = \frac{t-2}{t-tt-1}\,dt$, quae poſterior aequatio ita eſt integranda, vt ab initio ſit $x = n$ et $y = 0$, vel vt ſit $p = \frac{2}{3}n$ et $t = \frac{1}{2}$; integrata autem aequatione habebitur relatio inter p et t, indeque deducetur relatio inter x et y ita vt y per x determinari queat, quo demum facto recurrendum erit ad aequationem elementarem $dr = \frac{n\,dy}{x-y}$ eiusque integratio tentanda, vt ſic habeatur relatio inter r et x. At vero iſta methodus, quae prima ſe offert, ſit nimium complexa atque plane inutilis; igitur aliam viam inire coactus rem ita ſum aggreſſus.

Supra obtinuimus $\frac{dp}{p} = \frac{t-2}{t-tt-1}\,dt$ vna cum hac altera aequatione $\frac{dr}{n} = \frac{dy}{x-y}$, quae factis congruenter ſubſtitutionibus, quas aſſumſimus, dat $\frac{dr}{n} = \frac{dt}{t-tt-1}$: vtraque aequatio iam integrari poteſt atque ſic determinari valor quantitatis p aeque ac valor quantitatis t per functiones quantitatis r; totum negotium commodiſſime ſic abſoluetur.

Pona-

Ponatur $t = s + \frac{1}{2}$ tuncque obtinebitur $\frac{dp}{p} = \frac{\frac{3}{2} ds}{ss + \frac{3}{4}}$ $- \frac{s ds}{ss + \frac{3}{4}}$ ſimulque $\frac{dr}{n} = \frac{-ds}{ss + \frac{3}{4}}$; Hinc $\frac{dp}{p} = - \frac{3 dr}{2n}$ $- \frac{s ds}{ss + \frac{3}{4}}$, cuius integralis eſt log. $\frac{p}{\frac{2}{3} n} = - \frac{3r}{2n} - \frac{1}{2}$ log. $\frac{ss + \frac{3}{4}}{\frac{3}{4}}$ vel

$$p = \frac{2 n c^{\frac{-3r}{2n}}}{3 \sqrt{(1 + \frac{4}{3} ss)}}.$$

Porro aequatio $\frac{dr}{n} = \frac{-ds}{ss + \frac{3}{4}}$ dat $\frac{r}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ arc. tang. $\frac{-2s}{\sqrt{3}}$ ſiue $\frac{r}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ arc. ſecant. $\sqrt{1 + \frac{4}{3} ss}$, quae ſi invertatur, dat $\sqrt{(1 + \frac{4}{3} ss)} =$ ſecant. arc. $\frac{r \sqrt{3}}{2n}$: ſubſtituatur iſte valor atque ſic habebitur

$$p = \frac{2 n c^{\frac{-3r}{2n}}}{3 \text{ ſecant. arc. } \frac{r \sqrt{3}}{2n}} \text{ ſiue } p = \frac{2 n \text{ coſ. arc. } \frac{r \sqrt{3}}{2n}}{3 c^{\frac{3r}{2n}}}.$$

Cum vero fuerit $\frac{r}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ arc. tang. $- \frac{2s}{\sqrt{3}}$, erit $- \frac{2s}{\sqrt{3}}$ $=$ tang. arc. $\frac{r \sqrt{3}}{2n}$ ſiue $s = t - \frac{1}{2} = - \frac{\sqrt{3}}{2}$ tang. arc $\frac{r \sqrt{3}}{2n}$, vnde $t = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ tang. arc. $\frac{r \sqrt{3}}{2n}$ ſiue $t = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3} \times \text{ſin.} \frac{r \sqrt{3}}{2n}}{2 \text{ coſ.} \frac{r \sqrt{3}}{2n}}$.

Quia denique poſuimus ſupra $x = \frac{1}{3}n + p$ et $y = \frac{1}{3}n - q = \frac{1}{3}n - tp$, oportebit valores inuentos quantitatum p et t ſubſtituere, ſicque inueniemus numeros quaeſitos x et y, qui denotant numeros ſchedularum albarum in vrna prima atque ſecunda contentarum, qui ambo ſi a numero n ſubtrahantur habebitur numerus ſchedularum albarum in vrna tertia. His omnibus ita factis, obtinemus numerum ſchedularum albarum

In vrna prima $= \frac{1}{3}n + \frac{2}{3}n.c^{\frac{-3r}{2n}}$. Coſ. arc. $\frac{r\sqrt{3}}{2n}$.

In vrna ſecunda $= \frac{1}{3}n + \frac{n}{\sqrt{3}}.c^{\frac{-3r}{2n}}$. Sin. arc. $\frac{r\sqrt{3}}{2n} - \frac{n}{3}.c^{\frac{-3r}{2n}}$. Coſ. arc. $\frac{r\sqrt{3}}{2n}$

In vrna tertia $= \frac{1}{3}n - \frac{n}{\sqrt{3}}.c^{\frac{-3r}{2n}}$. Sin. arc. $\frac{r\sqrt{3}}{2n} - \frac{n}{3}.c^{\frac{-3r}{2n}}$. Coſ. arc. $\frac{r\sqrt{3}}{2n}$.

Atque iſtae formulae plane ſunt eaedem cum iis quas §. 14. expoſuimus, nec id tantum valore ſuo ſed et ipſa expreſſione; notabilis mihi viſus eſt conſenſus nouam inter methodum meam alteramque principiis familiaribus ſuperinſtructam.

§. 16. Paucula ſuperaddam de argumenti proprietatibus; et primo quidem ſtatim apparet totum ſyſtema vergere in ſtatum permanentem eumque aſymſptoton, quem demum poſt permutationes numero infinitas attingat; tum vero ſchedulae omnes ſingulis in vrnis aequis partibus ſunt permixtae; nec

nec id prouidere difficile erat; verum modus quo continue fit ad ſtatum permanentem acceſſus, mihi plane fuit improuiſus; ſcilicet ſuſpicabar fore vt numerus ſchedularum albarum in vrna prima indeſinenter decreſceret, in ſecunda et tertia viciſſim increſceret; nunc autem video infinitas fieri in quauis vrna vltra citraque ſtatum, qui permanens erit, tranſitiones variationesque motu vndulatorio continuo decreſcente, diminui tandemque euaneſcere. Notari autem merentur formulae analyticae, quibus huiuscemodi acceſſus receſſusque eorundemque perpetuae diminutiones indicantur: acceſſus receſſusque naturam ſequuntur ſinuum atque coſinuum eorumque diminutiones debentur communi factori exponentiali $c^{-\frac{3r}{2n}}$. Huiusmodi autem expreſſiones in variis quaeſtionibus phyſico-mechanicis, vel ſaltem ſimiles, aliquoties me obtinuiſſe memini. Inquiramus nunc in Caſus praecipuos.

§. 17. Conſiderabimus primo omnes illos Caſus quibus Coſ. arc. $\frac{r\sqrt{3}}{2n} = 0$, id eſt, quibus $\frac{r\sqrt{3}}{2n}$ eſt vel aequalis quadranti circuli, cuius radius vnitas eſt, vel triplo aut quintuplo aut ſeptuplo etc. quadranti. Sit ſcilicet quadrans iſtius circuli $= q$ faciamusque $\frac{r\sqrt{3}}{2n} = q$ vel $= 3q$ vel $= 5q$ vel $= 7q$ etc. adeoque ſucceſſiue $\frac{r}{n} = \frac{2q}{\sqrt{3}}$ ſiue $= \frac{6q}{\sqrt{3}}$ ſiue $= \frac{10q}{\sqrt{3}}$ ſiue $\frac{14q}{\sqrt{3}}$ etc. In omnibus iſtis caſibus, numero infinitis, fit Coſ. arc. $\frac{r\sqrt{3}}{2n} = 0$ et Sin. Arc. $\frac{r\sqrt{3}}{2n} = 1$

 adeo-

adeoque numerus ſchedularum albarum in prima vrna $= \frac{1}{3}n$; verum in vrna ſecunda erit numerus iſte ſucceſſiue $= \frac{1}{3}n + \frac{n}{\sqrt{3}} c^{-q\sqrt{3}}$ vel $\frac{1}{3}n + \frac{n}{\sqrt{3}} c^{-3q\sqrt{3}}$ vel $\frac{1}{3}n + \frac{n}{\sqrt{3}} c^{-5q\sqrt{3}}$ vel $\frac{1}{3}n + \frac{n}{\sqrt{3}} c^{-7q\sqrt{3}}$ etc. Denique ſi omnes iſtas quantitates exponentiales accipiamus negatiue habebimus ſucceſſiue numeros ſchedularum albarum in vrna tertia. Sit, verbi gratia, $n = 3000$ ponamusque $q = \frac{11}{7}$ et $c = 2,718$, erit poſt primas 5443 permutationes numerus ſchedularum albarum in vrna prima $= 1000$, in vrna ſecunda $= 1146$ et in vrna tertia $= 854$: tum ſi 10886 nouae ſuperueniant permutationes, conſimiles numeri fient 1000, 1001, et 999. Igitur iam omnia ad ſtatum permanentem erunt proxime reducta. Exinde apparet, qui fiat vt ſtatus permanens non ſit, etiamſi numerus ſchedularum albarum in vrna prima fuerit ad trientem reductus; etenim cum prima vice id euenit, erit numerus ſchedularum nigrarum in eadem vrna prima $= 854$ et numerus ſchedularum rubrarum $= 1146$, igitur ſtatus permanens eſſe nequit.

§. 18. Quod ſi nunc ſcire cupiamus numerum permutationum r, poſt quem numerus ſchedularum albarum prima vice in ſecunda vrna fuerit ad trientem reductus, oportebit ambos terminos $\frac{n}{\sqrt{3}} . c^{\frac{-3r}{2n}}$. Sin. arc. $\frac{r\sqrt{3}}{2n} - \frac{n}{3} . c^{\frac{-3r}{2n}}$. Coſ. arc. $\frac{r\sqrt{3}}{2n}$ facere $= 0$, haec autem

autem conditio obtinetur cum ſit arc. $\frac{r\sqrt{3}}{2n} = \frac{1}{3}q$ ſiue $\frac{r}{n} = \frac{2q}{3\sqrt{3}}$, qui numerus tertiam tantum partem efficit eius qui pro vrna prima requirebatur; eſt enim inter 1814 et 1815. Simili modo haec quaeſtio determinatur pro tertia vrna, vbi nunc erit $\frac{r}{n} = \frac{10q}{3\sqrt{3}}$ ſiue quinquies maior quam pro vrna ſecunda adeoque $r =$ proxime 9072.

Quoties autem numerus ſchedularum albarum ſit $= \frac{1}{3}n$, in quacunque vrna id contingat, tum ab iſto valore iterum recedit modo in vnam modo in alteram partem poſtmodumque iterum accedit hique receſſus alicubi maximi fiunt pro quauis periodo; poſt primam tamen periodum tantum non toti euaneſcunt.

§. 19. Denique inquiramus, quisnam futurus ſit ſecundum leges probabilitatum, pro quauis vrna minimus maximusue ſchedularum cuiusuis coloris numerus, qui vnquam praeſumi debeat et quotnam permutationes requirantur vt eo perueniatur. Incipiam a ſchedulis albis in vrna prima duo autem ſunt modi, quibus maxima iſta vel minima definiri poſſunt; alter in hoc poſitus eſt, vt differentiale numeri ſchedularum fiat $= 0$, alter vt numerus iſte in vrna prima fiat aequalis numero in vrna tertia, tunc enim extractio ex vrna prima fit aequalis transpoſitioni ex vrna tertia in primam vterque modus eodem recidit, quod ipſum formulas noſtras tanto magis confirmat. Sic intelligimus

fore

fore Coſ. arc. $\frac{r\sqrt{3}}{2n} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ Sin. arc. $\frac{r\sqrt{3}}{2n}$ vel tang. arc. $\frac{r\sqrt{3}}{2n} = -\sqrt{3}$; quoties huic ſatisfit conditioni, ſatisfieri autem poteſt modis infinitis, obtinetur minimum aliquod maximumue, primum autem erit inter minima minimum At tangens $-\sqrt{3}$ indicat arcum 120°, eſt igitur $\frac{r\sqrt{3}}{2n} = \frac{4}{8} q$ ſiue $\frac{r}{n} = \frac{8}{3\sqrt{3}} q$, hinc $r = 7257$; ergo poſt 7257 permutationes numerus ſchedularum albarum in vrna prima fit, quantum vnquam fieri poteſt, minimus deſcenditque a numero initiali 3000 ad 953, tumque iterum increſcit ſed parum vltra 1000 rurſusque decreſcit ſed vix infra 1000 deſcendit: quoniam autem in his caſibus numeri ſchedularum albarum in vrna prima et tertia iidem ſunt, habebimus pariter poſt 7257 permutationes in vrna tertia 953 ſchedulas albas adeoque in vrna ſecunda 1094. Sic poſt easdem 7257 permutationes erunt in vrna ſecunda 953 ſchedulae nigrae, in tertia 1094 et in prima rurſus 953; denique erunt ſimul in vrna tertia 953 ſchedulae rubrae, in prima 1094 et in ſecunda 953; hoc modo ſingulae ſchedulae pro quavis vrna determinantur pro caſu quo ſchedulae albae in vrna prima ad minimum fuerint reductae numerum.

§. 20. Sed et porro calculo noſtro ſubiiciamus, ad quem numerum maximum aſſurgere poſſint ſchedulae albae in vrna ſecunda atque tertia et quot permutationes requirantur vt id eueniat. Patet

tet autem pro vrna ſecunda ſatisfaciendum eſſe huic aequationi Coſ. arc. $\frac{r\sqrt{3}}{2n} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ Sin. arc. $\frac{r\sqrt{3}}{2n}$, ſiue tang. arc. $\frac{r\sqrt{3}}{2n} = \sqrt{3}$; hinc $\frac{r\sqrt{3}}{2n} = \frac{2}{3}q$ aut $\frac{r}{n} = \frac{4q}{3\sqrt{3}} = 1,210$; hinc $r = 3630$ tuncque fit numerus ſchedularum albarum in vrna ſecunda $= 1163$, qui proin numerus maximus eſt, ad quem ſchedulae albae in vrna ſecunda aſſurgere poſſunt idque obtinetur poſt 3630 permutationes eoque tempore vrna prima pariter continebit 1163 ſchedulas albas, tertia vero vrna nonniſi 674. Denique numerus ſchedularum albarum maximus fit in vrna tertia, quando ponitur $\frac{r\sqrt{3}}{2n} = 2q$ ſiue $r = 10890$ atque tunc numerus iſte fit 1004 qui ſimul valet pro vrna ſecunda.

Quae momenta praecipua pro ſchedulis albis allata ſunt, haec ſola transpoſitione vrnarum ad ſchedulas nigras rubrasque applicari poterunt. Tenue erat per ſe argumentum variis tamen, ni fallor, titulis vtile, potiſſimum autem ſcopo quem habui, accommodum.

MENSVRA SORTIS

AD FORTVITAM SVCCESSIONEM RERVM NATVRALITER CONTINGENTIVM APPLICATA.

Auctore

DANIELE BERNOVLLI.

§. I.

Quicunque varias attentius examinauerit tabulas anthropologicas immenſo labore congeſtas, facile, ex magno obſeruationum numero, plures perſpexerit naturae leges nec praeuiſas nec exſpectatas: idemque dixerim de innumeris rebus aliis, ſi modo pari induſtria exploratae ſimulque pro diuerſo rerum circumſtantium aſpectu ordinatae fuerint. Duo ſunt, quae in huiusmodi disquiſitionibus notanda veniunt: ſcilicet euentus fortuiti, quos ſorti adſcribimus, et leges ipſi ſorti praeſcriptae ex magno euentuum numero diiudicandae; innumera cum ſint argumenta, quae huc pertinent vnicum allegabo exemplum atque id ipſum ſeligam quod iſtis anſam dedit obſeruatiunculis. Cum varias iterum inſpicerem tabulas anthropologicas argumento inſtiti quod de proportione agit, qua nati in vtrumque diuiduntur ſexum, prolem autem maſculam praeualere

nunc

nunc vno ore fatentur omnes; id phaenomeni vel mera contigit ſorte quamuis ſua natura aeque ad vtrumque ſexum procliui vel aliqua erit in ipſa ſorte modificatio, qua procliuior redditur ad ſexum maſculinum quam ad alterum, plane vt ſors in proiectione duarum alearum poſita procliuior dicitur ad numerum ſeptenarium quam ad ſenarium; iſtam vero ambiguitatem longe melius explicabit, qui gradum probabilitatis pro quouis euentu prius determinauerit; hunc vt in me ſuſciperem laborem, non haeſitaui; vtramque disquiram hypotheſin ſi Deus vitam ac vires conceſſerit numerosque emergentes ad tabulas quae proſtant applicabo. In praeſentia rerum primam percurram hypotheſin, qua natura ad vtriusque ſexus formationem aeque facilis atque prona ſupponitur.

§. 2. Fuerit numerus partuum annuorum $= 2N$, quem ſic parem facio vt idem eſſe poſſit numerus de vtroque ſexu: quaeritur quanta ſit probabilitas, vt numerus puerorum datum ſeu praeſcriptum obtineat valorem; ſit numerus iſte $= m$; indicatur autem probabilitas alicuius rei fractione cuius numerator eam habeat rationem ad denominatorem vt numerus caſuum fauorabilium ad numerum caſuum omnium, ſi aequali facilitate caſus ſinguli contingant; hoc ſenſu maxima, quae haberi poteſt, probabilitas vnitate exprimitur eaque res certas, quae non poſſunt non contingere, indicat.

 Facile

Facile autem ex theoria combinationum colligitur, ſore quaeſitam probabilitatem =

$$\frac{2N.(2N-1).(2N-2)\ldots\ldots(2N-m+3).(2N-m+2).(2N-m+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots(m-2).(m-1).m}\times\frac{1}{2^{2N}}$$

vbi tam in numeratore quam denominatore fractionis indefinitae tot ſunt factores accipiendi quot ſunt vnitates in *m*. Si vero proponatur caſus $m = 0$, quo ſcilicet ſinguli partus puellam dediſſe ſinguntur, per ſe liquet ſore tunc probabilitatem $= \frac{1}{2^{2N}}$ atque adeo longe minimam ſi vel mediocris fuerit annuus partuum numerus. Creſcente numero *m* increſcit probabilitas atque maxima fit in medio, vbi ſupponitur $m = N$ idemque adeo infantum vtriusque ſexus numerus eſt; vltra medium probabilitas decreſcit ſic vt pro aequalibus a medio diſtantiis aequalis ſit probabilitas, quod notum eſt ex natura vnciarum in binomio ad potentiam 2 N eleuato, quas ipſa noſtra formula paragraphi ſecundi ſiſtit ſucceſſiue ſi numerus *m* inſtar numerorum naturalium progrediatur.

§. 3. De caſu, cuius modo mentionem ſecimus, aequalitatis inter vtrumque ſexum plura occurrunt notanda: faciamus igitur pro iſto caſu $m = N$ atque ſic formula noſtra generalis in praecedente paragrapho expoſita talis erit

$$\frac{2N.(2N-1).(2N-2)\ldots\ldots(N+3).(N+2).(N+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots(N-2).(N-1).(N)}\times\frac{1}{2^{2N}}.$$

Sic

Sic igitur pro paucioribus partubus maxima iſta probabilitas facile determinatur; quo maior autem eorum eſt numerus tanto difficilius atque rarius continget vt ſexu ſuo in duas diuidantur claſſes praeciſe aequales; verumtamen probabilitas applicata ad numerum partuum creſcit creſcente numero N, quod deinde demonſtrabimus: hinc fiet vt inaequalitas inter vtrumque ſexum, diuiſa per numerum partuum, probabiliter decreſcat, quod pariter dicendum eſt de omnibus obſeruationibus, cuiuscunque ſint generis, incerto paſſu procedentibus: omnes in hoc conueniunt Authores; minorem praeſumendam eſſe aberrationem ex pluribus inſtitutis obſeruationibus quam ex paucioribus: at normam, ſecundum quam iſtae aberrationes, caeteris paribus diminuantur a repetitis obſeruationibus, nemo adhuc quod ſciam docuit; hanc inferius tradam.

§. 4. Formula, quam in praecedente paragrapho expoſui, indefinita hoc laborat ineuitabili incommodo vt laborem requirat inſuperabilem, ſi magnus fuerit partuum numerus (aſcendit autem Pariſiis atque Londini propemodum ad viginti millia) etiamſi tabulae logarithmorum in auxilium vocentur; at de huiusmodi exemplis plerumque ſermo eſt eorumque potiſſimum curioſus ſimulque enormitate calculi abſterritus viam quaeſiui compendiariam, quam paullo curatius deſcribam, quoniam in plurimis aliis argumentis conducibilis eſt.

Primum expreſſionem analyticam atque indefinitam paragraphi praecedentis in aliam tranſtuli formam concinniorem ſimulque inſtituto noſtro magis accommodam, nempe hanc

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8} \ldots\ldots \frac{2N-5}{2N-4} \times \frac{2N-3}{2N-2} \times \frac{2N-1}{2N}.$$

vbi tot ſunt ordine ſuo factores accipiendi quot ſunt vnitates in N, id eſt, in numero partuum dimidiato. Praemiſſa hac transformatione rem porro ita ſum aggreſſus.

§. 5. Ponatur, pro numero factorum N, productum ex omnibus factoribus $= q$ poſteaque nouum ſuperuenire putemus factorem, ponendo ſcilicet $N + 1$ loco numeri N; ſic fiet nouum productum pro $(N + 1)$ factoribus $= \frac{2N+1}{2N+2} q = q - \frac{q}{2N+2}$; Quoties igitur numerus N vnitate augetur, toties productum q diminuitur quantitate $\frac{q}{2N+2}$: iſtud vero decrementum valde paruum eſt, quando numerus N permagnus aſſumitur; hinc erit proxime $-dq : dN = \frac{q}{2N+2} : 1$; vnde oritur $-\frac{dq}{q} = \frac{dN}{2N+2}$: Et hac aequatione differentiali, poſtquam integrata fuerit vti licebit ad determinandum valorem q pro dato numero N, ſi modo aliquot factores initiales in formula praecedentis paragraphi fuerint actu inter ſe multiplicati; attamen, maioris accurationis cauſa lubet alteram, veluti ſecundi ordinis, ſuperaddere correctiunculam: igitur notetur valorem $\frac{dq}{q}$ deductum fuiſſe ex mutatione quae oritur ſi loco N

pona-

ponatur N + 1; potuiſſet autem pari iure ex mutatione deduci quae fit cum loco N ponitur N − 1 atque tunc obtinetur aequatio differentialis paululum diuerſa, nempe $\frac{-dq}{q} = \frac{dN}{2N-1}$: hinc recte concluditur, accuratiorem fore aequationem differentialem ſi denominator medius accipiatur inter 2 N + 2 et 2 N − 1 ſiue aequalis dimidiae ſummae eorum, id eſt, 2 N + ½: vtemur ergo aequatione differentiali accuratiori et ſupra expectationem ſatisfaciente

$$-\frac{dq}{q} = \frac{dN}{2N+\frac{1}{2}}.$$

Integratio iſtius aequationis ita eſt inſtituenda vt, mediante quantitate aliqua conſtante addenda, vnico ſatisfiat caſui; quo plures autem habuerit factores initiales, eo accuratior erit formula pro tot factoribus conſequentibus quot libuerit; ponamus igitur, quod poſito numero factorum initialium $= f$, productum emergens ſit $= A$; habebitur ab integratione praefatae formulae differentialis

$$\log\frac{A}{q} = \frac{1}{2}\log\frac{2N+\frac{1}{2}}{2f+\frac{1}{2}}, \text{ ſiue}$$

$$q = A\sqrt{\frac{4f+1}{4N+1}}.$$

§. 6. Praeſtantia praefatae methodi magis eluceſcet ſi exemplum aſſumatur cuius valor per ſe pateat.

pateat. Proponatur formula indefinita, praecedenti ſimillima, nempe

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \ldots\ldots\ldots \frac{N-2}{N-1} \times \frac{N-1}{N} \times \frac{N}{N+1}.$$

cuius valor manifeſto eſt $= \frac{1}{N+1}$: videamus autem quid noua methodus indicet; ſit rurſus productum ex omnibus factoribus $= q$; ſi vero nouus ſuperueniat factor, erit productum $\frac{N+1}{N+2} q = q - \frac{q}{N+2}$: vnde nunc oritur $-dq : dN = \frac{q}{N+2} : 1$ ſiue $-\frac{dq}{q} = \frac{dN}{N+2}$: Quod ſi e contrario vltimus factor reſecetur, fiet $-\frac{dq}{q} = \frac{dN}{N}$: ergo aſſumto rurſus denominatore medio, faciemus $-\frac{dq}{q} = \frac{dN}{N+1}$, cuius integralis, retenta ſignificatione literarum f et A antea adhibitarum, erit $\log. \frac{A}{q} = \log. \frac{N+1}{f+1}$ ſiue $q = \frac{f+1}{N+1} A$; at vero in iſto exemplo eſt $A = \frac{1}{f+1}$; eſt igitur ſimpliciter atque generaliter $q = \frac{1}{N+1}$, ſic vt methodus, in hoc quidem exemplo, exacte indicet quod res eſt. Plura alia hac de re adiici poſſent, ſi id inſtituti noſtri ratio permitteret.

§. 7. Quicunque ſimplicem aequationem in fine paragraphi quinti expoſitam ad exempla qualiacunque applicare volet, aberrationem certe vix ſenſibilem deprehendet. Quo maiorem autem factorum initialium numerum, indicatum per f, actu multiplicauerit atque numerum A determinauerit, eo accuratius quaeſitum productum q pro integro factorum numero N inueniet. Exemplum allegabo

ipſi

ipſi methodo quam maxime inimicum; ponam ſimpliciter $f = 2$; ſic erit $A = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ atque fiet $q = \frac{9}{8\sqrt{(N+1)}}$: ponatur porro ſimpliciter $N = b$ atque ſic erit $q = \frac{9}{40}$. Eſt autem verum productum $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8} \times \frac{9}{10} \times \frac{11}{12} = \frac{231}{1024}$, quod ab altero vix differt; at multo accuratius reſpondebit formula noſtra, ſi numero f maiori ſuperinſtruatur computus; ponam igitur $f = 12$ atque adeo $\sqrt{(4f+1)} = 7$; ſic fiet productum ex duodecim factoribus initialibus ſiue $A = \frac{676039}{4194304}$; vnde $A\sqrt{(4f+1)} = \frac{4732273}{4194304} = 1,12826$; adeoque pro aſſumto numero $f = 12$, prodit $q = \frac{1,12826}{\sqrt{(4N+1)}}$: atque iſto valore, qualiscunque fuerit numerus N, absque vllo plane ſenſibili errore vti licebit.

§. 8. Intelligitur ex formula generali §. 2. ſi maiusculus fuerit partuum annuorum numerus, probabilitatem fere nullam eſſe circa initium et finem atque maximam fieri circa medium etiamſi et tunc pro quouis caſu ſpeciali parua admodum ſit: Nunc autem porro intelligitur hanc eandem probabilitatem decreſcere creſcente numero partuum et ita quidem vt ſequatur quam proxime rationem inuerſam ſubduplicatam prolis genitae; theorema iſtud calculos, qui prima fronte inſuperabiles videbantur, inſigniter ſubleuat: computus enim vnius exempli protinus indicat caetera omnia: Velim notetur inſuper inquirendum fere vnice eſſe, quid ſorti tribui poſſit circa medium, vbi exigua eſt inter

vtrumque ſexum differentia, cum vix fieri poſſit vt inaequalitas certos transgrediatur limites, quod ipſa teſtatur experientia, ſi variationes, non inaequalitates, conſideremus. Haec cauſa eſt, quod conveniat potius argumentum proſequi a medio verſus extremitates quam viciſſim.

§. 9. Deſcendamus iam ad exemplum; permagnum ſupponam partuum numerum, qualis quotannis eſſe ſolet Pariſiis atque Londini; faciam $2N = 20000$ ſiue $N = 10000$: pro hoc exemplo quaeritur, in hypotheſi naturâm aequaliter in formationem vtriusque ſexus eſſe procliuem, quanta ſit probabilitas vt numerus puellorum ſit praeciſe $= 10000$. Nemo profecto computum conabitur ad ductum formulae paragrapho quarto expoſitae, multoque minus ad formulam paragraphi tertii recurret; verum ſi formula vtamur in fine paragraphi ſeptimi tradita, protinus inuenimus $q = 0{,}0056413$ ſiue $q = \frac{1}{177\frac{1}{4}}$. Tali probabilitate gaudet, cui aequa ſorte res fuerit cum 176 colluſoribus: paruula ſpes eſt, minorem tamen aeſtimabam ante inſtitutum calculum. Si vero in ciuitate mediocri foecunditas ponatur centies minor, erit per paragraphum praecedentem, pro ſimili euentu expectatio decies maior atque adeo proxime $= \frac{10}{177\frac{1}{4}}$. Haec de aequali editorum partuum in vtrumque ſexum diuiſione.

§. 10.

§. 10. Permanere nunc putetur valor litterae N et omnem variationem cadere in valorem litterae m ſiue in numerum puellorum in progeneratione annua comprehenſorum: animus ſcilicet eſt variationem probabilitatis inquirere, dum numerus m ſenſim ſenſimque, ſiue in vnam ſiue in alteram partem, recedit ab numero N. Igitur faciam ſucceſſiue $m = N \pm 1$; $m = N \pm 2$; $m = N \pm 3$ ..... $m = N \pm \mu$, vbi μ indicat numerum quo puelli a numero N diſtant ſiue in exceſſu ſiue in defectu, quia in vtramque partem probabilitas aequaliter decreſcit. Patet autem ex formulis §.§. 2 et 3 adhibitis, probabilitatem ſucceſſiue fore $\frac{N}{N+1} q$; $\frac{N \times (N-1)}{(N+1) \times (N+2)} q$; $\frac{N \times (N-1) \times (N-2)}{(N+1) \times (N+2) \times (N+3)} q$ etc. vnde formula generalis quae probabilitatem exprimit, qua numerus puellorum fiat $= N \pm \mu$, nunc talis erit

$$\frac{N}{N+1} \times \frac{N-1}{N+2} \times \frac{N-2}{N+3} \times \ldots\ldots \times \frac{N-\mu+1}{N+\mu} \times q.$$

Valor autem litterae q, qua formula haec multiplicata eſt, adhuc eſt (vi §. 7.) $= \frac{1,12826}{\sqrt{(+N+1)}}$.

§. 11. Ecce iam tabellam ad praeceptum praecedentis paragraphi conſtructam vbi rurſus ponitur $N = 10000$, in qua columna prima denotat valorem litterae μ, altera vero probabilitatem ipſi reſpondentem.

I.	II.	I.	II.
1.	0, 9999 q	26.	0, 9341 q
2.	0, 9996 q	27.	0, 9291 q
3.	0, 9991 q	28.	0, 9239 q
4.	0, 9984 q	29.	0, 9185 q
5.	0, 9975 q	30.	0, 9131 q
6.	0, 9964 q	31.	0, 9076 q
7.	0, 9951 q	32	0, 9019 q
8.	0, 9936 q	33.	0, 8961 q
9.	0, 9919 q	34.	0, 8902 q
10.	0, 9900 q	35.	0, 8842 q
11.	0, 9879 q	36.	0, 8780 q
12.	0, 9856 q	37.	0, 8716 q
13.	0, 9831 q	38.	0, 8651 q
14.	0, 9804 q	39.	0, 8585 q
15.	0, 9775 q	40.	0, 8517 q
16.	0, 9744 q	41.	0, 8449 q
17.	0, 9711 q	42.	0, 8379 q
18.	0, 9677 q	43.	0, 8308 q
19.	0, 9641 q	44.	0, 8236 q
20.	0, 9604 q	45.	0, 8163 q
21.	0, 9565 q	46.	0, 8089 q
22.	0, 9524 q	47.	0, 8014 q
23.	0, 9481 q	48.	0, 7938 q
24.	0, 9436 q	49.	0, 7861 q
25.	0, 9389 q	50.	0, 7783 q

§. 12. Appoſui primam hanc tabellae portiunculam eo fine vt inde quaeſtionis minime in-

vtilis,

vtilis, quam mente conceperam, ſolutionem deducere poſſem: quaeruntur ſcilicet ambo limites a medio aequidiſtantes hac lege, vt eadem ſit probabilitas, numerum puerorum hoſce limites eſſe transgreſſurum vel non transgreſſurum.

Solutio huius quaeſtionis requirit, vt indagetur quotnam termini tabellae ab initio verſus finem ſint addendi, vt duplum ſummae auctum quantitate q fiat $= \frac{1}{2}$: ſumma enim terminorum, vltra medium poſitorum, dat ſummam probabilitatum, vt numerus puerorum non tranſcendat limitem, eademque ſumma citra medium poſitorum exprimit ſummam probabilitatum vt numerus puellorum non deſcendat infra limitem oppoſitum, eapropter ſumma eſt duplicanda; denique huic duplae ſummae addenda eſt ipſa probabilitas q pro caſu $\mu = 0$ ſiue pro aequalitate inter vtrumque ſexum. Ad normam huius praecepti inuenitur diſtantia vtriusque limitis a medio ſiue $\mu = 47$ quam proxime: Etenim ſumma quadraginta ſeptem terminorum eſt $= 43,6406\,q$, eius duplum $= 87,2812\,q$ cui ſi ſuper addatur q oritur $88,2812\,q$: Inuenimus autem paragrapho nono $q = 0,0056413$, vnde tandem quantitas finalis prodit 0,4980, quae paullo minor eſt quam $\frac{1}{2}$: Quod ſi vero aſſumatur $\mu = 48$, tunc eadem quantitas finalis fit $= 0,5070$ atque adeo maior quam $\frac{1}{2}$ interpolatio dat proxime $\mu = 47\frac{1}{2}$: diſtantia autem mutua limitum erit $2\,\mu = 94\frac{1}{2}$. Igitur tandem inter 20000 partus annuos aeque probabile erit,

vt numerus maſculorum non euagetur extra limites 9953 et 10047 quam vt illos limites transgrediatur, ſi modo ſors vtrique ſexui aeque faveat. Poſterius tamen aliquantillum probabilius eſt ob fractiunculam neglectam.

§. 13. Simili modo problema noſtrum ſoluetur pro quocunque alio numero N; verum quis nouum pro quouis exemplo ferat laborem? Datur compendium operis; dico enim numeros quaeſitos μ quam proxime ſequi rationem ſubduplicatam datorum numerorum N, quod quidem ex praemiſſis, ſi attentius ſuerint examinata, facile colligitur, tantoque erit accuratius compendium quanto maior aſſumptus fuerit numerus partuum. Ponatur numerus partuum annuus in tota Gallia ſiue $2N = 600000$, adeoque $N = 300000$, qui numerus trigeſies maior eſt praecedente; dico fore nunc $\mu = 47\frac{1}{4} \times \sqrt{30} = 258,8$ atque $2\mu = 517,6$. Sic igitur in hypotheſi, quam commentamur, aequipollentiae ſortis pro vtroque ſexu, aequa erit certatio, ſiue contendas maius fore in Gallia ſexus diſcrimen, ſiue minus.

Quod ſi vero pro vrbe mediocriter copioſa ponatur numerus partuum annuorum $= 200$, id eſt, centies minor quam qui in paragrapho praecedente fuit aſſumptus, fiet numerus μ decies minor ſiue $= \frac{47\frac{1}{4}}{10} = 4,725$, nec ambo limites magis quam 9,45 a ſe inuicem diſtabunt. Hinc intelligimus, eſſe

eſſe paullo probabilius vt differentia inter vtrumque ſexum non excedat denarium quam vt excedat.

§. 14. Lubet nunc poſterius iſtud exemplum directe computare, vt veritas compendii in praecedente paragrapho adhibiti eluceſcat; hunc in finem aliam tabellae portiunculam apponam pro $N = 100$ ad ductum formulae indefinitae paragrapho decimo deſcriptae, in qua ſufficiet quinque conſideraſſe terminos pro numeris naturalibus 1, 2, 3, 4 et 5, his alio fine superaddam probabilitates pro numeris 10, 15, 20, 25, 30, 35, et 40: prima columna rurſus ordine ſuo ſingulos hos numeros indicat, dum ſecunda columna docet probabilitates reſpondentes: maximam vero probabilitatem pro caſu perfectae aequalitatis inter vtrumque ſexum, id eſt, pro $\mu = 0$, nunc indicabo per q'.

I.	II.	I.	II.
1.	0, 9901 q'	15.	0, 1057 q'
2.	0, 9610 q'	20.	0, 01819 q'
3.	0, 9143 q'	25.	0, 001864 q'
4	0, 8528 q'	30.	0, 0001124 q'
5.	0, 7797 q'	35.	0, 000003924 q'
10.	0, 3691 q'	40.	0, 00000007774 q'

Eſt autem propemodum $q' = \frac{10}{177}$ (§. 9.) vel accuratius $q' = \frac{1,12826}{\sqrt{401}} = 0,05634$ vi paragraphi ſeptimi atque hic valor in ſingulis numeris erit ſubſtituendus.

§. 15.

§. 15. Sumatur nunc ſumma quinque priorum terminorum et habebitur 4, 4979 q'; huius duplum $=$ 8, 9958 q', cui addatur q' atque ſic obtinebitur 9, 9958 q' vel 0, 5631 et haec quidem quantitas maior eſt quam $\frac{1}{2}$; at ſi ſumantur quatuor priores termini erit ſumma eorum $=$ 3, 7182 q'; huius duplum $=$ 7, 4364 q': ſi addatur q' habebitur nunc 8, 4364 q' vel 0, 4753 haec autem quantitas nunc minor eſt quam $\frac{1}{2}$; ergo regula noſtra compendiaria optime quadrat cum vero valore: ſic itaque pro ducentis natis ſi fiat certatio, num ſexus differentia maior futura ſit quam decem vel non, dico poſterius eſſe probabilius et aequam demum fore certationem, ſi 5631 offerantur contra 4369: imo poterit audacter ducenties millena millia contra unum offerre, ſi alteruter ſexus infra 60 deſcenderit.

§. 16. Quae dicta ſunt de quaeſtione paragraphi duodecimi, qua limites pro aequiprobabilitate, ſiue valores μ ad datum numerum N, determinandi erant, eius ſunt indolis vt conuerti poſſint hinc nouae quaeſtiones formantur, in quas analyſis dominetur: Sint, verbi gratia, duo Colluſores alea continuo inter ſe certantes, vter quouis iactu, prout alea ſiue numerum parem ſiue imparem attulerit, punctum vnum lucrifaciet, nec prius finita res ſit, quam cum alteruter alterum 94 punctis vicerit, quaeritur numerus iactuum poſt quem aeque

aeque probabile ſit, vt certatio finita ſit vel non finita: Solutionem indicat paragraphus duodecimus; erit nempe numerus iactuum $= 20000$ vel tantillo minor ob neglectam fractionem numero 94 adiiciendam. Si lucro 94 punctorum ſubſtituatur minus, veluti nouem aut decem punctorum, requirentur 200 iactus vi paragraphi decimi tertii, Nec video methodum magis directam, qua huiuscemodi quaeſtiones ſolutionem admittere poſſint.

§. 17. Paruula tabella paragraphi decimi quarti haud obſcure nobis indicat, qua lege probabilitates a medio verſus extrema decreſcant; praeſertim exinde apparet, omnem probabilitatem in mediocri diſtantia a medio tantum non totam euaneſcere etenim, ſi $\mu = 40$, fit probabilitas relatiua $= 0,000000007774\, q'$ et probabilitas abſoluta $= 0,000000004478$, quae ſi vel omnibus probabilitatibus pro terminis inſequentibus addatur absque omni ſcrupulo negligi poteſt.

Velim porro notetur harmonia, quae inter tabellas §.§. 11 et 14 intercedit, quandoquidem probabilitates in priori tabula pro numeris 10, 20, 30, 40 et 50 proxime iisdem coefficientibus numericis exprimuntur, qui in altera tabella pro numeris decies minoribus id eſt, pro numeris 1, 2, 3, 4 et 5, quod quidem haud difficulter ex theoria noſtra prouideri poterat. Quia vero numeri columnae ſecundae in tabula paragraphi undecimi non

admodum mutantur, ſequitur inde fore etiam ſummam decies maiorem proxime, quandoquidem decies plures termini ſunt accipiendi et cum e contrario q' eſt propemodum decies maior quam q, ſequitur quod ſumma 10, 20, 30, 40 vel 50 terminorum ſit proxime aequalis in tabula §. 11. ſummae 1, 2, 3, 4 vel 5 terminorum in tabella §. 14. poſtquam nimirum valores pro q et q' ſubſtituti fuerint.

§. 18. Huiusmodi obſervationes egregie vſu venire poſſunt; Ita intelligimus eandem eſſe propemodum probabilitatem abſolutam, vt inter ducentos natos numerus puerorum non niſi ad 70 aſcendat, quae eſt inter 20000 natos, vt non niſi ad 9700 perueniat: vtraque probabilitas tam exigua eſt vt ſuperfluum ſit calculos vltra hos fines extendere, in priori caſu fit $\mu = 30$ in altero $\mu = 300$.

Vnicum eſt quod ſuperaddam; formulam nempe dabo non indefinitam ſed determinatam, quae non male admodum numeros vtriusque tabulae exprimit, ſi modo intra certos ſubſiſtamus limites; hanc formulam eodem fere modo inveni, quo vſus ſum in paragrapho quinto ad detegendum quam proxime valorem q, qui probabilitatem pro perfecta aequalitate inter vtrumque ſexum denotat. Sit generaliter dimidius omnium natorum numerus $= N$; ſitque rurſus numerus puerorum $= N \pm \mu$, dico fore propemodum probabilitatem huius caſus $= \frac{Q}{c^{\frac{\mu\mu}{N}}}$

modo

modo numerus μ non ſit multo maior quam $\sqrt{N}$: Eſt autem Q probabilitas pro caſu aequalitatis inter vtrumque ſexum et c eſt numerus cuius logarithmus hyperbolicus vnitas eſt, ſiue $c = 2,718$.

§. 19. Vt vim huius ſimpliciſſimae formulae, vnico termino expreſſae, dignoſcere liceat, recurram ad paruulam tabellam §. 14. in qua N = 100 et $q' = Q$, numerosque ſecundae columnae ad ductum iſtius formulae computabo: ſic aberrationes immediate innoteſcent.

I.	II.	I.	II.
1.	0, 9901 q'	10.	0, 3679 q'
2.	0, 9608 q'	15.	0, 1054 q'
3.	0, 9141 q'	20.	0, 01832 q'
4.	0, 8522 q'	25.	0, 001931 q'
5.	0, 7789 q'	30.	0, 0001235 q'

Ex collatione apparet aberrationes vix eſſe ſenſibiles et vbi paullo ſenſibiliores fieri incipiunt relatiue, ibi probabilitates abſolutas fere totas euaneſcere: Licebit vtique regula compendiaria vti quamdiu numerus μ non excedit numerum $3\sqrt{N}$.

Eadem librabimus lance formulam pro alio et quidem longe maiore valore literae N: Sit iterum N = 10000 vt diuerſos caſus conferre poſſimus cum tabula paragrapho undecimo exhibita et directe computata; ſic erit valor Q idem quod in tabula indicatur litera q; ponam autem pro μ ſucceſſiue

 nume-

numeros 10, 20, 30, 40, et 50: his poſitis inueniuntur probabilitates reſpondentes 0,9901 q; 0,9608 q; 0,9141 q; 0 8522 q et 0,7889 q: ipſa vero tabula paragraphi undecimi dat 0,9900 q; 0,9604 q; 0,9131 q; 0,8517 q; et 0,7783 q: qui profecto numeri tantum non ad amuſſim inter ſe conueniunt.

§. 20 Perſpecta praeſtantia regulae vnicum ſuperaddam exemplum, quo appareat quemadmodum vbique calculus inſtitui debeat pro numeris qualibuscunque.

In egregio opere viri de hiſce rebus longe meritiſſimi, *Ioh. Petri Süsmilch*, editione tertia parte ſecunda plures annexae ſunt tabulae, in quibus pag. 17. videmus, quod in Prouincia Selandica a. 1758 natae fuerint 3533 filiolae et 3805 puelli; vnde numerus natorum $= 2N = 7338$ atque $N = 3669$: quia vero numerus puellorum erat 3805, habebitur $\mu = 136$; hinc $\frac{\mu\,\mu}{N} = 5\,\frac{151}{3669} = 5,04$: ergo probabilitas, qua numerus puellorum ſit praeciſe $= 3805$, in hoc exemplo indicatur formula $\frac{Q}{c^{5,04}} = 0,0006628\,Q$, iſteque valor tanto accuratior eſt, quod numerus μ parum vltra numerum $2\sqrt{N}$ aſcendit igitur probabilitas pro caſu aequalitatis inter vtrumque ſexum eſt ad probabilitatem qua numerus puerorum iſtam aequalitatem praeciſe ſuperat numero 136 vt 10000000 ad 0,0006628; probabilitas vero abſoluta pro poſteriori caſu habetur ſi pro Q

vel

vel q valor paragrapho ſeptimo definitus ſubſtituatur nempe 0, 009313; hoc modo iſta probabilitas abſoluta fit = 0, 000006173; dico autem, quod in hoc parvulo valore incerti eſſe poteſt, id ſolum duas figuras numericas vltimas ſpectare. Sic igitur videmus poſſe pro omni caſu probabilitatem abſolutam determinari absque vt per caſus intermedios, procedamus atque hoc demum eſt quod potiſſimum intendebam, cum haſce diſquiſitiones ſuſciperem.

§. 21. Quae dicta ſunt adhucdum pure ſunt analytica, quandoquidem procreationi puellorum puellarumue ſubſtitui potuiſſet extractio ſchedularum ſiue nigrarum ſiue albarum ex vrna ſi modo ſchedula in vrnam reponatur priusquam noua fiat extractio; tum, ſi numero aequali ſchedulae de vtroque colore in vrnam repoſitae fuerint, habebimus, quod nobis res fuit; Quod ſi vero ſchedulas nigras numero praevalere ponamus, incidimus in alteram hypotheſin, qua ponitur naturam magis vergere ad ſexum formandum maſculinum quam muliebrem. Alterum iſtud argumentum, quod prius ceu ſimplicem in ſe continet caſum, non poteſt non nouos obiicere labores mihi nondum exploratos: quicquid id ſit negotii proximo ſuſcipiam otio.

CONSIDERATIONES
DE TRAIECTORIIS ORTHOGONALIBVS.

Auctore

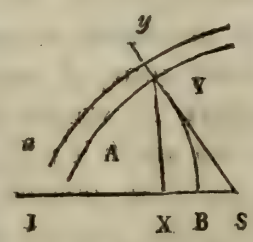
L. EVLERO.

I.

Problema traiectoriarum orthogonalium, quod olim Geometrarum ſagacitatem diu multumque exercuit, ita ſe habebat

vt propoſitis infinitis lineis AY, ay *communi quadam lege contentis, quaerantur aliae lineae* BYy *illas normaliter traiicientes*

ad quod ſoluendum ſequentia momenta perpendi oportet.



1°. Cum lineae ſecandae communi quadam aequatione contineantur, haec aequatio praeter binas coordinatas $IX = x$ et $XY = y$, parametrum inuoluet p, quae pro eadem curua AY eundem valorem retineat, valore autem mutato reliquas curuas exhibeat.

2°. Hinc iſta aequatio differentiata parametrum p quoque variabilem ſumendo huiusmodi formam induet $L dy = M dx + N dp$; vnde pro eadem curua AY,

AY, ob $dp = 0$, erit $\frac{dy}{dx} = \frac{M}{L}$; ideoque ducta ad eam recta normali YS fiet ſubnormalis $XS = \frac{My}{L}$.

3°. Verum haec eadem ſubnormalis XS pro curua ſecante BY debet eſſe ſubtangens, vnde retentis pro hac curua iisdem coordinatis $IX = x$, et $XY = y$, neceſſe eſt ſit eius ſubtangens $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{-My}{L}$ ideoque $L\,dx + M\,dy = 0$.

4°. Pro lineis ergo ſecandis propoſita aequatione inter coordinatas x, y et parametrum variabilem p, quae differentiata praebeat $L\,dy = M\,dx + N\,dp$, pro curuis ſecantibus haec habebitur aequatio differentialis $L\,dx + M\,dy = 0$.

II.

Totum ergo negotium huc eſt reductum, vt data huiusmodi aequatione differentiali $L\,dy = M\,dx + N\,dp$, methodus inueniatur hanc aequationem $L\,dx + M\,dy = 0$ integrandi, in quo quidem nulla foret difficultas ſi quantitates L et M ſolas binas coordinatas x et y implicarent excluſa parametro p, quia tum in ea duae tantum occurrent variabiles x et y, et huiusmodi aequationum integratio merito hic tanquam conceſſa ſpectatur. Verum ſi quantitates L et M inſuper parametrum p inuoluant, ita vt aequatio $L\,dx + M\,dy = 0$ tres contineat quantitates variabiles x, y et p, eius integrationem ne ſuſcipere quidem licet, niſi ſimul cum altera aequatione data $L\,dy = M\,dx + N\,dp$ coniungatur, indeque

deque vna trium variabilium penitus extrudatur, vt aequatio differentialis inter duas tantum variabiles obtineatur. Quod niſi efficere licuerit, vix quicquam circa naturam traiectoriarum orthogonalium definiri poterit, quare quoties haec difficultas occurrit, problema hoc merito inter difficillima refertur; tantumque abeſt vt hoc problema etiamſi olim ſummo ſtudio ſit tractatum, pro confecto ſit habendum, vt potius etiamnunc maxima attentione dignum ſit iudicandum.

III.

Cum igitur totum negotium eo redeat, vt pro traiectoriis eiusmodi aequatio differentialis eliciatur, quae duas tantum quantitates variabiles contineat, praecipuos percurramus caſus, quibus hunc ſcopum aſſequi licet.

1°. Ac primo quidem ſi aequatio pro curuis ſecandis ita exhiberi queat, vt parameter p per coordinatas x et y abſolute definiatur, ſeu functioni cuipiam ipſarum x et y aequetur, haec aequatio differentiata huiusmodi dabit formam $dp = P\,dx + Q\,dy$, in qua P et Q ſunt functiones ipſarum x et y tantum quae cum forma $L\,dy = M\,dx + N\,dp$ comparata praebet $L = Q$, $M = -P$ et $N = 1$. Quare pro traiectoriis haec habebitur aequatio: $Q\,dx - P\,dy = 0$ duas tantum variabiles x et y inuoluens, cuius adeo integratio pro conceſſa haberi poteſt.

2°.

2°. Si aequatio pro curuis ſecandis ita exhiberi queat, vt applicata y aequetur functioni cuipiam ipſarum x et p, ex eiusque differentiatione prodeat $dy = Pdx + Rdp$, ita vt P et R ſint functiones ipſarum x et p tantum, tum ob $L = 1$, $M = P$ et $N = R$, pro traiectoriis habebitur aequatio $dx + Pdy = 0$, quae ob $dy = Pdx + Rdp$ abit in hanc formam: $(1 + PP)dx + PRdp = 0$, duas tantum variabiles p et x implicantem.

3°. Si aequatio pro curuis ſecandis ita exhibeatur, vt abſciſſa x aequetur functioni cuipiam ipſarum y et p ex cuius differentiatione prodeat $dx = Qdy + Rdp$, vbi Q et R ſint functiones ipſarum y et p tantum tum ob $L = Q$, $M = 1$ et $N = -R$, natura traiectoriarum exprimetur hac aequatione $Qdx + dy = 0$, quae ob $dx = Qdy + Rdp$ transformatur in hanc $(1 + QQ)dy + QRdp = 0$ inter y et p tantum.

IV.

Quoties ergo vel parameter p per ambas coordinatas x et y vel altera coordinatarum per alteram et parametrum definitur, inuentio traiectoriarum ad aequationem eiusmodi differentialem reducitur in qua duae tantum inſunt quantitates variabiles, cuius propterea reſolutio tanquam conceſſa poterit ſpectari, etiamſi forte nulla etiamnum pateat via negotium expediendi. Hoc autem intelligendum eſt

ſi illae expreſſiones fuerint explicitae, ſiue ſint algebraicae ſiue tranſcendentes, ſin autem tantum per formulas integrales dentur, in quibus altera variabilium pro conſtante habeatur, tum aequationes inventae nullum praeſtant vſum, niſi forte peculiari artificio a formula integrali liberari queant. Veluti ſi pro curuis ſecandis huiusmodi habeatur aequatio $y = \int V\, dx$, vbi V ſit functio ipſarum x et p, in hac autem integratione parameter p vt conſtans ſpectetur: tum enim pro valore ipſius $dy = P\, dx + R dp$, habetur quidem $P = V$, ſed quantitas R noua forma integrali implicatur dum ſit $R = \int dx \left(\frac{dV}{dp} \right)$, in qua integratione iterum ſola x variabilis aſſumitur. Quare cum aequatio pro traiectoriis futura ſit $(1 + VV)\, dx + V\, dp \int dx \left(\frac{dV}{dp} \right) = 0$, ob hanc formulam integralem minime patet, quomodo eius reſolutionem inſtitui conueniat.

V.

Quo haec difficultas clarius appareat caſum ſingularem euoluam, quo aequationem pro traiectoriis exhibere licet et qui iam olim methodo perquam ingenioſa fuit erutus. Quaeritur ſcilicet, cuiusmodi functio ipſarum x et p debeat eſſe quantitas V, vt cum pro curuis ſecandis ſit $y = \int V\, dx$, aequatio pro traiectoriis $(1 + VV)\, dx + V\, dp \int dx \left(\frac{dV}{dp} \right) = 0$, per certam quantitatem multiplicata integrabilis euadat.

dat. Sit iſte multiplicator $\frac{\Pi}{V}$, exiſtente Π functione ipſius p tantum, vt habeatur.

$$\frac{\Pi dx(1+VV)}{V} + dp\int \Pi dx\left(\frac{dV}{dp}\right) = 0$$

quoniam enim Π quantitatem x non inuoluit, erit vtique

$$\Pi dp\int dx\left(\frac{dV}{dp}\right) = dp\int \Pi dx\left(\frac{dV}{dp}\right).$$

Iam ſtatuatur huius formae integrale $= \int \frac{\Pi dx(1+VV)}{V}$ vt pro traiectoriis habeatur haec aequatio.

$$\int \frac{\Pi dx(1+VV)}{V} = C$$

et cum eius differentiale ex variabilitate vtriusque x et p natum fiat:

$$\frac{\Pi dx(1+VV)}{V} + dp\int dx\left(\frac{1}{dp} d\frac{\Pi(1+VV)}{V}\right) = 0$$

Quare ſtatui oportet:

$$\int \Pi dx\left(\frac{dV}{dp}\right) = \int dx\left(\frac{1}{dp} d.\frac{\Pi(1+VV)}{V}\right)$$

ſeu $\Pi\left(\frac{dV}{dp}\right) = \left(\frac{1}{dp} d.\frac{\Pi(1+VV)}{V}\right)$. Cum nunc in his differentialibus ſola p vt variabilis, x vero vt conſtans ſpectetur facta euolutione prodit:

$$\Pi dV = \frac{\Pi dV(VV-1)}{VV} + \frac{d\Pi(1+VV)}{V} \text{ ſeu}$$

$$\frac{\Pi dV}{VV} = \frac{d\Pi(1+VV)}{V}, \text{ ideoque } \frac{d\Pi}{\Pi} = \frac{dV}{V(1+VV)} = \frac{dV}{V} - \frac{VdV}{1+VV}$$

vnde integrando elicitur $\Pi = \frac{VX}{\sqrt{(1+VV)}}$, loco conſtantis indroducta X functione ipſius x tantum. Hinc ergo fit $V = \frac{\Pi}{\sqrt{(XX-\Pi\Pi)}}$

VI.

En ergo caſum ſatis elegantem ſimulque non parum late patentem, quo traiectorias orthogonales exhibere licet etiamſi aequatio pro curuis ſecandis ſit $y = \int \frac{\Pi\, dx}{\sqrt{(XX - \Pi\Pi)}}$ vbi X denotat functionem quamcunque abſciſſae x, atque Π functionem parametri p quamcunque, ita vt forte haec formula integralis nullo modo euolutionem admittat. Pro traiectoriis enim, ob $1 + VV = \frac{XX}{XX - \Pi\Pi}$, habebitur iſta aequatio $\int \frac{XX\, dx}{\sqrt{(XX - \Pi\Pi)}} = C$. quae pro diuerſis valoribus conſtantis C infinitas praebet curuas, quae omnes normaliter curuas datas traiicient. Pro iis quidem aequatio inter coordinatas x et y eliceretur, ſi ope aequationis $y = \int \frac{\Pi\, dx}{\sqrt{(XX - \Pi\Pi)}}$, parameter p eiusue functio Π eliminari poſſet verum ad conſtructionem aequatio inuenta iam maxime eſt accommodata. Pro quauis enim parametro, ſeu quouis valore litterae Π ſuper axe deſcribatur curua, cuius applicata $= \frac{XX}{\sqrt{(XX - \Pi\Pi)}}$, in eaque abſcindatur area datae areae aequalis, cuius abciſſa ſi ſit $= x$, applicata traiectoriae erit $y = \int \frac{\Pi\, dx}{\sqrt{(XX - \Pi\Pi)}}$: vel ſufficit notaſſe has duas aequationes:

$$y = \int \frac{\Pi\, dx}{\sqrt{(XX - \Pi\Pi)}} \text{ et } C = \int \frac{XX\, dx}{\sqrt{(XX - \Pi\Pi)}}$$

vbi notetur C deſignare parametrum traiectoriarum.

VII.

VII.

Verum his quae iam olim copioſiſſime ſunt pertractata, diutius hic immorandum non cenſeo; ſed potius alias conſiderationes, ad quas me haec quaeſtio perduxit, in medium afferam. Ac primo quidem, quod per ſe eſt perſpicuum obſeruo lineas ſecandas et traiectorias inter ſe reciprocari; atque quaeſtionem circa duo eiusmodi ſyſtemata linearum verſari quae ad eundem axem deſcripta, ſe mutuo vbique ad angulos rectos interſecent. Vtriusque autem ſyſtematis natura exprimitur aequatione inter binas coordinatas x et y et parametrum, cuius variabilitas infinitas lineas ſuppeditat. Pro altero ergo ſyſtemate ſit parameter $=p$, pro altero vero $=q$; vnde duas concipi oportet aequationes, alteram inter x, y et p, alteram vero inter x, y et q; inter quas quaenam intercedere debeat relatio, vt propoſitae conditioni ſatisfiat, hic accuratius ſum inueſtigaturus. Supra autem vidimus, ſi pro altero ſyſtemate habeatur huiusmodi aequatio differentialis $Ldp+Mdx+Ndy=0$, tum naturam alterius hac aequatione $Ndx-Mdy=0$ expreſſum iri hicque eius parametrum q vt conſtantem ſpectari.

VIII.

Quia nunc aequatio $Ndx-Mdy=0$ duas tantum quantitates variabiles x et y continere intelligitur, et huius ſyſtematis parameter q in conſtante per integrationem accedente demum inuolui-

 tur,

tur, aequatio differentialis pro altero ſyſtemate, etiam parametrum q pro variabili habendo, ita erit comparata: $K\,dq + N\,dx - M\,dy = 0$. Hincque novimus aequationes differentiales pro vtroque linearum ſyſtemate ita inter ſe eſſe connexas, vt ſint:

$$L\,dp + M\,dx + N\,dy = 0 \text{ et } K\,dq + N\,dx - M\,dy = 0.$$

Si in illa p in hac vero q per x et y detur, et vtraque aequatio ad integrabilitatem perducatur, formae prodibunt huiusmodi:

$$dp = M(P\,dx + Q\,dy) \text{ et } dq = N(Q\,dx - P\,dy)$$

vbi P et Q denotant functiones ipſarum x et y quascunque, M vero et N eiusmodi multiplicatores, qui illas formulas differentiales $P\,dx + Q\,dy$ et $Q\,dx - P\,dy$ integrabiles reddant. Quod cum ſemper fieri poſſit, hinc facile infinita huiusmodi ſyſtematum paria exhiberi poſſunt: veluti ſi ſit $P = X$ functioni ipſius x et $Q = Y$ functioni ipſius y noſtrae aequationes integratae ita ſe habebunt:

$$p = \int X\,dx + \int Y\,dy \quad \text{et} \quad q = \int \frac{dx}{X} - \int \frac{dy}{Y}.$$

IX.

Definiamus quoque ambas coordinatas per parametros p et q, et aequationes noſtrae ita fient comparatae

$$dx + \frac{LM\,dp + KN\,dq}{MM + NN} = 0 \text{ et}$$

$$dy + \frac{LN\,dp - KM\,dq}{MM + NN} = 0$$

quae

quae ad has formas concinniores reuocantur:

$$dx = PRdp + QSdq \quad \text{et} \quad dy = PSdp - QRdq$$

atque hic iam P, Q, R et S denotant functiones ipſarum p et q eiusmodi, vt ambae formulae integrabiles euadant. Cum igitur x et y ſint functiones ipſarum p et q erit

$$PR = \left(\frac{dx}{dp}\right); \; QS = \left(\frac{dx}{dq}\right); \; PS = \left(\frac{dy}{dp}\right); \; QR = -\left(\frac{dy}{dq}\right)$$

hinc colligitur iſta inſignis proprietas vt ſit

$$\left(\frac{dx}{dp}\right)\left(\frac{dx}{dq}\right) + \left(\frac{dy}{dp}\right)\left(\frac{dy}{dq}\right) = 0$$

indeque porro haec quaeſtio maximi momenti, quomodo ſi pro altera coordinatarum x et y detur functio ipſarum p et q ipſi aequalis, inde functio ipſarum p et q alteri aequalis erui debeat: quae quaeſtio ad eam calculi integralis partem eſt referenda, quam demum excoli conuenit.

X.

Cum ſolutio huius aequationis admodum ardua videatur, operae erit pretium binas aequationes modo inuentas.

$$dx = PRdp + QSdq \quad \text{et} \quad dy = PSdp - QRdq$$

alia methodo reſoluere. Imaginaria ſcilicet haud reformidantes inde colligimus:

$$dx + dy\sqrt{-1} = (R + S\sqrt{-1})(Pdp - Qdq\sqrt{-1})$$

ſimili autem modo ſit neceſſe eſt:

$$dx - dy\sqrt{-1} = (R - S\sqrt{-1})(Pdp + Qdq\sqrt{-1}).$$

Iam

Iam quaecunque fuerint P et Q functiones ipſarum p et q multiplicator ſemper inueniri poterit hanc formulam ambiguam $P\,dp \mp Q\,dq\sqrt{-1}$ integrabilem reddens: ſit ergo M iſte multiplicator et ponatur $\int M(P\,dp \mp Q\,dq\sqrt{-1}) = T \pm V\sqrt{-1}$; atque pro $R \pm S\sqrt{-1}$ aſſumi oportet functionem quamcunque ipſius $T \pm V\sqrt{-1}$ in M ductam, vnde facta integratione prodibit

$$x + y\sqrt{-1} = \text{funct.}\,(T + V\sqrt{-1}) \text{ et } x - y\sqrt{-1} = \text{funct.}\,(T - V\sqrt{-1})$$

hincque colligimus has formas integrales:

$$x = \tfrac{1}{2}\Gamma:(T+V\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2}\Gamma:(T-V\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Delta:(T+V\sqrt{-1}) - \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Delta:(T-V\sqrt{-1})$$

$$y = \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma:(T+V\sqrt{-1}) - \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma:(T-V\sqrt{-1}) - \tfrac{1}{2}\Delta:(T+V\sqrt{-1}) - \tfrac{1}{2}\Delta:(T-V\sqrt{-1})$$

quae ſemper ad realitatem reuocantur, quaecunque functiones his ſignis Γ et Δ denotentur.

XI.

Hic quidem litterae T et V denotant functiones binarum parametrorum p et q ſed minime arbitrarias, definiuntur enim ex formula differentiali $P\,dp \mp Q\,dq\sqrt{-1}$, vbi P et Q neceſſario ſunt quantitates reales. Verumtamen ſine hac conditione indoles illarum quantitatum T et V erui poteſt, conſiderando quod eſſe debeat $\left(\frac{dx}{dp}\right)\left(\frac{dx}{dq}\right) + \left(\frac{dy}{dp}\right)\left(\frac{dy}{dq}\right) = 0$.

Cum

Cum enim inuenerimus:

$x+y\sqrt{-1}=\Sigma:(T+V\sqrt{-1})$, et $x-y\sqrt{-1}=\Theta:(T-V\sqrt{-1})$

erit differentiando:

$$\text{I. } \left(\tfrac{dx}{dp}\right)+\left(\tfrac{dy}{dp}\right)\sqrt{-1}=\left(\left(\tfrac{dT}{dp}\right)+\left(\tfrac{dV}{dp}\right)\sqrt{-1}\right)\Sigma':(T+V\sqrt{-1})$$

$$\text{II. } \left(\tfrac{dx}{dq}\right)+\left(\tfrac{dy}{dq}\right)\sqrt{-1}=\left(\left(\tfrac{dT}{dq}\right)+\left(\tfrac{dV}{dq}\right)\sqrt{-1}\right)\Sigma':(T+V\sqrt{-1})$$

$$\text{III. } \left(\tfrac{dx}{dp}\right)-\left(\tfrac{dy}{dp}\right)\sqrt{-1}=\left(\left(\tfrac{dT}{dp}\right)-\left(\tfrac{dV}{dp}\right)\sqrt{-1}\right)\Theta':(T-V\sqrt{-1})$$

$$\text{IV. } \left(\tfrac{dx}{dq}\right)-\left(\tfrac{dy}{dq}\right)\sqrt{-1}=\left(\left(\tfrac{dT}{dq}\right)-\left(\tfrac{dV}{dq}\right)\sqrt{-1}\right)\Theta':(T-V\sqrt{-1})$$

colligantur hinc producta I x IV et III x II in vnam ſummam ac reperietur:

$$2\left(\tfrac{dx}{dp}\right)\left(\tfrac{dx}{dq}\right)+2\left(\tfrac{dy}{dp}\right)\left(\tfrac{dy}{dq}\right)=2\left(\left(\tfrac{dT}{dp}\right)\left(\tfrac{dT}{dq}\right)+\left(\tfrac{dV}{dp}\right)\left(\tfrac{dV}{dq}\right)\right)\Sigma':(T+V\sqrt{-1}).\Theta':(T-V\sqrt{-1})$$

ideoque functiones T et V ita ſunt comparatae; vt ſit

$$\left(\tfrac{dT}{dp}\right)\left(\tfrac{dT}{dq}\right)+\left(\tfrac{dV}{dp}\right)\left(\tfrac{dV}{dq}\right)=0.$$

XII.

Hinc ergo intelligimus pro T et V eiusmodi functiones ipſarum p et q ſumi debere, quae iam ipſae idoneos valores pro coordinatis x et y praebeant. Quare inuentis iam duobus valoribus bina linearum ſe mutuo orthogonaliter ſecantium ſyſtemata exhibentibus, $x=t$ et $y=u$ exiſtentibus t et u eiusmodi functionibus binarum parametrorum p et q vt ſit $\left(\frac{dt}{dp}\right)\left(\frac{dt}{dq}\right)+\left(\frac{du}{dp}\right)\left(\frac{du}{dq}\right)=0$ hinc facillime infinita alia talium ſyſtematum paria deriuan-

deriuantur, quae binis ſequentibus aequationibus continentur

$$x = \tfrac{1}{2}\Gamma:(t+u\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2}\Gamma:(t-u\sqrt{-1}) - \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Delta:(t+u\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Delta:(t-u\sqrt{-1})$$

$$y = \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma:(t+u\sqrt{-1}) - \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma:(t-u\sqrt{1}) + \tfrac{1}{2}\Delta:(t+u\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2}\Delta:(t-u\sqrt{-1})$$

quam formam magis complicatam ideo elegi, vt imaginaria ſingulis functionibus euoluendis ſponte ſe deſtruant.

XIII.

Hae formulae eo magis ad praxin ſunt accommodatae, quod eadem operatione infinitae ſolutiones obtineri queant. Prodeant enim pro Γ variis functionibus determinatis ſumendis ex forma $\tfrac{1}{2}\Gamma:(t+u\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2}\Gamma:(t-u\sqrt{-1})$ hi valores $T; T'; T''; T'''$ etc. ex hac vero $\tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma:(t+u\sqrt{-1}) - \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma:(t-u\sqrt{-1})$ hi V, V', V'', V''' etc. atque valores quaeſtioni ſatisfacientes erunt ſequentes

$$x = \alpha T + \beta T' + \gamma T'' + \delta T''' - \varepsilon V - \zeta V' - \eta V'' - \theta V'''$$

$$y = \alpha V + \beta V' + \gamma V'' + \delta V''' + \varepsilon T + \zeta T' + \eta T'' + \theta T'''$$

vbi litterae $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta$ denotant coefficientes quoscunque. Probe autem notandum eſt valores homologos V, V, item T', V' etc ex iisdem functionibus Γ: ſimulque omnes ex iisdem litteris t et u eſſe formandas. Neque enim hinc in genere conclu-

dere licet ſi ſatisfaciant valores $x = T$, $y = V$, tum vero etiam alii quicunque $x = R$, $y = S$ inde quoque hos $x = \alpha T + \beta R$ et $y = \alpha V + \beta S$ eſſe ſatisfacturos; hoc enim non valet niſi functiones R et S ex iisdem litteris t et u ſint natae atque functiones T et V. Hinc probe cauendum eſt, ne ſuperioribus formis generalibus plus tribuatur, quam fas eſt.

XIV.

Valores ſimpliciores litterarum T et V ex iam inuentis quantitatibus idoneis t et u formandi, ex poteſtatibus loco functionis Γ ſubſtitutis naſcuntur atque ita ſe habebunt:

$T = t$	$T = tt - uu$	$T = t^3 - 3tuu$	$T = t^4 - 6ttuu + u^4$	etc.
$V = u$	$V = 2tu$	$V = 3ttu - u^3$	$V = 4t^3u - 4tu^3$	

ex poteſtatibus vero negatiuis oriuntur:

$T = \frac{t}{tt + uu}$	$T = \frac{tt - uu}{(tt + uu)^2}$	$T = \frac{t^3 - 3tuu}{(tt + uu)^3}$	$T = \frac{t^4 - 6ttuu + u^4}{(tt + uu)^4}$
$V = \frac{u}{tt + uu}$	$V = \frac{2tu}{(tt + uu)^2}$	$V = \frac{3ttu - u^3}{(tt + uu)^3}$	$V = \frac{4t^3u - 4tu^3}{(tt + uu)^4}$

vbi obſeruare licet ſi ponatur $t = v \operatorname{coſ}. \Phi$ et $u = v \operatorname{ſin}. \Phi$ tum omnes hos valores in iſtis formulis ſimplicibus contineri

$$T = v^n \operatorname{coſ}. n\Phi \text{ et } V = v^n \operatorname{ſin} \Phi$$

Totum ergo negotium huc redit vt pro t et u eiusmodi idoneae functiones ipſarum p et q obtineantur, vt fiat

$$\left(\frac{dt}{dp}\right)\left(\frac{dt}{dq}\right) + \left(\frac{du}{dp}\right)\left(\frac{du}{dq}\right) = 0.$$

XV.

XV.

Seu quod eodem redit ſumtis pro P et Q functionibus quibuscunque ipſarum p et q, conſideretur formula differentialis $P\,dp + Q\,dq\sqrt{-1}$, et quaeratur multiplicator eam reddens integrabilem tum integrale ex parte reali et imaginaria conſtans comparetur cum formula $t + u\sqrt{-1}$, indeque vtriusque litterae t et u valor idoneus elicietur Vnde primum obſeruo ſi P ſit functio ſolius p et Q ſolius q, prodire $t = \int P\,dp$ et $u = \int Q\,dq$. Qoniam autem hae formae $\int P\,dp$ et $\int Q\,dq$ aeque pro parametris amborum ſyſtematum linearum haberi poſſunt atque ipſae quantitates p et q, idem eſt ac ſi hinc ſtatuamus $t = p$ et $u = q$, neque etiam latius patere, cenſendi eſt haec poſitio $t = \alpha p + \beta$ et $u = \gamma q + \delta$. Interim tamen ſi ſumamus $P = 1$ et $Q = 1$ formula $dp + dq\sqrt{-1}$ non ſolum dat $t = p$ et $u = q$, ſed quia illa formula per $m + n\sqrt{-1}$ multiplicata manet integrabilis, et integrale eſt $mp - nq + np\sqrt{-1} + mq\sqrt{-1}$, inde etiam hi obtinentur valores:

$$t = mp - nq \text{ et } u = np + mq.$$

qui vtique latius patere videntur, verumtamen, quia valores inde natos T, T′, T″ et V, V′, V″ etc. combinare licet, non aliae lineae inde naſcuntur, atque ex ſimplicibus valoribus $t = p$ et $u = q$.

XVI.

Statuamus ergo $t = p$ et $u = q$, et percurramus ſimpliciora linearum ſyſtemata ſe mutuo ad angulos rectos ſecantium: ac primo quidem occurrunt hae formae:

$$x = \alpha p - \varepsilon q \text{ et } y = \alpha q + \varepsilon p$$

vnde eliminando primo q tum vero p ambo linearum ſyſtemata his aequationibus continebuntur:

$$\alpha x + \varepsilon y = (\alpha\alpha + \varepsilon\varepsilon)p \text{ et } \alpha y - \varepsilon x = (\alpha\alpha + \varepsilon\varepsilon)q$$

vtrumque continens infinitas lineas rectas inter ſe parallelas quarum quaelibet rectas alterius ſyſtematis normaliter ſecat qui ſine dubio caſus eſt ſimpliciſſimus.

XVII.

Sumatur ſecundo $T = tt - uu$ et $V = 2tu$, et quia binis terminis iungendis lineae tantum ad alium axem transferuntur ſtatuamus ſimpliciter $x = pp - qq$ et $y = 2pq$; vnde cum ſit $\sqrt{(xx + yy)} = pp + qq$, elidendo alternatim q et p, pro binis linearum ſyſtematibus adipiſcimur has aequationes

$$\sqrt{(xx + yy)} + x = 2pp \text{ et } \sqrt{(xx + yy)} - x = 2qq.$$

Quare ſi loco $2pp$ et $2qq$ ſimpliciter ſcribamus p et q hae aequationes ita ſe habebunt:

$$yy = pp - 2px \text{ et } yy = qq + 2qx.$$

Vtraque aequatio infinitas continet parabolas ſuper communi axe ex eodem foco deſcriptas, dum alterius ſyſtematis parabolae dextrorſum, alterius vero ſiniſtrorſum excurrunt; quae eſt pulcerrima parabolarum proprietas, ſine dubio iam olim obſeruata. Praeterea obſeruo etiamſi praecedentes valores $T=p$ et $V=q$ cum his combinentur, tamen easdem parabolas eſſe prodituras.

XVIII.

Statuamus nunc $T=t^3-3tuu$ et $V=3ttu-u^3$, formemusque has aequationes:

$$x=p^3-3pqq \quad \text{et} \quad y=3ppq-q^3$$

quarum haec dat $p=\sqrt{\frac{y+q^3}{3q}}$, qui valor in prima ſubſtitutus praebet: $x=\frac{y-8q^3}{3q}\sqrt{\frac{y+q^3}{3q}}$, et ſumtis quadratis:

$$27q^3xx=y^3-15qyy+48q^6y+64q^9$$

ſcribamus q et p loco q^3 et p^3, et aequationes pro ambobus linearum ſyſtematibus erunt:

$$27qxx=y^3-15qyy+48qqy-64q^3$$

$$27pyy=-x^3+15pxx-48ppx+64p^3$$

quae autem ad proprietates agnoſcendas commodius ita repraeſentantur:

$$x=\frac{y-8q}{3}\sqrt{\frac{y+q}{3q}} \quad \text{et} \quad y=\frac{x+8p}{3}\sqrt{\frac{p-x}{3p}}.$$

quae aequationes dant lineas tertii ordinis, quae pro vtroque ſyſtemate ſunt eiusdem naturae, dum coordinatae tantum permutantur.

XIX.

Conſideremus etiam functiones ex poteſtatibus negatiuis natas ſitque $T = \frac{t}{tt+uu}$ et $V = \frac{u}{tt+uu}$ atque ob $t = p$ et $u = q$, habebimus:

$$x = \frac{p}{pp+qq} \quad \text{et } y = \frac{q}{pp+qq}.$$

Hinc fit $xx+yy = \frac{1}{pp+qq}$, ideoque pro ambobus linearum ſyſtematibus habebimus has aequationes:

$$x = p(xx+yy) \quad \text{et } y = q(xx+yy).$$

Formam vtriusque parametri ita immutemus vt ſtatuamus $p = \frac{1}{2p}$ et $q = \frac{1}{2q}$, et bina linearum ſyſtemata his aequationibus exprimentur:

$$xx+yy = 2px \quad \text{et } xx+yy = 2qy$$

quae praebent circulorum bina ſyſtemata.

XX.

Euoluamus etiam ex eodem genere ſequentes formulas, ſitque

$$x = \frac{pp-qq}{(pp+qq)^2} \quad \text{et } y = \frac{2pq}{(pp+qq)^2}.$$

Hinc primo elicimus:

$$xx+yy = \frac{1}{(pp+qq)^2} \text{ ita vt ſit}$$

$$\frac{x}{xx+yy} = pp-qq \quad \text{et } \frac{y}{xx+yy} = 2pq.$$

Dein-

Deinde cum ſit $pp+qq=\frac{1}{\surd(xx+yy)}$ reperimus

$$2pp=\frac{x+\surd(xx+yy)}{xx+yy} \text{ et } 2qq=\frac{\surd(xx+yy)-x}{xx+yy}$$

ſcribamus nunc $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{q}$ loco $2pp$ et $2qq$, et bina linearum ſyſtemata his aequationibus exprimuntur

$$xx+yy=px+p\surd(xx+yy) \text{ et } xx+yy=q\surd(xx+yy)-qx$$

quae reducuntur ad has:

$$(xx+yy)^2-2px(xx+yy)=ppyy; \text{ ſeu } yy=\tfrac{1}{2}pp+px-xx+p\surd(\tfrac{1}{4}pp+px)$$

$$(xx+yy)^2+2qx(xx+yy)=qqyy; \text{ ſeu } yy=\tfrac{1}{2}qq-qx-xx-q\surd(\tfrac{1}{4}qq+qx).$$

Haec adeo duo linearum ſyſtemata ſub eadem communi aequatione quarti ordinis continentur, dum in altero tantum parameter negatiue accipitur.

XXI.

Haec ſolutio ideo omni attentione digna videtur quod in genere per integrationem eſt eruta, atque adeo ad ſolutionem huius problematis maxime accommodata:

Inuenire ea linearum algebraicarum ſyſtemata quarum traiectoriae itidem ſint lineae algebraicae.

Quamdiu enim aequatio pro illis lineis inter coordinatas x et y conſideratur, enodatio huius quaeſtionis fruſtra ſuſcipitur; totumque artificium, ad hunc ſcopum perducens in eo eſt ſitum, quod vtram-

vtramque coordinatam per binas parametros variabiles vtriusque ſyſtematis reuocauimus. Solutio igitur huius problematis ita ſe habet, vt ex quouis caſu inuento facillime infiniti alii aſſignari queant. Sint enim t et u eiusmodi functiones parametrorum p et q, quae iam coordinatas binorum ſyſtematum referant ita vt ſit:

$$\left(\frac{dt}{dp}\right)\left(\frac{dt}{dq}\right)+\left(\frac{du}{dp}\right)\left(\frac{du}{dq}\right)=0.$$

Tum aliae quotcunque coordinatae x et y obtinebuntur, ſumendo $x+y\surd-1=f:(t+u\surd-1)$, vnde ſi t et u iam ſint functiones algebraicae, omnes functiones algebraicae formulae $t+u\surd-1$, pariter pro x et y functiones algebraicas praebebunt.

XXII.

Totum ergo negotium huc redit, vt primo caſus ſimpliciores pro t et u innoteſcant; ac ſimpliciſſimi quidem ſe ſtatim offerentes ſunt $t=p$ et $u=q$, vel etiam $t=\alpha p+\beta q$ et $u=\gamma p+\delta q$, qui iam vberrimam meſſem binorum ſyſtematum algebraicorum largiuntur.

Tum vero hic caſus ſingularis notari meretur

$$t=\surd p(a+q) \quad \text{et} \quad u=\surd q(b-p)$$

qui quomodo ſatisfaciat ſumendis differentialibus intelligitur:

$$\left(\frac{dt}{dp}\right)=\frac{\surd(a+q)}{2\surd p};\ \left(\frac{dt}{dq}\right)=\frac{\surd p}{2\surd(a+q)} \text{ hinc } \left(\frac{dt}{dp}\right)\left(\frac{dt}{dq}\right)=\frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{du}{dp}\right)=\frac{-\surd q}{2\surd(b-p)};\ \left(\frac{du}{dq}\right)=\frac{\surd(b-p)}{2\surd q} \text{ hinc } \left(\frac{du}{dp}\right)\left(\frac{du}{dq}\right)=-\frac{1}{4}$$

 ex

ex quo propterea etiam infinitas alias ſolutiones deriuare licet. Ipſe autem hic caſus pulcerrima duo ſyſtemata linearum ſecundi ordinis ſuppeditat: poſito enim:

$$xx = ap + pq \text{ et } yy = bq - pq \text{ ob } xx + yy = ap + bq$$

pro vtroque ſyſtemate prodeunt hae aequationes:

$$1^\circ.\ p(xx+yy) - bxx + ap(b-p) = 0$$

$$2^\circ.\ q(xx+yy) + ayy - bq(a+q) = 0$$

quarum haec eſt pro infinitis ellipſibus, illa vero ob $b > p$ pro infinitis hyperbolis ſuper communi axe ex eodem centro deſcriptis.

XXIII.

Supra iam oſtendi (14) quomodo ex huiusmodi valoribus idoneis pro t et u cognitis infinitos valores T, V, T′, V′, T″, V″, etc. elicere liceat, ex quibus deinceps porro infinita alia ſyſtematum paria formari queant, ſumendo

$$x = \alpha T - \varepsilon V + \beta T' - \zeta V' + \gamma T'' - \eta V'' \text{ etc.}$$

$$y = \alpha V + \varepsilon T + \beta V' + \zeta T' + \gamma V'' + \eta T'' \text{ etc.}$$

Hos quidem valores T et V ibi ex ſolis poteſtatibus formulae $t + u\sqrt{-1}$ elicui, ponendo $T + V\sqrt{-1} = (t + u\sqrt{-1})^n$ eodem autem jure aliis quibuscunque functionibus vti licet. Veluti ſi ponamus $T + V\sqrt{-1} = \frac{f + g(t + u\sqrt{-1})}{b + k(t + u\sqrt{-1})} = \frac{f + gt + gu\sqrt{-1}}{b + kt + ku\sqrt{-1}}$, denominatorem primo realem reddamus tum vero adipiſcemur:

T =

$$T = \frac{(f+gt)(b+kt)+gkuu}{(b+kt)^2+kkuu} \text{ et } V = \frac{(gb-fk)u}{(b+kt)^2+kkuu}$$

vbi notaſſe iuuabit, cum ſit $T - V\sqrt{-1} = \frac{f+gt-gu\sqrt{-1}}{b+kt-ku\sqrt{-1}}$ fore $TT + VV = \frac{(f+gt)^2+gguu}{(b+kt)^2+kkuu}$ hinc enim colligitur:

$TT + VV = \frac{(fk+gb+2gkt)T-g(f+gt)}{k(b+kt)}$ tum vero etiam $T(b+kt)-kuV = f+gt$ et $TT+VV = \frac{(gb-fk)V+2gkuT-ggu}{kku}$ item $kT + \frac{(b+kt)V}{u} - g = 0$

XXIV.

Applicemus hanc euolutionem ad caſus ſimpliciores ac ponamus primo $t=p$ et $u=q$, et pro T et V ipſas coordinatas x et y ſumendo binae poſtremae aequationes praebent

$$xx+yy = \frac{(fk+gb+2gkp)x-g(f+gp)}{k(b+kp)} = \frac{(f+gp)x+gqy}{b+kp}$$

$$(b+kp)x-kqy = f+gp$$

quarum prior ſolam parametrum p continens, iam alterum linearum ſyſtema exhibet, quae quidem omnes erunt circuli. Tum vero ob $p = \frac{f-bx+kqy}{kx-g}$ pro altero ſyſtemate orietur haec aequatio: facta reductione.

$$xx+yy = \frac{(gb-fk)y+2gkqx-ggq}{kkq}$$

quae etiam infinitos circulos complectitur:
Pro altero caſu faciamus $a=0$, $b=cc$, et loco p et q ſcribamus pp et qq vt habeamus $t=pq$ et $u=q\sqrt{(cc-pp)}$ hinc ergo fiet

$xx+yy = \frac{(fk+gb+2gkpq)x-g(f+gpq)}{k(b+kpq)}$; $(b+kpq)x-kqy\sqrt{(cc-pp)} = f+gpq$, tum vero etiam:

$xx+yy=\frac{(gh-fk)y+2gkqx\sqrt{(cc-pp)}-ggq\sqrt{(cc-pp)}}{kkq\sqrt{(cc-pp)}}$ et $kx+\frac{(h+kpq)y}{q\sqrt{(cc-pp)}}-g=0$

Vnde cum ſit $q=\frac{hy}{(g-kx)\sqrt{(cc-pp)}-kpy}$ elicitur pro altero ſyſtemate haec aequatio:

$$xx-yy=\frac{(gh+fk)x}{hk}-\frac{(gh-fk)py}{hk\sqrt{(cc-pp)}}-\frac{fg}{hk}$$

Quae cum hac forma repraeſentari queat:

$$xx+yy=py-aa \text{ pro circulis}$$

alterius ſyſtematis aequatio erit

$$xx+yy=qx+aa \text{ itidem pro circulis.}$$

Talibus circulis in mappis mundi meridiani et paralleli referri ſolent.

XXV.

Ne iſte calculus tantopere fiat moleſtus, ſi in genere velimus ponere $t=\sqrt{p(a+q)}$ et $u=\sqrt{q(b-p)}$, primo hinc tam p quam q per t et u exprimamus vnde ſequentes naſcentur aequationes

$0=btt-p(tt+uu)-ap(b-p)$ et $0=auu+q(tt+uu)-bq(a+q)$

Iam loco T et V capiendo ipſas coordinatas x et y ex formulis ſuperioribus colligemus:

$$t=\frac{(fk+gh)x-fg-hk(xx+yy)}{kk(xx+yy)-2gkx+gg}=\frac{(kx-g)(f-hx)-hkyy}{(kx-g)^2+kkyy}$$

$$u=\frac{(gh-fk)y}{(kx-g)^2+kkyy}.$$

Ponamus ad calculum contrahendum

$f-hx=hr$ et $kx-g=ks$ vt ſit $fk-gh=hk(r+s)$ atque

$t=$

$t = \frac{b}{k} \cdot \frac{rs - yy}{ss + yy}$; $u = \frac{-b}{k} \cdot \frac{(r+s)y}{ss+yy}$ ideoque

$$tt + uu = \frac{bb}{kk} \cdot \frac{rrss + (rr+ss)yy + y^4}{(ss+yy)^2} = \frac{bb}{kk} \cdot \frac{rr+yy}{ss+yy}.$$

Nunc quia r et s abſciſſam x inuoluunt, aequationes pro binis linearum ſyſtematibus ita erunt comparatae.

$$\text{I.} \quad 0 = b(rs-yy)^2 - p(rr+yy)(ss+yy) - \frac{akkp(b-p)}{bb}(ss+yy)^2$$

$$\text{II.} \quad 0 = a(r+s)^2 yy + q(rr+yy)(ss+yy) - \frac{bkkq(a+q)}{bb}(ss+yy)^2$$

quae ambae ad lineas quarti ordinis referuntur.

Nunc caſu $a = 0$, cuius euolutio ante valde erat difficilis poſterior aequatio per $ss + yy$ diuiſa ſtatim dat

$0 = rr + yy - \frac{bkk(a+q)}{bb}(ss+yy)$ ſeu $bb(rr+yy) = bkkq(ss+yy)$ quae ob $r = \frac{f}{b} - x$ et $s = x - \frac{g}{k}$ manifeſto eſt ad circulum, prior vero ob $(rr+yy)(ss+yy) = (rs-yy)^2 + (r+s)^2 yy$ abit in hanc: $0 = (b-p)(rs-yy)^2 - p(r+s)^2 yy$,

ſeu $rs - yy = (r+s)y\sqrt{\frac{p}{b-p}}$ pariter pro circulo.

XXVI.

Ex ſolutione autem generali ſupra data etiam hanc quaeſtionem elegantiſſimam enodare poterimus, quam alia methodo vix tractare liceat.

Inuenire eiusmodi bina ſyſtemata linearum ſe mutuo normaliter ſecantium, quae ambo ſub eadem aequatione contineantur, ita vt prouti parametro valor

tribuatur vel poſitiuus vel negatiuus ambo inde naſcantur ſyſtemata.

Caſum ſimpliciſſimum huic conditioni ſatisfacientem iam ſupra §. 17. ſumus adepti, quo haec aequatio $yy = pp - 2px$, prout parameter p vel poſitiue vel negatiue accipitur, duas parabolarum ſeries exhibet, quae ſe mutuo ad angulos rectos interſecant.

XXVII.

Solutionem autem latius patentem reperiemus, ſi ponamus

$$x + y\sqrt{-1} = (p + q\sqrt{-1})^{2n} = (pp - qq + 2pq\sqrt{-1})^n$$

quae forma permutandis parametris p et q, abit in

$$(qq - pp + 2pq\sqrt{-1})^n = (-1)^n (pp - qq - 2pq\sqrt{-1})^n$$
$$= (-1)^n (x - y\sqrt{-1})$$

ideoque tum $x + y\sqrt{-1}$ abit vel in $x - y\sqrt{-1}$ vel in $-x + y\sqrt{-1}$ prout n fuerit vel numerus par vel impar. Illo autem caſu tantum applicata y hoc vero tantum abſciſſa x negatiue accipitur, et vtroque curuae manent eaedem, ſeu ſub eadem aequatione contentae. Ex quo ſi litterae α, β, γ, etc. denotent numeros impares quoscunque, geminam ſolutionem hinc conſequimur:

I. $x + y\sqrt{-1} = A(p + q\sqrt{-1})^{2\alpha} + B(p + q\sqrt{-1})^{2\beta}$
$+ C(p + q\sqrt{-1})^{2\gamma}$ etc.

II. $x + y\sqrt{-1} = A(p + q\sqrt{-1})^{4\alpha} + B(p + q\sqrt{-1})^{4\beta}$
$+ C(p + q\sqrt{-1})^{4\gamma}$ etc.

in

in priori ſcilicet omnes exponentes ſunt numeri impariter pares, in poſteriori vero pariter pares: litterae autem α, β, γ etiam numeros negatiuos atque adeo fractos, dummodo numeratores et denominatores ſint impares denotare poſſunt. Generalius vero hae duae ita exhiberi poſſunt, vt poſito $pp-qq+2pq\sqrt{-1}=R$ formula $x+y\sqrt{-1}$ aequari debeat functioni vel impari vel pari ipſius R.

XXVIII.

Adiungere inſuper liceat hoc problema.

Inuenire eiusmodi curuas ſecandas, vt curuae ſecantes ab illis non aliter diſcrepent niſi quod coordinatae x *et* y *inter ſe permutentur: ſeu vt eaedem lineae ad axem priori normalem translatae illas normaliter traiiciant.*

Soluetur hoc problema ope huius formulae

$$x+y\sqrt{-1}=A(p+q\sqrt{-1})^{\alpha}+B(p+q\sqrt{-1})^{\beta}+C(p+q\sqrt{-1})^{\gamma}$$

ſi loco exponentium α, β, γ capiantur numeri impares vel formae $4i+1$ vel formae $4i+3$. Huius autem duplicis generis numeros impares in eadem forma inter ſe neutiquam permiſcere licet. Vnde $x+y\sqrt{-1}$ aequari debet eiusmodi functioni impari ipſius $p+q\sqrt{-1}$, in qua nullae aliae occurrant poteſtates, niſi quarum exponentes ſint vel omnes formae $4i+1$, vel omnes formae $4i+3$.

DE
FORMVLIS INTEGRALIBVS
DVPLICATIS.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Si corporis cuiuſcunque propoſiti vel ſoliditatem vel ſuperficiem vel alias huiusmodi quantitates definire velimus, id per duplicem integrationem fieri ſolet; Formula enim differentialis bis integranda tali forma $Z dx dy$ exprimitur, binas variabiles x et y continente quarum altera ſola in priori integratione vt variabilis ſpectatur; poſterior vero integratio ad alteram iam vt variabilem ſpectatam inſtituitur. Hinc quantitas per duplicem iſtam integrationem reſultans duplex ſignum integrale praefigendo indicari ſolet hoc modo: $\int\int Z\, dx\, dy$, quippe qua duplicatione formula differentialis propoſita $Z\, dx\, dy$ bis integrari debere eſt intelligenda. Huiusmodi igitur expreſſiones geminato ſigno ſummatorio affectas hic formulas integrales duplicatas appello, quarum vſus cum latiſſime pateat, in earum indolem hic diligentius inquirere, earumque proprietates et affectiones accuratius euoluere conſtitui.

2. Pri-

2. Primum igitur cum x et y ſint duae quantitates variabiles a ſe inuicem non pendentes, Z vero denotet earum functionem quamcunque, formulae integralis duplicatae $\int\int Z\,dx\,dy$ vis ita exponi poteſt, vt quaerenda ſit functio finita binarum iſtarum variabilium x et y, quae ita bis differentiata, vt in altera differentiatione ſola x in altera ſola y pro variabili habeatur, ad formulam $Z\,dx\,dy$ deducat. Ita ſi fuerit $Z = a$, euidens fore $\int\int a\,dx\,dy = axy$; generalius vero erit $\int\int a\,dx\,dy = axy + X + Y$, denotante X functionem quamcunque ipſius x et Y ipſius y, quandoquidem hae duae quantitates per geminam illam differentiationem ex calculo tolluntur.

3. In genere autem ſi V fuerit eiusmodi functio ipſarum x et y, quae bis differentiata ita vt modo eſt praeceptum, praebeat $Z\,dx\,dy$; erit quidem vtique $V = \int\int Z\,dx\,dy$; verum duplex integratio inſuper functiones arbitrarias X et Y, illam ipſius x; hanc ipſius y inducit, vt ſit generaliſſime:

$$\int\int Z\,dx\,dy = V + X + Y.$$

Ex ſtatim perſpicitur, huiusmodi formulas differentiales neceſſario affectas eſſe producto $dx\,dy$, neque propterea ſecundum hanc ſignificationem tales formulas $\int\int Z\,dx^2$ vel $\int\int Z\,dy^2$ quicquam ſignificare; ſiquidem per ipſam rei naturam excluduntur, dum in altera integratione ſola x, in altera vero ſola y vt variabilis tractatur.

4. Conſtituta ſic forma huiusmodi formularum integralium duplicatarum $\int\int Z\,dx\,dy$, ita vt x et y ſint duae quantitates variabiles a ſe inuicem non pendentes et Z functio finita ex iis vtcunque compoſita, haud difficile eſt duplicem integrationem, quam inuoluunt, inſtituere, quod quidem prout primo vel x vel y ſola variabilis conſideratur, duplici modo fieri poteſt. Sumta ſcilicet primo y pro variabili, altera x vt conſtans tractatur, quaeriturque integrale $\int Z\,dy$ quod erit certa quaedam functio ipſarum x et y; qua inuenta ſuſcipiatur formula differentialis $dx\int Z\,dy$ in qua iam y vt conſtans ſolaque x vt variabilis tractetur, eiusque quaeratur integrale $\int dx\int Z\,dy$ qui erit valor quaeſitus formulae integralis duplicatae propoſitae $\int\int Z\,dx\,dy$. Si in hac duplici integratione ordo variabilium x et y inuertatur, valor quaeſitus ita exprimetur $\int dy\int Z\,dx$, qui ab illo non diſcrepabit.

5. Ob hunc conſenſum fit, vt talis forma $\int\int Z\,dx\,dy$ promiſcue ſiue hoc modo $\int dx\int Z\,dy$ ſiue hoc $\int dy\int Z\,dx$ exhiberi poſſit; vtrouis autem vtamur, regulae vulgares integrationis ſunt obſervandae, ſi modo notetur in ea integratione, in qua vel x vel y pro conſtante ſumatur, conſtantem introductam eiusdem fore functionem quamcunque. Veluti ſi proponatur haec forma $\int\int \frac{dx\,dy}{xx+yy} = \int dx\int \frac{dy}{xx+yy}$ ob $\int \frac{dy}{xx+yy} = \frac{1}{x}\,\text{A tang.}\,\frac{y}{x} + \frac{dX}{dx}$, denotante $\frac{dX}{dx}$ functionem quamcunque ipſius x, erit $\int\int \frac{dx\,dy}{xx+yy} = \int \frac{dx}{x}$

A tang.

A tang. $\frac{y}{x} + X$, vbi in integratione adhuc perficienda y pro conſtante habetur. Simili vero modo reperitur $\int\int \frac{dx\,dy}{xx+yy} = \int \frac{dy}{y}$ A tang. $\frac{x}{y} + Y$, in qua integratione x conſtans aſſumitur, in quo quidem exemplo conſenſus binorum valorum inuentorum non ſatis eſt perſpicuus.

6. Interim tamen veritas conſenſus per ſeries facile oſtenditur; cum enim ſit A tang. $\frac{x}{y} = \frac{\pi}{2}$ $-$ A tang. $\frac{y}{x}$, denotante $\frac{\pi}{2}$ angulum rectum, et

$$\text{A tang.}\, \frac{y}{x} = \frac{y}{x} - \frac{y^3}{3x^3} + \frac{y^5}{5x^5} - \frac{y^7}{7x^7} + \frac{y^9}{9x^9} - \text{etc.}$$

erit

$$\int \frac{dx}{x} \text{A tang.}\, \frac{y}{x} = \frac{-y}{x} + \frac{y^3}{9x^3} - \frac{y^5}{25x^5} + \frac{y^7}{49x^7} - \text{etc.} + f:y \text{ et}$$

$$\int \frac{dy}{y} \text{A tang.}\, \frac{x}{y} = \frac{\pi}{2}\, ly - \frac{y}{x} + \frac{y^3}{9x^3} - \frac{y^5}{25x^5} + \frac{y^7}{49x^7} - \text{etc.} + f:x$$

ex quarum vtraque oritur:

$$\int\int \frac{dx\,dy}{xx+yy} = X + Y - \frac{y}{x} + \frac{y^3}{9x^3} - \frac{y^5}{25x^5} + \frac{y^7}{49x^7} - \text{etc.}$$

Verum vbi ambae integrationes ſuccedunt, conuenientia ſponte ſe offert: quod quidem pluribus exemplis oſtendiſſe ſuperfluum foret, cum eius ratio ex natura differentialium et integralium perfecte ſit demonſtrata.

7. Haec igitur tenenda ſunt de iſtiusmodi formulis integralibus duplicatis, quando binae variabiles x et y nullo plane nexu inter ſe cohaerent, ita vt in altera integratione altera, in altera vero altera conſtans accipiatur. Verum tales formulae

non confundendae ſunt cum iis, quibus vt initio dixi, ſoliditas et ſuperficies corporum quorumcunque exprimi ſolet. Etſi enim hae formulae etiam duplicem integrationem requirunt, et in priori altera binarum variabilium puta y ſola vt variabilis tractatur altera x pro conſtante aſſumta, tamen priori integratione peracta, ea per omnes valores ipſius y extendi, ſicque tandem loco y extremus valor, quem recipere poteſt, ſtatui debet, qui plerumque ab x pendet, ita vt hoc valore poſt primam integrationem loco y conſtituto in poſteriori integratione y tanquam functio quaedam ipſius x ingrediatur, neque propterea pro conſtanti haberi queat, qua conditione fit, vt altera integratio plurimum immutetur, etſi prior ſimili modo vt ante abſoluatur.

Tab I. Fig. 1. 8. Quod diſcrimen quo clarius perſpiciatur, exemplum attuliſſe iuuabit. Quaeratur ergo ſoliditas ſphaerae, cuius centrum ſit C et radius $CA = a$, ac primo quidem portio eius quadranti ACB inſiſtens, cuius elementum eſt columella $YZyz$ areolae $Yy = dx\,dy$ inſiſtens, poſitis $CP = x$, et $PY = y$ eritque eius altitudo $YZ = \sqrt{(aa - xx - yy)}$; hinc ſoliditas columellae elementaris $= dx\,dy\sqrt{(aa-xx-yy)}$ quam bis integrari oportet. Maneat primo intervallum $CP = x$ conſtans, et integrale $\int dy\sqrt{(aa-xx-yy)}$ ita ſumtum, vt euaneſcat poſito $y = 0$, dabit portiunculam areolae $PpYq$ inſiſtentem, quae ergo erit

erit $= \frac{1}{2} y \surd (aa - xx - yy) + \frac{1}{2}(aa - xx)$ A ſin. $\frac{y}{\surd (aa - xx)}$. Iam hoc valore in altera integratione vti oportet, ſed antequam is inducatur, per totam diſtantiam P M extendi debet, vt habeatur elementum ſoliditatis toti areolae $P p M m$ inſiſtens; puncto autem Y ad M vsque promoto, fit $y = \surd (aa - xx)$, qui ergo valor loco y ſubſtitui debet, ita vt in ſequente integratione quantitas y minime vt conſtans conſideretur, haecque tractandi methodus plurimum a praecedente diſcrepet.

9. Poſito ergo $y = \surd (aa - xx)$, fit $\int dy \surd (aa - xx - yy) = \frac{\pi}{4}(aa - xx)$ cum ſit A ſin. $1 = \frac{\pi}{2}$; ſicque integratio adhuc abſoluenda erit $\int dx \int dy \surd (aa - xx - yy) = \frac{\pi}{4} \int (aa - xx) dx$, vbi quidem vnica variabilis x ineſt, ſed non ideo, quod iam hic y pro conſtanti habeatur, ſed quia pro y certa quaedam functio ipſius x eſt ſubſtituta. Haec altera vero integratio ita inſtituta, vt euaneſcat poſito $x = 0$, dabit ſoliditatem portionis ſphaerae, quae areae C B M P inſiſtit, quae idcirco erit $= \frac{\pi}{4}(aax - \frac{1}{3}x^3)$; vnde ſphaerae octans ſeu portio toti quadranti A C B inſiſtens prodibit punctum P vsque in A promouendo vt fiat $x = a$. Tum ergo ſoliditas octantis ſphaerae erit $= \frac{\pi}{6} a^3$, hincque totius ſphaerae $= \frac{4\pi}{3} a^3$ vti conſtat. Ex quo exemplo intelligitur, talem ſoliditatis inueſtigationem plurimum differre ab integratione duplicata formularum primo expoſita.

Tab. I. Fig. 2. 10. Quod ſi non totum octantem ſphaerae, ſed eam tantum eius portionem quae areae rectangulari CEDF inſiſtit inueſtigare velimus, prior integratio vt ante inſtituenda eſt, ſed ea peracta ipſi y valor PM debet tribui, qui quidem eſt conſtans et propterea haec inueſtigatio ad primum genus videtur accedere, verumtamen eo diſcrepat, quod integrale determinatum prodeat, cum ibi functiones indefinitae X et Y inueherentur. Poſito ergo vt ante ſphaerae radio $CA = a$, ſit rectanguli CEFD latus $CD = e$ et $CE = f$: et ſolidum elementare areolae $Pp\,Yq$ inſiſtens erit vt ante

$$\tfrac{1}{2}y\surd(aa-xx-yy)+\tfrac{1}{2}(aa-xx)\,\mathrm{A\,ſin}\frac{y}{\surd(aa-xx)},$$

quod vsque ad M extenſum, vbi ſit $y = f$; erit

$$\tfrac{1}{2}f\surd(aa-ff-xx)+\tfrac{1}{2}(aa-xx)\,\mathrm{A\,ſin.}\frac{f}{\surd(aa-xx)}$$

vnde ſolidum areae CPEM inſiſtens ſequenti integrali exprimetur.

$$\tfrac{1}{2}f\!\int dx\surd(aa-ff-xx)+\tfrac{1}{2}\!\int(aa-xx)dx\,\mathrm{A\,ſin.}\frac{f}{\surd(aa-xx)}$$

ſi quidem ita definiatur, vt euaneſcat poſito $x = 0$. Euoluamus ergo ſeorſim has binas formulas.

11. Ac prima quidem ſtatim praebet;

$$\int dx\surd(aa-ff-xx) = \tfrac{1}{2}x\surd(aa-ff-xx)+\tfrac{1}{2}(aa-ff)\,\mathrm{A\,ſin.}\frac{x}{\surd(aa-ff)}$$

altera autem ob $d.\,\mathrm{A\,ſin.}\frac{f}{\surd(aa-xx)} = \frac{fx\,dx}{(aa-xx)\surd(aa-ff-xx)}$ ita transformatur:

$\int(aa-$

$$\int (aa-xx)\,dx\,\text{A ſin.}\frac{f}{\sqrt{(aa-xx)}} = (aax-\tfrac{1}{3}x^3)\,\text{A ſin.}\frac{f}{\sqrt{(aa-xx)}}$$
$$-ff\int\frac{(aa-\frac{1}{3}xx)\,xx\,dx}{(aa-xx)\sqrt{(aa-ff-xx)}}$$

ad quam poſtremam partem integrandam, notetur eſſe

$$\text{A ſin.}\frac{fx}{\sqrt{(aa-ff)(aa-xx)}} = \int\frac{af\,dx}{(aa-xx)\sqrt{(aa-ff-xx)}}$$

huius ergo dabitur multiplum quoddam, quod illi formae adiectum praebeat talem formam

$$\int\frac{(aa-\frac{1}{3}xx)\,xx\,dx}{(aa-xx)\sqrt{(aa-ff-xx)}} + m\,\text{A ſin.}\frac{fx}{\sqrt{(aa-ff)(aa-xx)}}$$
$$= \int\frac{(aaxx-\frac{1}{3}x^4+maf)\,dx}{(aa-xx)\sqrt{(aa-ff-xx)}}$$

vt $aaxx-\frac{1}{3}x^4+maf$ fiat per $aa-xx$ diuiſibile, id quod fit ſumendo $m=-\frac{2a^3}{3f}$; hincque erit

$$\int\frac{(aa-\frac{1}{3}xx)\,xx\,dx}{(aa-xx)\sqrt{(aa-ff-xx)}} = \frac{2a^3}{3f}\,\text{A ſin.}\frac{fx}{\sqrt{(aa-ff)(aa-xx)}}$$
$$-\tfrac{1}{3}\int\frac{(2aa-xx)\,dx}{\sqrt{(aa-ff-xx)}}.$$

12. Cum igitur ſit

$$\int\frac{(2aa-xx)\,dx}{\sqrt{(aa-ff-xx)}} = \tfrac{1}{2}(3aa+ff)\,\text{A ſin.}\frac{x}{\sqrt{(aa-ff)}} + \tfrac{1}{2}x\sqrt{(aa-ff-xx)}$$

erit . . . . $\displaystyle\int\frac{(aa-\frac{1}{3}xx)\,xx\,dx}{(aa-xx)\sqrt{(aa-ff-xx)}}$

$=$

$$= \frac{2a^3}{3f} A\,\text{ſin}.\frac{fx}{\sqrt{(aa-ff)(aa-xx)}} - \frac{1}{6}(3aa+ff) A\,\text{ſin}.\frac{x}{\sqrt{(aa-ff)}} - \frac{1}{6}x\sqrt{(aa-ff-xx)}$$

hincque . . . . . $\int (aa-xx)dx\, A\,\text{ſin}.\frac{f}{\sqrt{(aa-xx)}}$

$$= (aax - \frac{1}{3}x^3) A\,\text{ſin}.\frac{f}{\sqrt{(aa-xx)}} - \frac{2}{3}a^3 A\,\text{ſin}.\frac{fx}{\sqrt{(aa-ff)(aa-xx)}}$$
$$+ \frac{1}{6}f(3aa+ff) A\,\text{ſin}.\frac{x}{\sqrt{(aa-ff)}} + \frac{1}{6}fx\sqrt{(aa-ff-xx)}.$$

Quare poſito $x = CD = e$, erit ſoliditas portionis ſphaerae rectangulo C D E F inſiſtentis:

$$\frac{1}{4}ef\sqrt{(aa-ee-ff)} + \frac{1}{4}f(aa-ff) A\,\text{ſin}.\frac{e}{\sqrt{(aa-ff)}} + \frac{1}{6}e(3aa-ee)$$
$$A\,\text{ſin}.\frac{f}{\sqrt{(aa-ee)}} - \frac{1}{3}a^3 A\,\text{ſin}.\frac{ef}{\sqrt{(aa-ee)(aa-ff)}} + \frac{1}{12}f(3aa-ff)$$
$$A\,\text{ſin}.\frac{e}{\sqrt{(aa-ff)}} + \frac{1}{12}ef\sqrt{(aa-ee-ff)}$$

quae expreſſio reducitur ad hanc:

$$\frac{1}{3}ef\sqrt{(aa-ee-ff)} + \frac{1}{6}f(3aa-ff) A\,\text{ſin}.\frac{e}{\sqrt{(aa-ff)}} + \frac{1}{6}e(3aa-ee)$$
$$A\,\text{ſin}.\frac{f}{\sqrt{(aa-ee)}} - \frac{1}{3}a^3 A\,\text{ſin}.\frac{e}{\sqrt{(aa-ee)(aa-ff)}}.$$

13. Si ergo rectanguli terminus F vsque ad peripheriam porrigatur vt ſit $ee+ff=aa$, primum membrum euaneſcit et arcus circulares tria reliqua afficientes abeunt in angulum rectum ſeu $\frac{\pi}{2}$, eritque ſoliditas

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}aae + \frac{1}{2}aaf - \frac{1}{6}e^3 - \frac{1}{6}f^3 - \frac{1}{3}a^3\right)$$

ſeu ob $f = \sqrt{(aa-ee)}$

$$\frac{\pi}{12}((2aa+ee)\sqrt{(aa-ee)} - 2a^3 + 3aae - e^3)$$

quod ſolidum fit maximum, ſi $f = e = \frac{a}{\sqrt{2}}$, fitque id tum $= \frac{\pi a^3(5-2\sqrt{2})}{12\sqrt{2}}$, dum ſoliditas octantis ſphaerae eſt $= \frac{\pi}{6}a^3$. Ita vt noſtrum ſolidum ſit ad octan-

octantem ſphaerae vt $5 - 2\sqrt{2}$ ad $2\sqrt{2}$. Sin autem punctum F non ad peripheriam quadrantis pertingat, ſueritque $f = e$ erit ſoliditas quaeſita $= \frac{1}{3}ee\sqrt{(aa-2ee)} + \frac{1}{3}e(3aa-ee)\text{A ſin.}\frac{e}{\sqrt{(aa-ee)}} - \frac{1}{3}a^3\text{A ſin.}\frac{ee}{aa-ee}$ Quare ſi fuerit

$$\text{A ſin.}\frac{e}{\sqrt{(aa-ee)}} : \text{A ſin.}\frac{ee}{aa-ee} = a^3 : e(3aa-ee)$$

ſolidum algebraice exprimetur.

14. Quo autem rem generalius complectamur quaeramus ſolidum areae cuicunque GQHR inſiſtens cuius elementum cum areolae $Yy = dxdy$ inſiſtat, idque ſit $= dxdy\sqrt{(aa-xx-yy)}$, prima integratio ſumto x conſtante praebet $\frac{1}{2}dx(y\sqrt{(aa-xx-yy)} + (aa-xx)\text{A ſin.}\frac{y}{\sqrt{(aa-xx)}})$ Tab. I. Fig. 3.

Sint iam ex natura curuae GQHR diſtantiae extremae $PQ = q$ et $PR = r$, atque ſolidum elementare areolae QR inſiſtens erit

$$\frac{1}{2}dx\left\{\begin{matrix} +r\sqrt{(aa-xx-rr)} + (aa-xx)\text{A ſin.}\frac{r}{\sqrt{(aa-xx)}} \\ -q\sqrt{(aa-xx-qq)} - (aa-xx)\text{A ſin.}\frac{q}{\sqrt{(aa-xx)}} \end{matrix}\right\}$$

Quare cum q et r poſſint eſſe functiones quaecunque ipſius x, euidens eſt quantum abſit, quo minus quantitas y in ſequente integratione pro conſtanti habeatur. Sequens autem integratio a valore $x = OE$ vsque ad valorem $x = OF$ eſt extendenda.

15. Si figura baſis GQHR a recta CA traiiciatur vt quaeratur ſolidum baſi CGH inſiſtens cuius Tab. I. Fig. 4.

cuius natura exprimatur aequatione quacunque inter $CP = x$, $PR = r$, erit ſolidum:

$$\tfrac{1}{2}\int dx\left(r\surd(aa-xx-rr)+(aa-xx)\,\text{A ſin.}\,\frac{r}{\surd(aa-xx)}\right)$$

vbi problema non inelegans ſe offert, *quo figura baſis* CGH *quaeritur, vt ſolidum ei inſiſtens algebraice exprimatur*. Statuatur in hunc finem $r = u\surd(aa-xx)$ vt ſolidum indefinitum areae CPRG inſiſtens ſit

$$\tfrac{1}{2}\int(aa-xx)\,dx\,(u\surd(1-uu)+\text{A ſin.}\,u)$$

quae expreſſio transformatur in hanc:

$$\tfrac{1}{2}(aax-\tfrac{1}{3}x^3)(u\surd(1-uu)+\text{A ſin.}\,u)$$
$$-\int(aax-\tfrac{1}{3}x^3)\,du\surd(1-uu)$$

Fiat iam $\int(aax-\tfrac{1}{3}x^3)\,du\surd(1-uu) = na^3\,\text{A ſin.}\,u + a^3\text{U}$ exiſtente U functione algebraica ipſius u, et cum ſit ſoliditas

$$\tfrac{1}{2}(aax-\tfrac{1}{3}x^3)u\surd(1-uu)-a^3\text{U}+(\tfrac{1}{2}aax-\tfrac{1}{6}x^3-na^3)\,\text{A ſin.}\,u$$

ea erit algebraica caſu $-x^3+3aax = 6na^3$: dummodo u euaneſcat poſito $x = 0$, tum enim ſoliditas erit $= na^3u\surd(1-uu)-a^3\text{U}$.

16. Ponamus $d\text{U} = \text{U}'du$, ac prodibit haec inter x et u aequatio:

$$aax-\tfrac{1}{3}x^3 = \frac{na^3}{1-uu}+\frac{a^3\text{U}'}{\surd(1-uu)}.$$

Fingatur $\text{U} = mu\surd(1-uu)$, erit $\text{U}' = \frac{m-2muu}{\surd(1-uu)}$, et vt u euaneſcat poſito $x = 0$, debet eſſe $m = -n$, vt fiat

$$aax-\tfrac{1}{3}x^3 = \frac{2na^3uu}{1-uu},\ \text{ſeu}\ u = \surd\frac{3aax-x^3}{6na^3+3aax-x^3}$$

hinc-

hincque $r = \sqrt{\frac{(aa-xx)(3aax-x^3)}{6na^3+3aax-x^3}}$. Iam ob $u\sqrt{(1-uu)} = \frac{\sqrt{6na^3(3aax-x^3)}}{6na^3+3aax-x^3}$, fit ſoliditas illa $= \frac{2na^3\sqrt{6na^3(3aax-x^3)}}{6na^3+3aax-x^3}$ Si haec ſoliditas locum habere debeat, facto $x=a$; fit $n=\frac{1}{3}$; $r = \sqrt{\frac{(aa-xx)(3aax-x^3)}{2a^3+3aax-x^3}} = \sqrt{\frac{x(a-x)(3aa-xx)}{(a+x)(2a-x)}}$ ac poſito $x=a$, erit ſoliditas $=\frac{1}{3}a^3$, et curua pro baſi inuenta eſt linea quarti ordinis.

17. Quae hic de ſoliditate portionis ſphaericae datae baſi inſiſtentis ſunt tradita, ſimili calculo ad quaeuis alia corpora accommodari poſſunt, cum tantum in formula $Z\,dx\,dy$ quantitas Z alio modo per x et y determinetur dum hic erat $Z=\sqrt{(aa-xx-yy)}$. Quin etiam ſi ſuperficies corporis cuiuscunque datae baſi imminens definiri debeat, id integratione gemina ſimilis formulae differentialis $Z\,dx\,dy$ eodem modo expedietur: ita ſi corpus ſit ſphaera, elementum ſuperficiei areolae elementari baſis $dx\,dy$ imminentis eſt $\frac{a\,dx\,dy}{\sqrt{(aa-xx-yy)}}$ ita vt ſit $Z = \frac{a}{\sqrt{(aa-xx-yy)}}$, cuius gemina integratio pari modo pro ratione baſis, cui imminens portio ſuperficiei quaeritur, eſt inſtituenda. Atque in genere quantitates quaecunque aliae cuiusuis corporis, quae certae baſi reſpondeant, ope ſimilium operationum determinabuntur.

18. Quaecunque ergo Z fuerit functio ipſarum x et y pro integrali duplicato $\int\int Z\,dx\,dy$ primo quaeritur integrale $\int Z\,dy$, quantitate x vt conſtante ſpectata, idque extendatur per totam quantitatem y,

ſicque extremi valores ipſius y in computum ingredientur, quae erunt functiones ipſius x, ex baſis figura cognitae: ſicque pro $\int Z\,dy$ orietur functio ipſius x, quae in dx ducta denuo more ſolito debet integrari. Idem tenendum eſt, ſi ordine inuerſo primo formula $\int Z\,dx$ integretur, ſpectato y vt conſtante quod integrale dum per totum intervallum x extenditur extremi valores ipſius x eidem y reſpondentes, qui erunt functiones ipſius y, inuehentur, ſicque $\int Z\,dx$ abibit in functionem ipſius y tantum, quae per dy multiplicata denuo ita integrari debet, vt integrale per totum interuallum y extendatur. Vtroque ſcilicet modo integratio per totam baſin eſt extendenda, eademque praecepta ſunt obſeruanda, qualiscunque Z fuerit functio ipſarum x et y.

19. Baſi ergo data, determinatio integrationum perinde ſe habet, ac ſi quantitas Z eſſet conſtans, quaerereturque tantum integrale $\int\int dx\,dy$, quo area baſis exprimitur. Quare ad praecepta, quae in determinatione horum integralium obſeruari oportet ſtabilienda, ſufficiet poſuiſſe $Z = 1$, vt integrale duplicatum $\int\int dx\,dy$ definiendum ſit ſiue autem ſumatur x ſiue y, extremi valores vtriusque determinabuntur per aequationem baſis figuram exprimentem. Scilicet priori integratione peracta, vbi
Tab. I. Fig 5. punctum Y vbicunque intra terminos extremos erat aſſumtum, tum hoc punctum in peripheriam baſis trans-

tranſferatur, quo pacto x et y fient coordinatae baſis, inter quas aequatio datur, ex qua deinceps ſiue y per x ſiue x per y determinabitur.

20. Quae quo clarius perſpiciantur, ſumamus baſis figuram eſſe circulum centrum in G et radium GQ habentem, ponamusque $CF = f$; $FG = g$, et $GQ = c$, erit puncto Y in peripheriam huius circuli tranſlato $cc = (f-x)^2 + (g-y)^2$. Iam ad aream huius circuli inueſtigandam ſit primo x conſtans, eritque $\int dy = y + C$, et quia y habet geminum valorem in noſtra baſi $y = g \pm \sqrt{(cc-(f-x)^2)}$, haec integratio ita determinetur, vt integrale euaneſcat, dum ipſi y minor horum valorum $g - \sqrt{(cc-(f-x)^2)}$ tribuitur, ita vt ſit

$$\int dy = y - g + \sqrt{(cc-(f-x)^2)}$$

Nunc ergo y vsque ad alterum terminum $y = g + \sqrt{(cc-(f-x)^2)}$ extenſo erit $\int dy = 2\sqrt{(cc-(f-x)^2)}$, quod iam per dx multiplicatum et integratum praebet: $\int dx \int dy = C - (f-x)\sqrt{(cc-(f-x)^2)} - cc\,\text{A ſin.}\frac{f-x}{c}$ quod vt euaneſcat poſito $x = f - c$ fit $C = cc\,\text{A ſin.}\,1 = \frac{\pi}{2}cc$. Porro ſtatuatur $x = f + c$. et ob $cc\,\text{A ſin.}\frac{f-x}{c} = -cc\,\text{A ſin.}\,1 = -\frac{\pi}{2}cc$ erit area quaeſita tota $= \frac{\pi}{2}cc + \frac{\pi}{2}cc = \pi cc$, vti conſtat.

21. Si has determinationes accuratius perpendamus videmus extremos valores ipſius x ita eſſe comparatos, vt alter ſit maximus, ſiquidem

 baſis

baſis tota quadam curua in ſe redeunte terminetur. Hi ergo ambo valores reperientur, ſi aequatio naturam baſis exprimens differentietur, et $dx = 0$ ponatur. Quando autem baſis non vna quadam linea curua terminatur, ſed portione quapiam veluti
Tab. I. CGH continetur, cuius baſis CH ſit maxima tum
Fig. 4. minor terminus ipſius x manifeſto eſt $= 0$, maior autem ipſi CH aequalis: eodemque caſu termini applicatae PR abſciſſae $CP = x$ reſpondentis ſunt alter $= 0$, alter vero $= PR$, Quacunque ergo baſi propoſita eius figura ante probe eſt examinanda ipſiusque termini quaquauerſus explorandi, quam inueſtigatio areae vel cuiusuis alius formulae integralis duplicatae ſuſcipi queat: definitis autem terminis quibus area continetur, inde determinationes integrationum ſunt petendae.

22. His de integrationum determinatione expoſitis, inſignes maximeque notatu dignae affectiones huiusmodi formularum integralium duplicatarum perpendi merentur, quae in earum transformatione occurrunt. Scilicet quemadmodum coordinatae eiusdem curuae infinitis modis ſumi poſſunt, ita hic loco binarum variabilium x et y, binae quaecunque aliae variabiles in computum introduci poſſunt, ſiue eae pariter ſint coordinatae, ſiue aliae quantitates vtcunque definitae. Ita talis transformatio in genere ita concipi poteſt, vt loco x et y functiones quaecunque aliarum duarum variabilium

t et

t et v ſubſtituantur, hisque in aequationem pro baſi datam introductis, ſimili modo limites harum quantitatum t et v quibus figura baſis terminatur, definiri poterunt. Vtcunque autem hae ſubſtitutiones ſumantur, tandem poſt duplicem integrationem ſemper eadem quantitas reſultet neceſſe eſt.

23. Si loco x et y aliae quaecunque binae coordinatae orthogonales introducantur puta t et v quod fit in genere ponendo:

$$x = f + mt + v\sqrt{(1-mm)} \text{ et } y = g + t\sqrt{(1-mm)} - mv$$

manifeſtum eſt elementum areae baſis, quod ante erat $dx\,dy$, nunc per $dt\,dv$ exprimi debere. Cum autem inde fit

$$dx = m\,dt + dv\sqrt{(1-mm)} \text{ et } dy = dt\sqrt{(1-mm)} - m\,dv$$

minime patet, quomodo loco $dx\,dy$ per has ſubſtitutiones oriri poſſit $dt\,dv$; dum potius prodiret $dx\,dy = m\,dt^2\sqrt{(1-mm)} + (1-2mm)\,dt\,dv - m\,dv^2\sqrt{(1-mm)}$ quae autem formula, vtcunque ad geminam integrationem adaptatur, ſemper in maximos errores inducet. Multo minus ergo hinc colligere licet, ſi loco x et y aliae functiones ipſarum t et v ſubſtituantur, cuiusmodi expreſſio loco $dx\,dy$ adhiberi debeat.

24. Ac primo quidem obſeruo nullam hic eſſe rationem, cur expreſſio loco $dx\,dy$ in calculum introducenda ei aequalis eſſe debeat; quod tum demum

demum neceſſe eſſet, ſi binae integrationes eodem modo vt ante ſecundum binas variabiles inſtituerentur. Cum autem nunc aliae variabiles t et v adſint, atque altera integratio per variabilitatem ipſius t, altera ipſius v ſit adminiſtranda, quae operationes a praecedentibus plurimum differunt; formula iam loco $dx\,dy$ inducenda non ex aequalitate aeſtimari, ſed potius ad ſcopum, qui eſt propoſitus, accommodari debet. Et quoniam iam binas integrationes ſecundum binas variabiles t et v diſtingui oportet, manifeſtum eſt formulam loco $dx\,dy$ adhibendam neceſſario producto $dt\,dv$ affectam eſſe, et huiusmodi formam $Z\,dt\,dv$ habere debere.

25. Quo haec certius expediantur, maneat primo x, et loco y introducatur alia variabilis u, ita vt ſit y functio quaecunque ipſarum x et u, et $dy = P\,dx + Q\,du$ Si iam in priori integratione x conſtans ſumatur, erit vtique $dy = Q\,du$, hinc $\int\int dx\,dy = \int dx \int Q\,du$, ita vt nunc loco formulae $dx\,dy$ habeatur $Q\,dx\,du$, cuius integrale duplicatum proinde etiam hoc modo exprimi poterit $\int du \int Q\,dx$, vbi in priori integratione $\int Q\,dx$ quantitas u ſumitur pro conſtante. Quodſi nunc ſimili modo u retineatur et loco x introducatur functio quaecunque ipſarum t et u, vt ſit $dx = R\,dt + S\,du$, in tractatione formulae $\int du \int Q\,dx$ prior integratio $\int Q\,dx$, in qua u conſtans ſtatuitur, abibit in hanc $\int QR\,dt$; ita vt integrale duplicatum

ſit

ſit $\int du \int QR\,dt$ ſeu promiſcue $\int\int QR\,dt\,du$ vnde manifeſtum eſt ob has ambas ſubſtitutiones loco formulae $dx\,dy$ hanc $QR\,dt\,du$ tractari debere.

26. Introducamus nunc ſtatim loco x et y has duas nouas variabiles t et u, per quas illae ita determinentur, vt ſit:

$$dx = R\,dt + S\,du \quad \text{et} \quad dy = T\,dt + V\,du$$

vnde valore ipſius dx in forma $dy = P\,dx + Q\,du$ ſubſtituto fit $dy = PR\,dt + (PS + Q)\,du$, ita vt ſit $PR = T$ et $PS + Q = V$, vnde fit $P = \frac{T}{R}$ et $\frac{ST}{R} + Q = V$ ſicque $QR = VR - ST$. Quare vi harum ſubſtitutionum loco $dx\,dy$ vti debemus formula $(VR - ST)\,dt\,du$ quae bis integrata iuſtis adhibitis determinationibus aeque aream totius baſis praebere debet, atque ipſa formula $dx\,dy$ bis integrata. Quod autem hic pro formula areae baſeos $\int\int dx\,dy$ eſt oſtenſum, locum habet pro quacunque alia formula $\int\int Z\,dx\,dy$, quippe quae per easdem ſubſtitutiones transformatur in hanc $\int\int Z(VR - ST)\,dt\,du$ dummodo in Z loco x et y aſſumti valores ſubſtituantur. Pari enim modo binas integrationes ex figura baſis determinari oportet.

27. Quod ſi ergo ponatur:

$$dx = R\,dt + S\,du \quad \text{et} \quad dy = T\,dt + V\,du$$

loco $dx\,dy$ conſequimur $(RV - ST)\,dt\,du$, quae formula plurimum differt ab ea, cui productum

 $dx\,dy$

$dx\,dy$ reuera eſt aequale; etiamſi enim termini per dt^2 et du^2 affecti, vtpote ad duplicem integrationem inepti, reiiciantur tamen quod reſtat $(RV + ST)dt\,du$ ratione ſigni a vera formula discrepat. Verum hic non leue dubium exoritur quod cum coordinatae x et y pari paſſu ambulent, noſtra formula potius differentiam $RV - ST$ quam inuerſam $ST - RV$ complectatur: quod dubium eo magis augetur, quod ſi ſuperius ratiocinium reſpectu x et y inuertiſſemus eaedem ſubſtitutiones nos reuera ad formulam $(ST - RV)dt\,du$ perduxiſſent. Sed quia totum diſcrimen tantum in ſigno verſatur, alteraque formula alterius eſt negatiua, hinc determinatio abſoluta areae baſis, quippe cuius quantitas abſoluta quaeritur, nullam mutationem realem patitur.

Tab. I. Fig. 5. 28. Haec autem magis fient perſpicua, ſi modum quo ſupra (20) ad aream EQHR inueniendam vſi ſumus attentius conſideremus. Primum ſcilicet ex integratione formulae $\int\int dx\,dy$ deduximus hanc aream $= \int dx\,(PR - PQ)$, vbi quidem PQ a PR ſubtraximus, quia manifeſto erat $PR > PQ$, ſed in ipſo calculo nulla continetur ratio, quae praecipiat, vt potius PQ a PR quam viciſſim PR a PQ ſubtrahamus, ſicque non aduerſante calculo potuiſſemus aequo iure eandem aream per $\int dx\,(PQ - PR)$ exprimere, quo pacto ea negatiua ſed priori aequalis proditura fuiſſet. Ex quo perſpicuum eſt ſignum $+$ vel $-$ non quantitatem areae,

areae, quae quaeritur, afficere, et calculum pari iure ad vtrumque perducere poſſe. Quam ob cauſam ſuperius dubium ita diluetur, vt dicamus aream quaeſitam ita exprimi debere, vt ſit $= \pm \int\int dt\,du$ $(RV-ST)$, et vt area poſitiue expreſſa prodeat, quouis caſu eo ſigno vtendum eſſe, quo $\pm(RV-ST)$ reddatur quantitas poſitiua.

29. Hinc etiam dubia, quae forte oriri poſſent circa inuentionem areae curuarum, quarum partes vtrinque ad axem ſunt diſpoſitae, et quibus tyrones ſaepe non parum turbari ſolent, facile reſoluuntur. Si enim curuae QAR ad axem AP relatae area tota QAR abſciſſae $AP = x$ reſpondens definiri debeat, eiusque partes APQ et APR ſeorſim conſiderentur, certum eſt ſi altera APQ affirmatiue ſpectetur vt ſit $= + Q$, alteram APR negatiue concipi debere, vt ſit $= - R$. Neque tamen hinc ſequitur aream totam QAR fore $= Q - R$, quippe quae euaneſceret, ſi ambae partes APQ et APR eſſent aequales; ſed perinde ac ſi ambo puncta Q et R ad eandem axis partem ſita eſſent, area perpetuo eſt $= \pm \int dx\,(PR - PQ)$, vnde ob $\int PQ.\,dx = Q$ et $\int PR.\,dx = -R$, fit tota area $= \pm(Q+R)$, vti rei natura poſtulat. Tab. I. Fig. 6.

30. Ope autem talium ſubſtitutionum, quibus loco binarum variabilium x et y binae quaecunque aliae introducantur t et u ſaepe numero integrationes plurimum ſubleuari facilioresque reddi poſſunt,

 et

et quouis caſu haud difficile eſt ſubſtitutiones maxime idoneas reperire. Veluti ſi area circuli EQHR ad axem CP relati definiri debeat, vbi ob $CF = f$, $FG = g$, $GQ = c$ erat $cc = (f-x)^2 + (g-y)^2$, poni conueniet

Tab. I. Fig. 5.

$$f - x = \frac{t}{\sqrt{(1+uu)}} \text{ et } g - y = \frac{tu}{\sqrt{(1+uu)}}$$

vt fiat $tt = cc$ et $t = c$. Tum vero ob

$$dx = \frac{-dt}{\sqrt{(1+uu)}} + \frac{tudu}{(1+uu)^{\frac{3}{2}}} \text{ et } dy = \frac{-udt}{\sqrt{(1+uu)}} - \frac{tdu}{(1+uu)^{\frac{3}{2}}}$$

loco $dx\,dy$ per §. 27. adipiſcimur: $dt\,du\left(\frac{t}{(1+un)^2} + \frac{tuu}{(1+uu)^2}\right) = \frac{tdtdu}{1+uu}$, cuius duplex integrale ita exprimatur; $\int\frac{du}{1+uu}\int t\,dt$. Iam vero eſt $\int t\,dt = \frac{1}{2}tt = \frac{1}{2}cc$, et area tota erit $\frac{1}{2}cc\int\frac{du}{1+uu}$, dum ipſi u omnes valores poſſibiles tribuuntur, quandoquidem u non amplius aequationem pro baſi afficiebat.

31. Quo hunc vſum clarius explicemus, conſideremus iterum ſphaeram centrum C et radium $CA = a$ habentem, cuius portio baſi circulari perpendiculariter inſiſtens quaeri debeat. Quia radium CA per centrum huius circuli G ducere licet ſit $FG = g = 0$, vt fiat $cc = (f-x)^2 + yy$, et ſolidum quaeſitum $= \int\int dx\,dy\,\sqrt{(aa - xx - yy)}$ ſtatuatur iam $x = \frac{t}{\sqrt{(1+uu)}}$ et $y = \frac{tu}{\sqrt{(1+uu)}}$, vt fiat $xx + yy = tt$, et $\sqrt{(aa - xx - yy)} = \sqrt{(aa - tt)}$, et pro $dx\,dy$ prodeat $\frac{tdtdu}{1+uu}$, ita vt ſoliditas quaeſita ita exprimatur $\int\int\frac{tdtdu\sqrt{(aa-tt)}}{1+uu}$, quae integrationes deter-

determinari debebunt ex aequatione hinc pro figura baſis oriunda: $cc = ff - \frac{2ft}{\sqrt{(1+uu)}} + tt$, vnde fit

$$\text{vel } t = \frac{f \pm \sqrt{(cc + ccuu - ffuu)}}{\sqrt{(1+uu)}}$$

$$\text{vel } \sqrt{(1+uu)} = \frac{2ft}{ff - cc + tt}.$$

32. Conſideretur primo t vt conſtans, fietque integrale $= \int t\,dt \sqrt{(aa - tt)}$. A tang. u, vbi conſtantem adiici non eſt neceſſe quia euaneſcente u ſimul y euaneſcit, quaeramus enim primo ſolidum ſemicirculo inſiſtens. At integrali hoc primo extenſo ad terminum extremum, ob A tang. u = A coſ. $\frac{1}{\sqrt{(1+uu)}}$ fit id

$$\int t\,dt \sqrt{(aa - tt)}.\ \text{A coſ.}\ \frac{ff - cc + tt}{2ft}$$

cuius integrationis limites ſunt $t = f - c$ et $t = f + c$. Si non ſoliditatem huius portionis ſphaerae, ſed eius ſuperficiem baſi quaſi imminentem definire voluiſſemus peruenturi fuiſſemus ad hanc formulam

$$\int \frac{a\,t\,dt}{\sqrt{(aa - tt)}}\ \text{A coſ.}\ \frac{ff - cc + tt}{2ft}$$

at operae pretium non videtur eius integrationem fuſius proſequi.

33. Methodus autem huiusmodi formulas integrales duplicatas tractandi haud parum illuſtrabitur ſi eam ad problema illud quondam famoſum Florentinum accommodemus, quo in ſuperficie ſphaerica portio geometrice aſſignabilis requirebatur, cuius ſuperficies algebraice exprimi poſſit. Immineat talis Tab. I. Fig. 4.

ſphaerae portio curuae GRH cuius propterea figura eſt determinanda: in qua ſi ponatur $CP = x$ $PR = y$, ſuperficies ſphaerae imminens hac formula integrali duplicata exprimitur $\int\int \frac{a\,dx\,dy}{\sqrt{(aa - xx - yy)}}$ Iam nulla ſubſtitutione adhibita, ſi primo x pro conſtante habeatur, prodibit $\int a\,dx\, \text{A ſin.} \frac{y}{\sqrt{(aa - xx)}}$. qua portio ſphaerae aream indefinitam CPRG tegens exprimitur; et quaeſtio nunc huc redit, vt eiusmodi aequatio algebraica inter x et y aſſignetur, vnde pro tota area CHRG portio ſuperficiei ſphaericae ei reſpondentis fiat algebraice aſſignabilis.

34. Ponamus breuitatis gratia $\frac{y}{\sqrt{(aa - xx)}} = v$, vt ſit $y = v\sqrt{(aa - xx)}$, ac poſito $x = 0$ fiat $v = n$: quoniam ſuperius integrale euaneſcere debet poſito $x = 0$: Erit ergo ſuperficies ſphaerica aream indefinitam CPRG tegens $= ax\, \text{A ſin.}\, v - a\int \frac{x\,dv}{\sqrt{(1 - vv)}}$. ſumto hoc integrali ita vt euaneſcat poſito $x = 0$. Statuatur nunc $\int \frac{x\,dv}{\sqrt{(1 - vv)}} = f\, \text{A ſin.}\, v - aV$, denotante V functionem quamcunque algebraicam ipſius V, quae abeat in N poſito $x = 0$, eritque ſuperficies noſtra $= ax\,\text{A ſin.}\,v - af\,\text{A ſin.}\,v + aaV + fa\,\text{A ſin.}\,n - aaN$, atque x per v ita determinabitur, vt ſit.

$$x = f - \frac{a\,dV\sqrt{(1 - vv)}}{a\,v}$$

ſit iam $CH = h$ ac ponatur $x = h$, quo caſu fiat $v = m$ et $V = M$, et cum ſuperficies propoſita ſit

$$ah\,\text{A ſin.}\,m - af\,\text{A ſin.}\,m + aaM + af\,\text{A ſin.}\,n - aaN$$

ea

ea algebraica eſſe nequit niſi ſit

$$h\,\text{A ſin.}\,m - f\,\text{A ſin.}\,m + f\,\text{A ſin.}\,n = 0$$

35. Hic igitur primo arcus quorum ſinus ſunt m et n inter ſe commenſurabiles reddi debent, niſi forte ſit $n = 0$, quo caſu ſufficit fieri $h = f$, Quod etſi facile infinitis modis praeſtari poteſt. tamen hoc problema multo facilius adhibendis ſubſtitutionibus ante expoſitis reſoluetur. Ponatur ergo $x = \frac{t}{\surd(1+uu)}$ et $y = \frac{tu}{\surd(1+uu)}$, vt fiat $xx+yy = tt$, et pro $dx\,dy$ prodeat $\frac{tdtdu}{1+uu}$, atque ſuperficies portionis ſphaericae hac formula integrali duplicata exprimetur. $\int\int \frac{atdtdu}{(1+uu)\surd(aa-tt)}$. Sumatur primo u conſtans erit ea $= \int \frac{adu}{1+uu}(b - \surd(aa-tt))$ quae iam facile abſolute integrabilis reddi poteſt: ponatur enim aequalis functioni algebraicae cuicunque ipſius u quae ſit $= V$ eritque $b - \surd(aa-tt) = \frac{dV(1+uu)}{adu}$, et portio ſuperficiei ſphaericae adeo indefinita erit $= V$, vbi pro V functionem algebraicam quamcunque ipſius u accipere licet.

36. Simpliciſſimae ſolutiones deducentur ex hac hypotheſi $V = \frac{a(\alpha+\beta u)}{\surd(1+uu)}$, vnde fit $\frac{dV}{adu}$ $= \frac{-\alpha u + \beta}{(1+uu)^{\frac{3}{2}}}$ hincque

$$b - \surd(aa-tt) = \frac{\beta - \alpha u}{\surd(1+uu)}.$$

Ponatur

Ponatur $b = 0$, et cum per ſubſtitutiones ſit $u = \frac{y}{x}$ et $t = \sqrt{(xx+yy)}$, erit pro curua quaeſita

$$\sqrt{(xx+yy)(aa-xx-yy)} = \alpha y - \beta x$$

et pro ſuperficie $V = \frac{a(\alpha x + \beta y)}{\sqrt{(xx+yy)}}$.

Hinc caſus ſimpliciſſimus oritur ponendo $\beta = 0$, et $\alpha = a$ vnde prodit $aaxx - (xx+yy)^2 = 0$ ſeu $yy = ax - xx$ ita vt curua G R H ſit circulus diametro A C deſcriptus et $V = \frac{aax}{\sqrt{(xx+yy)}}$. Infiniti alii circuli diametrum $= a$ habentes ac per centrum ſphaerae tranſeuntes reperiuntur ſi ſit $\beta = \sqrt{(aa-\alpha\alpha)}$, vnde fit $ax + y\sqrt{(aa-\alpha\alpha)} = xx + yy$ et $V = \frac{a(\alpha x + y\sqrt{(aa-\alpha\alpha)})}{\sqrt{(xx+yy)}}$ $= a\sqrt{(xx+yy)}$ vbi notandum eſt quantitatem V pro natura rei conſtantem quandam aſſumere.

Tab. II. Fig. 7. 37. Concipiatur ergo octans ſphaerae ſuper quadrante A C B extractus cuius radius $CA = a$, qui ſimul ſit diameter ſemicirculi C R A, in quo ſi ducatur corda quaecunque C R, et perpendiculum R P, vt ſit $CP = x$ et $PR = y$, erit $CR = t$, et u erit tangens anguli A C R. Quoniam igitur poſuimus $b = 0$, prius integrale quo u erat conſtans eſt $\sqrt{(aa-tt)}$, quod cum euaneſcat ſi $t = a$, euidens eſt id non per cordam $CR = t$ ſed per eius complementum R S extendi. Hinc repetita integratio $\int \frac{a\,du}{1+uu}\sqrt{(aa-tt)}$ eam ſphaericae ſuperficiei portionem exprimit, quae trilineo R V A S imminet, quae ergo ob $\sqrt{(aa-tt)} = \frac{au}{\sqrt{(1+uu)}}$ eſt

eſt $= \frac{-aa}{\sqrt{(1+uu)}} + aa$, integrali ſcilicet ita ſumto vt euaneſcat cum angulo ACR. Quare ob $\frac{1}{\sqrt{(1+uu)}} =$ coſ. ACR, ducto perpendiculo ST, erit illa ſuperficies $= a(a - CT) = CA.AT = AV^2$, ducta corda AV. Conſequenter portio ſuperficiei ſphaerae ſpatio CERASB inter quadrantem et ſemicirculo intercepto imminens aequatur quadrato radii ſphaerae.

38. Contemplemur autem adhuc eiusmodi caſum, quo prima integratio euaneſcat poſito $t = 0$, ſeu ſit $b = a$ ac ponatur $V = \frac{1}{2}aau$, quae expreſſio ſimul ſuperficiem quaeſitam praebet. Erit ergo $a - \sqrt{(aa-tt)} = \frac{1}{2}a(1+uu)$ et $\sqrt{(aa-tt)} = \frac{1}{2}a(1-uu)$, ita vt ſit $t = \frac{1}{2}a\sqrt{(3+2uu-u^4)}$ ſeu $t = \frac{1}{2}a\sqrt{(1+uu)(3-uu)}$, vbi eſt $CR = t$, et u denotat tangentem anguli ACR. Ex hac aequatione patet, ſi ſit $u = 0$ fore $t = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; ſcilicet curua quaeſita radio AC ita in E occurrit vt ſit $CE = CA.\frac{\sqrt{3}}{2}$, eique perpendiculariter inſiſtit. Tum ſi angulus ACR augeatur ad ſemirectum ACF, vt fiat $u = 1$, erit $t = a$; hocque caſu curua per ipſum punctum. F tranſit, ibique quadrantem oſculabitur; ac ſimul diſtantia t ſit maxima. Dehinc curua introrſum reflectitur. et t euaneſcit ſi $u = \sqrt{3}$: hoc eſt curua centro C ita immergitur, vt eius tangens in C cum radio CA faciat angulum 60°. Tab. II. Fig. 8.

39. Tota ergo curua in quadrante deſcripta figuram habebit E R F G C, et ducta in ea ex C recta vtcunque C R, angulique E C R tangens ſit $= u$, tum portio ſuperficiei ſphaericae ſectori E C R imminens algebraice poterit aſſignari, eritque ea $= \frac{1}{2} aau$. Quare ſi C R ad occurſum cum tangente A T producatur, ob A T $= au$ ea portio praeciſe aequabitur triangulo C A T: et portio imminens ſectori E C F erit $= \frac{1}{2} aa$, ſi autem angulus E C R maior ſemirecto ſumatur, vt ſit $u > 1$, quia tum $\sqrt{(aa-tt)} = \sqrt{(aa-xx-yy)}$ quae eſt eleuatio ſuperficiei ſphaericae ſupra quadrantem, fit negatiua, ſuperficies in inferiori octante capi debet. Quodſi huius curuae aequationem inter coordinatas C P $= x$ et P R $= y$ deſideremus ob $tt = xx + yy$ et $u = \frac{y}{x}$, habebimus:

$$4xx + 4yy = aa\left(3 + \frac{2yy}{xx} - \frac{y^4}{x^4}\right) = \frac{aa(xx+yy)(3xx-yy)}{x^4}$$

quae diuiſa per $xx+yy$ praebet:

$$4x^4 = 3aaxx - aayy \text{ ſeu } yy = 3xx - \frac{4x^4}{aa}.$$

40. Hanc ſolutionem reddere poſſumus generaliorem ponendo $V = abu$, fietque $a - \sqrt{(aa-tt)} = b(1+uu)$ hinc $\sqrt{(aa-tt)} = a - b - buu$, ergo

$$tt = 2ab - bb + 2(a-b)buu - bbu^4 = (1+uu)(2ab - bb - bbuu).$$

Qua ad coordinatas orthogonales translata, diuiſio per $xx+yy$ iterum ſuccedet, fietque

$$x^4 = (2ab-bb)xx - bbyy \text{ ſeu } y = \frac{x}{b}\sqrt{(2ab-bb-xx)}$$

ac

ac portio ſuperficiei ſphaericae ſectori E C R huius curuae imminens erit $= \frac{aby}{x} = b. AT$: quae expreſſio locum habet, quamdiu $uu < \frac{a-b}{b}$; hoc eſt donec anguli E C R tangens fiat $= \sqrt{\frac{a-b}{b}}$, vbi fit $t = a$. Tum vero angulo E C R vltra aucto perpendiculares ſuper curua erectae ad hemiſphaerium inferius protendi debent, quo caſu ſuperficies eo magis augetur. Si ergo ſit $b = a$ quia $\sqrt{(aa-tt)}$ vbique fit quantitas negatiua, quantitas $b. AT$ portionem ſphaericae ſuperficiei ad inferius hemiſphaerium continuatae exprimit.

41. Sit adhuc $b = a$, ac ponatur $V = \frac{a^2(\alpha+\beta u)}{\sqrt{(1+uu)}} - \alpha a^2$ vt ſuperficies aſſignanda euaneſcat poſito $u = 0$, eritque

$$a - \sqrt{(aa-tt)} = \frac{a(\beta - \alpha u)}{\sqrt{(1+uu)}} \text{ et } \sqrt{(aa-tt)} = a - \frac{a(\beta-\alpha u)}{\sqrt{(1+uu)}}$$

vbi notandum eſt, ſi haec expreſſio fiat negatiua, ibi in hemiſphaerium inferius deſcendi. Ex his autem prodit

$$\frac{tt}{aa} = \frac{2(\beta-\alpha u)}{\sqrt{(1+uu)}} - \frac{(\beta-\alpha u)^2}{1+uu}.$$

Quare euaneſcente angulo E C R cuius tangens $= u$, erit $\frac{tt}{aa} = 2\beta - \beta\beta$, at ſi $u = \frac{\beta}{\alpha}$, euaneſcit t. Pro altera parte axis C A fit u negatiuum, ac poſito $u = -v$ habetur ſuperficies negatiue expreſſa $V = \frac{aa(\alpha-\beta v)}{\sqrt{(1+vv)}} - \alpha a^2$ et curua hac definietur aequatione

$$\frac{tt}{aa} = \frac{2(\beta+\alpha v)}{\sqrt{(1+vv)}} - \frac{(\beta+\alpha v)^2}{1+vv}$$

 vnde

vnde poſito v infinito prodit $\frac{tt}{aa} = 2\alpha - \alpha\alpha$; vbi recta CR ſit in curuam normalis, quod etiam euenit, vbi $v = \frac{\alpha}{\beta}$ et $\frac{tt}{aa} = 2\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)} - \alpha\alpha - \beta\beta$. Quare ne fiat t imaginarium oportet ſit $\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)} < 2$.

42. Conſideremus caſum quo $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, vt ſit ſuperficies $V = aa\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1+u}{\sqrt{2(1+uu)}}\right)$ et

$$\frac{tt}{aa} = \frac{2(1+u)}{\sqrt{2(1+uu)}} - \frac{(1+u)^2}{2(1+uu)}$$

vbi patet ſi $u = -1$ fore $t = 0$; tum vero vt ſequitur:

ſi $u = 0$; ſi $u = 1$; ſi $u = 7$; ſi $u = \infty$
erit $t = a\sqrt{\frac{2\sqrt{2}-1}{2}}$; $t = a$; $t = a\sqrt{\frac{24}{25}}$; $t = a\sqrt{\frac{2\sqrt{2}-1}{2}}$

vbi notandum caſibus $u = 1$ et $u = \infty$ rectam CR fore in curuam normalem. In hoc ergo quadrante curua noſtra fere cum quadrante confunditur, cum vbique ſit proxime $t = a$: cui portio ſuperficiei ſphaericae imminens erit $= aa\sqrt{2}$, quae deficit a ſuperficie totius octantis, quae eſt $\frac{\pi}{2}aa$ parte ſatis parua $aa(\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}) = 0,1565 8aa$. Ad alteram axis CA partem haec curua in centrum incidit vbi tangens cum CA faciet angulum ſemirectum.

43. Verum ſolutio §. 35. data multo magis amplificari poteſt, cum enim ſuperficies ſphaerae aſſignanda hac formula exprimatur $\int \frac{adu}{1+uu} \int \frac{tdt}{\sqrt{(aa-tt)}}$, et in integratione $\int \frac{tdt}{\sqrt{(aa-tt)}}$ quantitas u vt conſtans conſideretur, integrale ita exhiberi poterit $U - \sqrt{(aa-tt)}$, denotante U functionem quamcunque ipſius u, quae formu-

formula quoniam euaneſcit ſi $\sqrt{(aa-tt)} = U$ et $t = \sqrt{(aa-UU)}$, ab hoc termino quantitas t vlterius protendi eſt concipienda. Denotet iam V aliam quamcunque functionem ipſius u, quae abeat in C poſito $u=0$, ac ponatur ſuperficies

$$\int \frac{a\,du}{1+uu}(U-\sqrt{(aa-tt)}) = aV - aC$$

eritque hinc $U-\sqrt{(aa-tt)} = \frac{dV(1+uu)}{du}$

ideoque $\sqrt{(aa-tt)} = U - \frac{dV(1+uu)}{du}$

vnde alter terminus ipſius t definitur.

44. Hinc igitur ſolutio problematis Florentini ita generaliſſime adornabitur. Conſtituto quadrante circuli A C B, cui octans ſphaerae inſiſtat, radio C A exiſtente $=a$, ductoque radio quocunque C S, vocetur anguli A C S tangens $=u$; tum primo curva E Q G ita conſtruatur vt ſit $CQ = \sqrt{(aa-UU)}$, et perpendiculum ex Q ad ſphaericam vsque ſuperficiem erectum $QM = U$, denotante U functionem quamcunque algebraicam ipſius u. Si $u=0$ abeat C Q in C E, et Q M in E I. Deinde alia deſcribatur curua F R H, vt ſit Tab. II. Fig. 9.

$$CR = \sqrt{(aa-(U-\frac{dV(1+uu)}{du})^2)}$$

et perpendiculum ex R ad ſphaeram vsque pertingens

$$RN = U - \frac{dV(1+uu)}{du}$$

denotante V aliam quamcunque functionem algebraicam ipſius u, quae abeat in C ſi $u=0$; quo caſu ſimul C R in C F et R N in F K abeat. Iam his duabus curuis conſtructis portio ſuperficiei ſphaeri-

 cae

cae areae EQRF imminens et intra terminos I, K, M, N contenta, algebraice exprimetur eritque $= a(V - C)$.

45. Haec de natura formularum integralium duplicatarum commentandi occaſionem praebuit problema aeque elegans atque vtile in analyſi, ſi quidem eius ſolutionem euoluere liceret. Quaerebatur ſcilicet inter omnia corpora eiusdem ſoliditatis id, quod minima ſuperficie contineretur: quod quidem ad ternas coordinatas orthogonales x, y et z relatum, poſito $dz = p\,dx + q\,dy$ ita analytice exprimitur, vt inter omnes relationes harum trium variabilium, quae eandem quantitatem huius formulae integralis duplicatae $\int\int z\,dx\,dy$ contineant, ea definiatur cui minima quantitas huius $\int\int dx\,dy\,\surd(1+pp+qq)$ reſpondeat. Quod problema ſi per theoriam variationum aggrediamur, effici oportebit vt fiat

$$a\delta \int\int dx\,dy\,\surd(1+pp+qq) = \delta \int\int z\,dx\,dy$$

ita vt totum negotium ad variationes huiusmodi formularum integralium duplicatarum indagandas reducatur.

46. Quoniam vtraque formula duplicem integrationem exigit, ſi in priori x pro conſtante habeatur, noſtra aequatio ita repraeſentabitur:

$$a\delta \int dx \int dy\,\surd(1+pp+qq) = \delta \int dx \int z\,dy$$

Verum hic probe animaduertendum eſt, poſtquam integralia $\int dy\,\surd(1+pp+qq)$ et $\int z\,dy$ fuerint inuenta tum variabilem y non amplius indefinitam ſeu

ſeu ab x non pendentem relinqui, quin potius pro y certam functionem ipſius x quam figura corporis exigit, ſubſtitui oportere, ita vt in ſecunda integratione quantitas y non vt conſtans ſeu ab x non pendens ſpectari queat. Quia autem ob figuram corporis etiamnunc incognitam iſta functio non conſtat, neutiquam apparet, quomodo variationes iſtiusmodi formularum duplicatarum determinari debeant.

47. Ipſa vero huius quaeſtionis natura alias praeterea determinationes requirere videtur, quarum ratio in ſolutione haberi debeat. Nam quemadmodum ſi curua quaeritur, quae inter omnes alias eandem aream includentes breuiſſimo arcu contineatur: non ſolum baſis A P ſed etiam duo puncta B et M, per quae curua tranſeat, praeſcribi ſolent, ita etiam in noſtro problemate non modo baſis, cui corpus tanquam columna inſiſtat pro cognita aſſumi debere videtur, ſed etiam ipſi extremi termini ſuperficiei quaeſitae. Quodſi enim hae res non praeſcribantur omnes, ne quaeſtioni quidem certae locus relinquitur: nam etiamſi baſis praeſcriberetur, termini vero ſupremi ſuperficiei arbitrio noſtro reliquerentur manifeſtum eſt, quo altior fuerit columna eo magis ſoliditatem auctum iri eadem manente ſuperficie ſuprema; quandoquidem ſuperficies laterum non in computum ducitur. Multo minus autem problema ſine baſis praeſcriptione vllam vim retineret, quoniam baſi coarctanda quantumuis magna ſoliditas cum minima ſuperficie poſſet eſſe coniuncta. Tab. II. Fig. 10.

EVO-

EVOLVTIO INSIGNIS PARADOXI
CIRCA AEQVALITATEM SVPERFICIERVM.

Auctore

L. EVLERO.

In doctrina linearum curuarum, ſi proponatur quantitas, cui arcus cuique abſciſſae indefinitae reſpondens aequalis eſſe debeat, linea curua inde ita determinatur vt plus vna problemati ſatisfacere neutiquam poſſit. Veluti ſi pro coordinatis orthogonalibus x et y, quarum illa x abſciſſam haec y applicatam denotet, eiusmodi linea curua quaeratur, cuius arcus abſciſſae x conueniens aequetur eiusdem functioni cuicunque X, problema perfecte determinatur, atque nonniſi vnicam lineam curuam admittit. Cum enim ſtatui oportat, $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=dX$, poſito $dX=Pdx$, vbi P itidem erit functio data ipſius x, fiet $dy=dx\sqrt{(PP-1)}$ cuius formulae integratio aequationem determinatam pro linea curua quaeſita ſuppeditabit, ſiquidem conſtans per integrationem inuecta naturam curuae non afficit, ſed tantum eius ab axe diſtantiam definit. Ita propoſita linea curua quacunque praeter eam nulla datur alia, ipſi ita longitudine aequalis, vt arcus omnibus

bus abſciſſis reſpondentes ſint aequales. Quae enim a Geometris de aequalitate linearum curuarum paſſim ſunt inueſtigata, haec aequalitas non ad omnes arcus eidem abſciſſae reſpondentes extenditur; ſed pro vna tantum determinata abſciſſa ſeu etiam pluribus, nequaquam autem omnibus locum habere poteſt. Ex quo perſpicuum eſt non dari duas lineas curuas diuerſas, quae ad eundem axem relatae pro omnibus abſciſſis habeant arcus inter ſe aequales.

Haec ideo praemonenda duxi, quo clarius inſigne diſcrimen, quod inter lineas curuas et ſuperficies intercedit, perſpici poſſit. Cum enim ſuperficies perinde ad planum quoddam fixum ac lineae curuae ad axem rectilineum fixum referri earumque portiones cuique ſpatio in illo plano aſſumto imminentes indagari ſoleant; etiamſi hic pro quouis ſpatio quantitas ſuperficiei imminentis proponatur, inde tamen natura ſuperficiei neutiquam determinatur, ſed ſemper innumerabiles ſuperficies diuerſae exhiberi poſſunt, quarum portiones cuique ſpatio plani fixi imminentes ſint inter ſe aequales. Quae circumſtantia a natura linearum tantopere diſcrepans eo magis omni attentione digna videtur, quod inſigne paradoxon in doctrina ſolidorum complectitur. Ita ſuper baſi circulari hemiſphaerio conſtituto, ſuper eadem baſi innumerabilia alia ſolida extrui poſſe omnino mirum videbitur, quorum non ſolum tota ſuperficies aequalis ſit ſuperficiei

hemiſphaerii, ſed etiam quorum ſuperficies cuique portioni indefinitae baſis imminens ſuperficiei ſphaericae eidem imminenti ſit aequalis. Quin etiam ſi baſi aliud planum oblique immineat, cuius proinde quaelibet portio ad baſin cui imminet datam teneat rationem, infinita alia ſolida ſeu ſuperficies ſiue conuexae ſiue concauae aſſignari poſſunt, quarum portiones quaeuis indefinitae ad baſin cui imminent, eandem teneant rationem. Hoc igitur inſigne paradoxon in Theoria ſolidorum hic accuratius examini ſubiicere conſtitui, cum inde haud leuia incrementa tam in ipſam hanc Theoriam quam in analyſin redundatura videantur.

Primum ergo veritatem huius paradoxi euicturus, determinetur puncti cuiusuis ſuperficiei ſitus ternis coordinatis orthogonalibus x, y, z, quarum binae priores ſitae ſint in plano fixo, tertia vero z illius puncti ab hoc plano diſtantiam exprimat. Cum iam natura ſuperficiei aequatione inter has ternas coordinatas contineatur, ex ea valor ipſius z eliciatur, qui differentiatus praebeat $dz = pdx + qdy$; quo facto conſtat elementum ſuperficiei hac formula $dxdy\sqrt{(1+pp+qq)}$ exprimi, imminet autem hoc elementum rectangulo infinite paruo baſeos differentialibus dx et dy formato. Quodſi iam alia habeatur ſuperficies, ex cuius aequatione inter easdem ternas coordinatas x, y et z prodeat $dz = rdx + sdy$, elementum huius ſuperficiei eidem rectangulo

gulo $dx\,dy$ imminens erit $dx\,dy\surd(1+rr+ss)$; vnde manifeſtum eſt, ſi fuerit $rr+ss=pp+qq$, hoc illi fore aequale; et cum haec aequalitas in omnibus elementis locum habeat, etiam cuique ſpatio finito in plano fixo ſeu baſi aſſumto aequa portio vtriusque ſuperficiei imminebit. Verum quaeſtio ſupereſt principalis, vtrum haec aequalitas $rr+ss=pp+qq$ ſubſiſtere poſſit, quin ſimul ſit $r=p$ et $s=q$, vnde eadem ſuperficies prodiret; namque huic principali conditioni ſatisfieri oportet, vt formula $r\,dx+s\,dy$ integrationem admittat, quod an praeter caſum $r=p$ et $s=q$ fieri poſſit non tam facile liquet. Omnis autem dubitatio vnico exemplo euaneſcet quo eſt $p=\frac{x}{a}$ et $q=\frac{y}{a}$, vt ſit $z=\frac{xx+yy}{2a}$ ſi enim pro altera ſuperficie capiatur $r=\frac{y}{a}$ et $s=\frac{x}{a}$, vnde vtique fit $rr+ss=pp+qq$, eius aequatio erit $z=\frac{xy}{a}$. En ergo duas ſuperficies prorſus diuerſas, alteram hac aequatione $2az=xx+yy$ alteram vero hac $az=xy$ contentam, quae ita inter ſe conueniunt, vt omnibus ſpatiis in baſi aſſumtis in vtraque pares ſuperficiei portiones immineant. Huiusmodi ſuperficies congruentes appellabo, vnde naſcitur haec quaeſtio maxime curioſa, quomodo propoſita quacunque ſuperficie, alias atque adeo omnes ei congruentes inveſtigari oporteat. Quod problema latiſſimo ſenſu acceptum cum ſit difficillimum, caſus quos mihi quidem euoluere licuit, in ſequentibus problematibus complectar.

Problema I.

1. Si ſuperficies data fuerit plana ad baſin ſeu planum fixum vtcunque inclinata, inuenire omnes alias ſuperficies ipſi congruentes.

Solutio.

Cum ſuperficies data ſit plana eius natura tali aequatione exprimitur $z = a + mx + ny$, quae ad baſin inclinatur angulo, cuius ſecans eſt $\sqrt{(1 + mm + nn)}$. Hic ergo ob $dz = mdx + ndy$ eſt $p = m$ et $q = n$, ideoque $pp + qq$ conſtans. Statuatur ergo $r = \alpha \operatorname{coſ.} \omega$ et $s = \alpha \operatorname{ſin.} \omega$ exiſtente $\alpha = \sqrt{(mm + nn)}$, ac neceſſe eſt angulum eo ita per binas coordinatas in baſi aſſumtas x et y definiri vt formula $dz = \alpha dx \operatorname{coſ.} \omega + \alpha dy \operatorname{ſin.} \omega$ integrabilis euadat. Cum igitur per transformationem fiat

$$z = \alpha(x \operatorname{coſ.} \omega + y \operatorname{ſin.} \omega) + \alpha \int d\omega (x \operatorname{ſin.} \omega - y \operatorname{coſ.} \omega)$$

euidens eſt huic conditioni ſatisfieri, ſi fuerit $x \operatorname{ſin.} \omega - y \operatorname{coſ} \omega$ functio quaecunque anguli ω. Denotet ergo in genere Ω functionem quamcunque anguli ω, ac ſtatuatur

$$x \operatorname{ſin.} \omega - y \operatorname{coſ.} \omega = a\Omega \text{ eritque } z = \alpha(x \operatorname{coſ.} \omega + y \operatorname{ſin.} \omega + a \int \Omega d\omega)$$

vbi notandum eſt litteram $\alpha = \sqrt{(mm + nn)}$ denotare tangentem anguli, quem planum propoſitum facit cum baſi.

Coroll.

Coroll. 1.

2. Primum ergo patet ſi planum propoſitum baſi ſit parallelum, ideoque $\alpha = 0$, fore etiam $z = 0$, ſeu $z =$ conſt. ita vt omnes ſuperficies congruentes ſint etiam planae baſi parallelae; quod quidem per ſe eſt manifeſtum, cum tale planum ſit minimum, quod cuique baſis portioni imminere poſſit, neque propterea aliud detur ipſi aequale.

Coroll. 2.

3. Sin autem planum propoſitum baſi non ſit parallelum neque etiam perpendiculare, ita vt α valorem quemcunque finitum obtineat, tum vtique innumerabiles aliae ſuperficies congruentes aſſignari poſſunt: cum functio Ω penitus ab arbitrio noſtro pendeat.

Coroll. 3.

4. Quoniam formula $d\omega\,(x \text{ ſin. } \omega - y \text{ coſ. } \omega)$ integrabilis eſſe debet. haec conditio etiam impletur, ſi fuerit $d\omega = 0$, ideoque angulus ω conſtans; Sit ergo $\omega = \zeta$; fietque $z = \alpha(x \text{ coſ. } \zeta + y \text{ ſin. } \zeta) +$ conſt. quae eſt aequatio pro plano ad baſin aeque inclinato ac propoſitum: ratione autem interſectionis vtrumque ab eo diſcrepare poteſt.

Exemplum 1.

5. Pro ſuperficiebus autem diuerſis inueniendis ſit primo $\int \Omega\, d\omega = 0$, hincque $\Omega = 0$: et ob

x ſin. $\omega = y$ coſ. ω fiet ſin. $\omega = \frac{y}{\sqrt{(xx+yy)}}$ et coſ. $\omega = \frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}}$, vnde aequatio pro ſuperficie prodit: $z = \alpha \sqrt{(xx+yy)}$, quae eſt ad ſuperficiem conicam, cuius axis baſi perpendiculariter inſiſtit, latus vero inclinatur angulo cuius tangens eſt $= \alpha$. Cum enim hic omnia plana tangentia ad baſin ſub eodem angulo inclinentur, ratio congruentiae eſt manifeſta.

Exemplum 2.

6. Sit $a\,\Omega = b$ ſin. $\omega +$ coſ. ω erit $a \int \Omega\, d\omega = a - b$ coſ. $\omega + c$ ſin ω. Fit ergo x ſin. $\omega - y$ coſ. $\omega = b$ ſin. $\omega + c$ coſ. ω, hinc: $\frac{\text{ſin.}\,\omega}{\text{coſ.}\,\omega} = \frac{y+c}{x-b}$ atque ſin. $\omega = \frac{y+c}{\sqrt{(x-b)^2+(y+c)^2}}$ et coſ. $\omega = \frac{x-b}{\sqrt{((x-b)^2+(y+c)^2}}$ vnde colligitur.

$$z = \alpha\left(\sqrt{((x-b)^2+(y+c)^2)} + a\right)$$

quae eſt pro ſimili cono reſpectu baſis vtcunque aliter conſtituto, ita tamen vt eius axis baſi perpendiculariter inſiſtat.

Exemplum 3.

Tab. III. Fig. 1. 7. Plano baſis in ipſa tabula aſſumto, ſit recta AX axis abſciſſarum x, et $XY = y$; iuncta AB ipſi AX normali ſumatur angulus $BAM = \omega$, et deſcripta curua quacunque EM, exprimat radius AM eam functionem ipſius, ω quam per $a\,\Omega$ indicaui. Ad hanc AM cadat recta YM normaliter et ob angulum $ATM = \omega$, fiet $AM = x$ ſin. $\omega - y$ coſ. ω,

pror-

prorſus vt ſolutio inuenta poſtulat. Tum vero erit $MY = x \cos. \omega + y \sin. \omega$. Porro radio AM iungatur normaliter recta $MV = \int AM.d\omega$ eritque $z = \alpha(YM + MV) = \alpha.YV$: ſcilicet in puncto baſis Y erigi debet perpendicularis aequalis ipſi $\alpha.YV$ eaque pertinget ad ſuperficiem quaeſitam. Vel ſi ſuper recta VY perpendiculariter conſtituatur angulus cuius tangens $= \alpha$, vertice in ipſo puncto V exiſtente, latus ſurſum vergens totum ſitum erit in ſuperficie quaeſita. Simili modo ſi ſuper alia quacunque recta vmO conſtituatur planum ad baſin normale, in eoque ex v ducatur recta cum vO faciens angulum, cuius tangens $= \alpha$, etiam haec recta tota in ſuperficiem quaeſitam cadet ſicque tota ſuperficies facile determinabitur.

Scholion.

8. Conſtructio haec attentius conſiderari meretur. Primo igitur curua EMm circa punctum A pro arbitrio eſt deſcripta, et rectae cuique ceu radio AM normaliter iuncta eſt recta MY, in qua vltra M producta capi debet $MV = \int AM.d\omega$, atque ex puncto V facile educitur recta, quae tota in ſuperficiem quaeſitam incidit. Hic animaduerto ſi radius Am ipſi AM ſit proximus, ideoque ang. $MAm = d\omega$, fore rectam $mv = MV + AM.d\omega$. at eſt $M\mu = AM.d\omega$, hincque $mv = \mu V$. Quod ſi ergo recta vm priorem VM ſecet in O erit elementum Vv arculus circularis centro O deſcriptus. Hinc

Hinc loco curuae E M pro arbitrio deſcribi poteſt curua V v, ad quam ſufficit in ſingulis punctis V, v normaliter eduxiſſe rectas V O, v o, ſuper quibus deinceps angulos, quorum tangens $= \alpha$, erigi oportet. Hinc ergo colligitur ſequens facillima conſtructio.

Conſtructio omnium ſuperficierum planae congruentium.

9. Super plano pro baſi aſſumto deſcribatur pro lubitu linea curua quaecunque B P F, ad cuius ſingula puncta P in plano baſis ducantur normales P Q Y, euolutam illius curuae C Q G tangentes in Q. Ad punctum autem Q baſi normaliter inſiſtat recta Q S, vt ſit Q S $= \alpha$ P Q, tum recta P S tota erit ſita in ſuperficie quaeſita. Haec. ergo conſtructio adhuc breuius ita enunciari poteſt:

Deſcripta in plano pro baſi aſſumto ad lubitum curua quacunque B P F, ad eius ſingula puncta P extra baſin educantur rectae et ad hanc curuam normales et ad ipſam baſin inclinatae ſub angulo cuius tangens $= \alpha$ tum omnes iſtae rectae in infinitum productae totae erunt ſitae in ſuperficie congruente, ideoque eam determinabunt.

Ratio huius conſtructionis etiam per ſe eſt euidens, cum enim omnes rectae S P in ſuperficiem inventam cadant eoque in curua B P F terminentur, etiam

etiam omnia plana tangentia hanc curuam tangent, ideoque ad baſin ſub angulo cuius tangens $= \alpha$ inclinantur vnde ſuperficiei portiuncula baſeos elemento $dx\,dy$ imminens erit $= dx\,dy\,\sqrt{(1+\alpha\alpha)}$.

Scholion.

10. Imprimis autem hic notaſſe iuuabit hanc conſtructionem latiſſime patere, cum deſcriptio curuae BPF prorſus ab arbitrio noſtro pendeat, quod ita eſt interpretandum, vt pro ea non ſolum curuas regulares aequatione quapiam contentas ſiue algebraicas ſiue tranſcendentes accipere liceat, ſed etiam ex pluribus partibus diuerſarum linearum vtcunque compoſitas, quin etiam lineas libero manus ductu vtcunque deſcriptas. Ita ſi eius loco perimeter trianguli accipiatur, prodibit ſuperficies pyramidis: circulus autem ſemper dat ſuperficiem conicam.

Problema 2.

11. Si ſuperficies data hac aequatione $2az = xx + yy$ exprimatur, inuenire omnes ſuperficies alias illi congruentes.

Solutio.

Cum pro ſuperficie data ſit $adz = xdx + ydy$, ponatur pro quaeſitis $adz = rdx + sdy$, atque neceſſe eſt ſit $rr + ss = xx + yy$, vnde eiusmodi valores pro r et s elici oportet, vt formula

$r\,dx + s\,dy$ integrationem admittat. Ac caſus quidem ſtatim obuii ſunt primo $r = y$ et $s = x$, vnde oritur $az = xy$, deinde $r = x$ et $s = -y$, vnde fit $2az = xx - yy$ quae autem a priori non eſt diuerſa, dum mutando binarum x et y in baſi directionem ſimilem recipiunt formam; ac generaliter quidem ponendo $x = X\,\text{coſ.}\,\zeta - Y\,\text{ſin.}\,\zeta$ et $y = X\,\text{ſin.}\,\zeta + Y\,\text{coſ.}\,\zeta$, prior dat

$$az = XX\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta + XY(\text{coſ.}\,\zeta^2 - \text{ſin.}\,\zeta^2) - YY\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta \text{ ſeu}$$

$$2az = XX\,\text{ſin.}\,2\zeta + 2XY\,\text{coſ.}\,2\zeta - YY\,\text{ſin.}\,2\zeta$$

quae ſumto angulo 2ζ recto manifeſto in formam poſteriorem abit. Vt autem alias ſuperficies eliciamus, ſtatuamus $rr = xx + 2v$ et $ss = yy - 2v$. Hinc cum ſit $az = \int r\,dx + \int s\,dy$

habebimus

$$\int r\,dx = \int dx \sqrt{(xx+2v)} = \tfrac{1}{2}x\sqrt{(xx+2v)} + vl(x + \sqrt{(xx+2v)}) - \int dv\,l(x + \sqrt{(xx+2v)})$$

$$\int s\,dy = \int dy \sqrt{(yy-2v)} = \tfrac{1}{2}y\sqrt{(yy-2v)} - vl(y + \sqrt{(yy-2v)}) + \int dv\,l(y + \sqrt{(yy-2v)})$$

quare vt ſumma fiat integrabilis, ſumi oportet pro $l\frac{y+\sqrt{(yy-2v)}}{x+\sqrt{(xx+2v)}}$ functionem quampiam ipſius v quae ſit lV, eritque $az = \frac{1}{2}x\sqrt{(xx+2v)} + \frac{1}{2}y\sqrt{(yy-2v)} - vlV + \int dv\,lV$ exiſtente $\frac{y+\sqrt{(yy-2v)}}{x+\sqrt{(xx+2v)}} = V$, ſicque introducendo nouam variabilem v, eiusque functionem quamcunque aſſumendo ad quoduis baſis punctum perpendiculum erigi poteſt vsque ad ſuperficiem

ciem quaeſitam pertingens. Notandum autem eſt eſſe $-vlV+\int dv\,lV=-\int\frac{v\,dV}{V}$, ita vt logarithmus ex calculo egrediatur. Verum hic ingens incommodum occurrit, quod relatio inter x, y et v nimis difficulter expediatur; ex quo aliam ſolutionem adiungo.

Alia Solutio.

12. Cum eſſe debeat $rr+ss=xx+yy$ ſtatuamus:

$x=v\,\text{coſ.}\,\phi$, $y=v\,\text{ſin.}\,\phi$, $r=v\,\text{coſ.}\,\omega$ et $s=v\,\text{ſin.}\,\omega$ eritque

$dx=dv\,\text{coſ}\,\phi-vd\phi\,\text{ſin.}\,\phi$ et $dy=dv\,\text{ſin.}\,\phi+vd\phi\,\text{coſ.}\,\phi$ hincque

$adz=vdv\,\text{coſ.}(\phi-\omega)-vvd\phi\,\text{ſin.}(\phi-\omega)$. Iam cum ſit

$\int vdv\,\text{coſ.}(\phi-\omega)=\frac{1}{2}vv\,\text{coſ.}(\phi-\omega)+\frac{1}{2}\int vv(d\phi-d\omega)\,\text{ſin.}(\phi-\omega)$

erit $az=\frac{1}{2}vv\,\text{coſ.}(\phi-\omega)-\frac{1}{2}\int vv(d\phi+d\omega)\,\text{ſin.}(\phi-\omega)$

quod vltimum membrum integrabile eſſe nequit, niſi ſit $vv\,\text{ſin.}(\phi-\omega)$ functio anguli $\phi+\omega$. Statuo ergo ſecundum ſignandi modum iam paſſim receptum, $vv\,\text{ſin.}(\phi-\omega)=F':(\phi+\omega)$, vt fiat

$$2az=vv\,\text{coſ.}(\phi-\omega)-F:(\phi+\omega)$$

exiſtente $d.\,F:(\phi+\omega)=(d\phi+d\omega)F':(\phi+\omega)$.

Vel introducantur alii bini anguli μ et ν vt ſit $\phi=\frac{\mu+\nu}{2}$ et $\omega=\frac{\mu-\nu}{2}$, hincque habebitur

$$v=\sqrt{\frac{F':\mu}{\text{ſin.}\,\nu}};\ x=v\,\text{coſ.}\,\phi,\ y=v\,\text{ſin.}\,\phi \text{ tandemque}$$

$$2az=\frac{F'.\mu}{\text{tang.}\,\nu}-F:\mu$$

 quae

quae ſolutio multo eſt ſimplicior; nihilo tamen minus tertiam ſubiungo.

Solutio tertia.

13. Cum eſſe debeat $rr+ss=xx+yy$, ponatur

$$r=x\,\text{coſ.}\,\omega+y\,\text{ſin.}\,\omega \quad \text{et} \quad s=x\,\text{ſin.}\,\omega-y\,\text{coſ.}\,\omega$$

eritque $adz=xdx\,\text{coſ.}\,\omega+(ydx+xdy)\,\text{ſin.}\,\omega-ydy\,\text{coſ.}\,\omega$ ideoque

$$az=\tfrac{1}{2}xx\,\text{coſ.}\,\omega-\tfrac{1}{2}yy\,\text{coſ.}\,\omega+xy\,\text{ſin.}\,\omega-\int d\omega\,(xy\,\text{coſ.}\,\omega - \tfrac{1}{2}(xx-yy)\,\text{ſin.}\,\omega).$$

Sit itaque Ω functio quaecunque anguli ω, ſtatuaturque $2xy\,\text{coſ.}\,\omega-(xx-yy)\,\text{ſin.}\,\omega=\Omega$ eritque

$$2az=(xx-yy)\,\text{coſ.}\,\omega+2xy\,\text{ſin}\,\omega-\int\Omega\,d\omega$$

quae ſolutio praecedentes ſimplicitate multum ſuperat.

Coroll. 1.

14. Si in hac vltima ſolutione ponatur $x=v\,\text{coſ.}\,\Phi$ et $y=v\,\text{ſin.}\,\Phi$ erit $xx-yy=vv\,\text{coſ.}\,2\Phi$ et $2xy=vv\,\text{ſin.}\,2\Phi$; ex quo ſolutio ita his duabus aequationibus erit contenta

$$vv\,\text{ſin.}(2\Phi-\omega)=\Omega \quad \text{et} \quad 2az=vv\,\text{coſ.}(2\Phi-\omega)-\int\Omega d\omega$$

vbi pro Ω functio quaecunque anguli ω accipi poteſt.

Coroll. 2.

15. Caſus euolutu facillimus habetur ponendo $\Omega=A\,\text{coſ.}\,\omega+B\,\text{ſin.}\,\omega$ vnde fit $\int\Omega d\omega=A\,\text{ſin.}\,\omega - B\,\text{coſ.}$

$-B\,\text{coſ.}\,\omega$. Hinc poſtrema ſolutio dat $(2xy-A)\,\text{coſ.}\,\omega = (xx-yy+B)\,\text{ſin.}\,\omega$ vnde elicitur:

$$\text{ſin.}\,\omega = \frac{2xy-A}{\sqrt{((xx+yy)^2-4Axy+2B(xx-yy)+AA+BB)}} = \frac{2xy-A}{V}$$

$$\text{coſ.}\,\omega = \frac{xx-yy+B}{\sqrt{((xx+yy)^2-4Axy+2B(xx-yy)+AA+BB)}} = \frac{xx-yy+B}{V}$$

ſcribendo V loco formulae radicalis. Hincque fit

$2az = \sqrt{((xx+yy)^2-4Axy+2B(xx-yy)+AA+BB)}$.

Coroll. 3.

16. Cum in tertia ſolutione formula $d\omega(xy\,\text{coſ.}\,\omega - \frac{1}{2}(xx-yy)\,\text{ſin.}\,\omega)$ integrabilis effici debeat, euidens eſt hoc fieri ſi angulus ω conſtans accipiatur. Sit ergo $\omega = \zeta$ prodibitque ſolutio iam ſupra indicata $2az = (xx-yy)\,\text{coſ.}\,\zeta + 2xy\,\text{ſin.}\,\zeta$.

Conſtructio generalis.

17. Poſitis $AX = x$ et $XY = y$ erit pro coroll. 1. $AY = v$ et angulus $XAY = \Phi$. Ducatur AV vt ſit ang. $YAV = XAY = \Phi$ et ſumta $AD = a$, capiatur AV tertia proportionalis ad AD et AY, vt fiat $AV = \frac{vv}{a}$. Ad alteram axis partem ſtatuatur angulus $XAM = 90° - \omega$, erit angulus $VAM = 90° + 2\Phi - \omega$, ex V ad AM ducatur normalis VM, eritque $AM = -\frac{vv}{a}\,\text{ſin.}\,(2\Phi - \omega)$, ideoque $\Omega = -AM.\,a$, et $VM = \frac{vv}{a}\,\text{coſ.}\,(2\Phi - \omega)$. Ex hac ergo conſtructione colligitur Tab. III. Fig. 3.

$$2az = a.VM - a\int AM.\,d\omega \text{ ſeu } 2z = VM + \int AM.\,d\omega$$

ſumatur ergo $MP = \int AM . d\omega$ vt fiat $2z = VP$, ac ſupra iam vidimus, in quacunque curua fuerit punctum M, curuam CPG punctum P continentem ita eſſe comparatam, vt recta MP ad eam ſit normalis. Quare reiecta curua BMF eius loco curvam CPG pro arbitrio aſſumere licet, vnde haec conſtructio conficietur.

Sumta in baſi recta AX, in eaque $AD = a$, ad lubitum deſcribatur curua quaecunque CPG, ad quam in quouis puncto P ducatur normalis indefinita PV, in qua ſumto puncto quocunque V ductaque recta AV biſecetur angulus DAV recta AY cuius longitudo ſumatur media proportionalis inter AD et AV, et in puncto Y ad baſin perpendiculariter erigatur recta ſemiſſi ipſius PV aequalis, quae ad ſuperficiem quaeſitam pertinget. Si hoc modo in ſingulis normalibus PV in infinitum productis omnia puncta euoluantur, omnia ſuperficiei ex curua CPG oriundae puncta determinabuntur.

Scholion.

18. Solutio huius problematis multo eſt difficilior quam praecedentis, cum reductio formulae $rdx + sdy$ ad integrabilitatem, ita vt ſit $rr + ss = xx + yy$ haud exigua artificia requirat. Qui autem alios caſus tentare voluerit, ſaepe tantas offendet difficultates, quibus ſuperandis omnis ſagacitas Analytica vix ſufficere videtur. Quare ſolutionem gene-

generalem etiamnunc vix ſperare licet; quae huc redit vt propoſita formula integrabili $pdx+qdy$, inueſtigetur alia formula $rdx+sdy-dz$ itidem integrabilis, ita vt ſit $rr+ss=pp+qq$. Statui quidem poſſet $r=p\,\text{coſ.}\,\omega+q\,\text{ſin.}\,\omega$ et $s=q\,\text{coſ.}\,\omega-p\,\text{ſin.}\,\omega$, fieretque

$$dz=(pdx+qdy)\,\text{coſ.}\,\omega+(qdx-pdy)\,\text{ſin.}\,\omega$$

vbi cum $pdx+qdy$ ſit integrabile ſtatuatur integrale $=u$ eritque $z=u\,\text{coſ.}\,\omega+\int(ud\omega+qdx-pdy)\,\text{ſin.}\,\omega$. Neque vero patet quomodo angulum ω per x et y definire liceat vt haec formula integrabilis euadat. Quare eiusmodi caſus euoluam, vbi mihi quidem difficultates ſuperare licuit.

Problema 3.

19. Si ſuperficies data hac exprimatur aequatione $dz=\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy$, vbi X per ſolam x et Y per ſolam Y detur, inuenire omnes ſuperficies iſti congruentes.

Solutio.

Quod ſi ergo pro ſuperficiebus quaeſitis ponatur

$dz=rdx+sdy$, neceſſe eſt ſit $rr+ss=\mathrm{XX}+\mathrm{YY}$ ſtatuatur ergo $r=\sqrt{(\mathrm{XX}+2v)}$ et $s=\sqrt{(\mathrm{YY}-2v)}$ vt fiat $z=\int(dx\sqrt{(\mathrm{XX}+2v)}+dy\sqrt{(\mathrm{YY}-2v)})$

Iam

Iam quaeratur integrale formulae $dx\sqrt{(XX+2v)}$ ſumta quantitate v conſtante, quod ſit $= P$, ita vt P ſit functio ipſarum x et v, quam tanquam datam ſpectare licet; ea igitur differentiata prodeat $dP = dx\sqrt{(XX+2v)} + R\,dv$, vbi quidem conſtat fore $R = \int \frac{dx}{\sqrt{(XX+2v)}}$ quantitate v pro conſtante habita. Simili modo ſpectata v vt conſtante quaeratur quantitas $Q = \int dy\sqrt{(YY-2v)}$, eaque denuo differentiata vtraque y et v pro variabili habita prodeat $dQ = dy\sqrt{(YY-2v)} + S\,dv$, eritque $S = -\int \frac{dy}{\sqrt{(YY-2v)}}$, quae ergo quantitates pariter erunt cognitae. Hinc facta ſubſtitutione habebitur.

$$z = \int (dP - R\,dv + dQ - S\,dv) = P + Q - \int (R+S)\,dv$$

et nunc formulam $(R+S)\,dv$ integrabilem reddi oportet quod aliter fieri nequit niſi $R+S$ ſit functio ipſius v. Sit itaque V functio quaecunque ipſius v, et ſumatur $R+S = V$, eritque $z = P + Q - \int V\,dv$, in quibus aequationibus conſtructio generalis omnium ſuperficierum congruentium continetur.

Problema 4.

20. Si pro ſuperficie data coordinata ad baſin perpendicularis exprimatur functione homogenea n dimenſionum ipſarum x et y, inueſtigare omnes ſuperficies ipſi congruentes.

Solutio.

Ponatur $y = ux$, et aequatio pro ſuperficie data talem habebit formam $a^{n-1} z = x^n U$ exiſtente U functio-

functione ipſius u tantum, quae ergo erit data. Hinc fit.

$$a^{n-1} dz = n x^{n-1} U dx + x^n dU.$$

ab ob $dy = u dx + x du$, erit:

$$a^{n-1} dz = x^{n-1}\left(nU dx + \frac{dU}{du} dy - \frac{u\,dU}{du} dx\right)$$

ita vt ſit $p = x^{n-1}\left(nU - \frac{u\,dU}{du}\right)$ et $q = x^{n-1}\frac{dU}{du}$.

hincque $pp + qq = x^{2n-2}\left(nnUU - \frac{2nuU\,dU}{du} + \frac{(1+uu)\,dU^2}{du^2}\right)$

Statuatur $nnUU - \frac{2nuU\,dU}{du} + \frac{(1+uu)\,dU^2}{du^2} = VV$, ita vt etiam V ſit functio data ipſius u: et iam pro ſuperficiebus quaeſitis conſtituatur haec aequatio differentialis

$$a^{n-1} dz = x^{n-1}(r\,dx + s\,dy)$$

ac neceſſe eſt vt ſit $rr + ss = VV$. Nunc pro y ſubſtituto valore ux, fit.

$$a^{n-1} dz = x^{n-1}((r + su) dx + xs\,du)$$

hincque prius membrum integrando per x.

$$a^{n-1} z = \frac{1}{n} x^n (r + su) + \int x^n \left(s\,du - \frac{dr - s\,du - u\,ds}{n}\right)$$

Statuatur $r = V \operatorname{cof.} \Phi$ et $s = V \operatorname{fin.} \Phi$, vt habeatur

$$na^{n-1} z = x^n V(\operatorname{cof.}\Phi + u \operatorname{fin.}\Phi) + \int x^n((n-1)V du \operatorname{fin.}\Phi$$
$$+ V d\Phi(\operatorname{fin.}\Phi - u \operatorname{cof.}\Phi) - dV(\operatorname{cof.}\Phi + u \operatorname{fin.}\Phi))$$

Hic formula differentialis $(n-1) V du \operatorname{fin.} \Phi + V d\Phi(\operatorname{fin.}\Phi - u \operatorname{cof.}\Phi) - dV(\operatorname{cof.}\Phi + u \operatorname{fin.}\Phi)$ duas tantum variabiles u et Φ complectitur, dabi-

 tur

tur ergo multiplicator M itidem functio ipſarum u et Φ qui eam reddat integrabilem: ſit ergo

$$M((n-1)V\,du\,\text{ſin.}\,\Phi + V\,d\Phi(\text{ſin.}\,\Phi - u\,\text{coſ.}\,\Phi) - dV(\text{coſ.}\,\Phi + u\,\text{ſin.}\,\Phi)) = dS$$

et S etiam erit functio aſſignabilis ipſarum u et Φ, inde cum ſit

$$na^{n-1}z = x^n V(\text{coſ.}\,\Phi + u\,\text{ſin.}\,\Phi) + \int \frac{x^n\,dS}{M}$$

euidens eſt hanc formulam integrabilem eſſe non poſſe niſi ſit $\frac{x^n}{M}$ functio ipſius S. Ponamus ergo

$x^n = MF' : S$ fietque $na^{n-1}z = x^n V(\text{coſ.}\,\Phi + u\,\text{ſin.}\,\Phi) + F : S$

Per binas porro variabiles u et Φ, determinantur M et S, hincque porro x et $y = ux$, atque z, vnde ob functionem arbitrariam hic indroductam haec ſolutio eſt generalis.

Scholion 1.

21. Hic modo prorſus ſingulari euenit, vt caſu $n = 0$ haec ſolutio locum non inueniat, neque etiam patet quomodo huic incommodo occurri poſſit. Quod hic eo magis mirum videtur, cum alioquin huiusmodi caſus alio modo tractati ſatis facile expediantur. Interim haec duo problemata latiſſime patent, et ex III. caſus reſolui poſſunt quibus ſuperficies data eſt cylindrica, ex IV. vero quibus

quibus eſt conica, qui etiamſi videantur facillimi, tamen ſolutiones hinc reſultantes formulas tranſcendentes valde complicatas inuoluunt, vt inde ſuperficies congruentes ſimpliciores nullo modo elicere liceat. Verum neuter horum caſuum ad ſuperficiem ſphaericam accommodari poteſt cuius natura cum hac aequatione $z = \sqrt{(aa - xx - yy)}$ exprimatur, pro aequatione ſuperficierum congruentium $dz = rdx + sdy$ fieri debet $rr + ss = \frac{xx + yy}{aa - xx - yy}$; quomodocunque autem hinc quantitates r et s definiantur, haud patet quomodo formula $rdx + sdy$ ad integrabilitatem perduci poſſit. Dubium tamen eſt nullum, quin dentur infinitae ſuperficies ſphaericae congruentes.

Scholion 2.

22. Caſum autem, quo ſuperficies propoſita eſt ſphaerica, aliosque ſimiles expediri poſſe obſeruaui, ſi in plano fixo pro baſi aſſumto binae coordinatae non orthogonales capiantur, ſed altera ſumatur recta ex puncto fixo educta, altera vero angulo eius poſitionem determinante contineatur. Tab. III. Fig. 4. Sit igitur C hoc punctum fixum, et recta CA poſitione data, et pro puncto quocunque in baſi aſſumto V ſtatuatur recta $CV = v$ et angulus $ACV = \Phi$, perpendiculum autem in V inſiſtens ad ſuperficiem pertingens ſit z, quod ita per v et Φ exprimatur vt ſit $dz = pdv + qd\Phi$; conſideretur primo angulus Φ conſtans et ſumto $Vv = dv$ perpendiculum puncto v inſiſtens erit $z + pdv$ vnde

 tangens

tangens in rectae VC punctum Q incidet vt ſit $VQ = \frac{z}{p}$. Tum conſideretur diſtantia v vt conſtans, et ſumto angulo $VCu = d\Phi$ vt ſit $Vu = va\Phi$ perpendiculum puncto u inſiſtens erit $= z + qd\Phi$; quare in recta VP ad CV normali tangens incidet in P vt ſit $VP = \frac{zv}{q}$ vnde planum tangens baſin ſecabit recta PQ, ad quam ex V demiſſo perpendiculo VR, erit $VR = \frac{VP.VQ}{PQ} = \frac{zv}{\sqrt{(qq + ppvv)}}$ ideoque anguli quem planum tangens facit cum baſi, tangens $= \sqrt{(pp + \frac{qq}{vv})}$ et ſecans $- \sqrt{(1 + pp + \frac{qq}{vv})}$. Quare cum in baſi ſpatiolum rectangulare $vVuo$ ſit $= vdvd\Phi$, elementum ſuperficiei ipſi imminens habebitur $= vdvd\Phi\sqrt{(1 + pp + \frac{qq}{vv})}$, ex quo alia ſuperficies aequatioue $dz = rdv + sd\Phi$ expreſſe illi erit congruens ſi fuerit $rr + \frac{ss}{vv} = pp + \frac{qq}{vv}$. Verum etiam hanc ſubſtitutionem in analyſi praecedente inſtituere licet, vti ex ſolutione problematis ſequentis perſpicietur.

Problema 5.

23. Si ſuperficies propoſita fuerit ſphaerica radio $= a$ deſcripta, inueſtigare omnes ſuperficies ipſi congruentes.

Solutio.

Cum aequatio pro ſuperficie ſphaerica ſit $z = \sqrt{(aa - xx - yy)}$ poſito $dz = pdx + qdy$ erit $p = \frac{-x}{\sqrt{(aa - xx - yy)}}$ et $q = \frac{-y}{\sqrt{(aa - xx - yy)}}$ vnde

$pp +$

$pp + qq = \frac{xx + yy}{aa - xx - yy}$. Quare ſi pro ſuperficiebus quaeſitis aequatio ſumatur $dz = rdx + sdy$, oportet ſit $rr + ss = \frac{xx + yy}{aa - xx - yy}$. Nunc vero ſtatuatur $x = v\,\text{coſ}\,\Phi$ et $y = v\,\text{ſin.}\,\Phi$, vt fiat $rr + ss = \frac{vv}{aa - vv}$, eritque $dz = dv\,(r\,\text{coſ.}\,\Phi + s\,\text{ſin}\,\Phi) + v\,d\Phi\,(s\,\text{coſ.}\,\Phi - r\,\text{ſin.}\,\Phi)$, pro qua breuitatis gratia ſcribatur $dz = Rdv + Svd\Phi$, vbi perſpicuum eſt etiam fieri oportere $RR + SS = \frac{vv}{aa - vv}$, vnde idoneos valores pro R et S erui conuenit, vt formula $Rdv + Svd\Phi$ integrationem admittat. Hoc autem per problema tertium praeſtari poſſe manifeſtum eſt. Ponatur enim $S = \frac{t}{v}$ et $R = \sqrt{\left(\frac{vv}{aa - vv} - \frac{tt}{vv}\right)}$ et habebitur

$$dz = dv\sqrt{\left(\frac{vv}{aa - vv} - \frac{tt}{vv}\right)} + t\,d\Phi \text{, ſeu}$$

$$z = t\Phi + \int\left(dv\sqrt{\left(\frac{vv}{aa - vv} - \frac{tt}{vv}\right)} - \Phi\,dt\right).$$

Quaeratur eiusmodi functio ipſarum v et t, vt fiat

$$dP = dv\sqrt{\left(\frac{vv}{aa - vv} - \frac{tt}{vv}\right)} + Q\,dt$$

ita vt ſit $P = \int dv\sqrt{\left(\frac{vv}{aa - vv} - \frac{tt}{vv}\right)}$ ſumto t conſtante

et $Q = -t\int\frac{dv}{vv\sqrt{\left(\frac{vv}{aa - vv} - \frac{tt}{vv}\right)}}$ ſumto pariter t conſtante.

Tum igitur ſit $z = t\Phi + \int(dP - Q\,dt - \Phi\,dt)$ ſeu

$$z = P + t\Phi - \int dt\,(Q + \Phi).$$

Quo circa neceſſe eſt ſit $Q + \Phi =$ functioni ipſius t quae ſit T, vnde ſit $\Phi = T - Q$ et

$$z = P + Tt - Qt - \int T\,dt = P - Qt + \int t\,dT.$$

 Scho-

Scholion.

24. En ergo ſolutionem huius problematis difficillimi vnde ſimul patet ſimili modo problema multo generalius quo $rr+ss$ ſeu RR+SS aequari debeat functioni cuicunque ipſius v reſolui potuiſſe. Verum cum hic valores litterarum P et Q nonniſi maxime tranſcendentaliter aſſignari poſſint, neutiquam patet, quomodo vnica ſaltem ſuperficies ſimplicior inueniri queat, quae ſphaericae ſit congruens. Ceterum hic artificia, quibus hactenus formulam $r\,dx + s\,dy$ ad integrabilitatem reuocare licuit diſtinctius expoſuiſſe iuuabit. Hic autem primum obſeruandum eſt in hac formula ternas variabiles contineri, praeter x et y ſcilicet vnam nouam in litteris r et s inuolutam, cuius relatio ad $x\,y$ ea quaeritur, qua illa formula integrabilis reddatur. Artificia autem hic adhibenda eo redeunt, vt per idoneas ſubſtitutiones ternae nouae variabiles t, u et w introducantur, quaeſtioque eo redigatur, vt huiusmodi formula $M\,dt + N\,du$ integrabilis ſit efficienda, tertium enim differentiale dw ſemper eliminare licet, ita vt haec variabilis w tantum in quantitatibus finitis M et N contineatur. Tum autem ſequentibus caſibus ſolutionem elicere licebit,

1°. Si alterutra quantitatum M et N euaneſcat, namque ſi $N = 0$, vt formula $M\,dt$ ſit integrabilis, neceſſe eſt quantitatem M functioni ipſius t aequari; facto igitur $M = F' : t$, vnde relatio inter ternas varia-

variabiles t, u et w generaliſſime definitur, erit $\int M\, dt = F : t$.

2°. Si formula $M\,dt + N\,du$ huiusmodi formam habeat $S(P\,dt + Q\,du)$, vbi P et Q ſint functiones tantum binarum variabilium t et u, tertia vero w in ſolo factore S contineatur. Tum enim ſemper inueniri poteſt multiplicator R vt ſit $R(P\,dt + Q\,du) = dV$ ſicque quantitas V definiri queat, quae erit functio ipſarum t et u. Hoc modo formula abit in, $\frac{S\,dV}{R}$, ac iam ſtatui debet $S = R F' : V$, formulaeque integrale fiet $\int \frac{S}{R} dV = F : V$.

3°. Reſolutio quoque ſuccedit ſi quantitas M tantum ſit functio binarum t et u tertiaque w in ſola N inſit, tum enim eiusmodi functionem binarum t et u quae ſit V inuenire licet, vt ſit $dV = M\,dt + S\,du$ hoc modo formula propoſita hanc induit formam $dV + (N - M)\,du$: ſicque capi debet $N = M + F' : u$ et integrale erit $V + F ; u$.

4°. Si tertia variabilis w ita in vtramque quantitatem M et N ingrediatur, vt binae functiones ipſarum t et u puta P et Q dentur, quibus haec forma $MQ + NP$ a variabili w immunis reddatur, tum ſolutio ſequenti modo obtineri poterit.

$$dt = \frac{Q\,dp - R\,dq}{PQ - RS} \text{ et } du = \frac{P\,dq - S\,dp}{PQ - RS}.$$

Con-

Conſideretur formula differentialis $P\,dt - Q\,du$, quae multiplicatore R integrabilis reddatur; ponaturque $dv = R(P\,dt - Q\,du)$, eritque v functio cognita ipſarum t et u, vnde viciſſim t per u et v definiatur ac fiet $dt = \frac{Q\,du}{P} + \frac{dv}{PR}$. Quare formula propoſita erit:

$\frac{MQ + NP}{P}du + \frac{M\,dv}{PR}$, vbi $\frac{MQ + NP}{P}$ eſt functio ipſarum u et v tantum ſicque reſolutio per n°. 4 abſoluetur.

Scholion 2.

25. De his integrationibus imprimis notandum eſt, eas eſſe generaliſſimas, dum functiones maxime generales cuiuspiam variabilis in integralia introducuntur, pro quibus adeo functiones nullo continuitatis vinculo contentas, quae vt ſupra videmus ex libero manus ductu naſcuntur, aſſumere licet. Quin etiam omnium huius generis quaeſtionum criterium in hoc conſiſtit, vt tales functiones prorſus ab arbitrio noſtro pendentes in earum ſolutiones introducantur.

DE

DE SVMMIS SERIERVM NVMEROS BERNOVLLIANOS INVOLVENTIVM.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Quantopere ſint notatu digni numeri ab Inuentore *Bernoulliani* vocati, quippe quibus olim *Iacobus Bernoulli* in Arte coniectandi eſt vſus ad progreſſiones poteſtatum numerorum naturalium ſummandas, cum ab aliis, qui ſerierum doctrinam nouis inuentis locupletauerunt, tum etiam a me abunde eſt oſtenſum, vbi per eosdem numeros ſerierum poteſtatum reciprocarum ſummas expreſſas dedi. *Bernoullius* quidem progreſſionem horum numerorum ob calculi moleſtiam non vltra quintum terminum continuauit, qui ſunt $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{5}{66}$, atque Auctori vsque ad vndecimas poteſtates ſummandas ſufficiebant. Poſtquam autem ſatis concinnam huius progreſſionis legem detexiſſem, 17 eius primores terminos aſſignaui. Ipſos vero numeros *Bernoullianos* reſpectiue per numeros 6, 10, 14, 18, 22 etc. multiplico quo denominatores fiant ſimplicio-

res, terminosque huius nouae ſeriei litteris $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ etc. deſignans, earum ſequentes reperi valores:

$$\mathfrak{A} = 1$$
$$\mathfrak{B} = \frac{1}{3}$$
$$\mathfrak{C} = \frac{1}{3}$$
$$\mathfrak{D} = \frac{3}{5}$$
$$\mathfrak{E} = \frac{5}{3}$$
$$\mathfrak{F} = \frac{691}{105}$$
$$\mathfrak{G} = \frac{35}{1}$$
$$\mathfrak{H} = \frac{3617}{15}$$
$$\mathfrak{I} = \frac{43867}{21}$$
$$\mathfrak{K} = \frac{1222277}{55}$$
$$\mathfrak{L} = \frac{854513}{3}$$
$$\mathfrak{M} = \frac{1181820455}{273}$$
$$\mathfrak{N} = \frac{76977927}{1}$$
$$\mathfrak{O} = \frac{23749461029}{15}$$
$$\mathfrak{P} = \frac{8615841276005}{231}$$
$$\mathfrak{Q} = \frac{84802531453387}{85}$$
$$\mathfrak{R} = \frac{90219075042845}{3}$$

2. Contemplatio autem ſerierum poteſtatum reciprocarum, quarum ſummas quoties exponens eſt numerus par, per ſimiles poteſtates numeri π peri-

peripheriam circuli, cuius diameter eſt $= 1$, referentis definiri poſſe demonſtraui, horum numerorum nexum multo clarius exhibuit. Si enim has ſummas ſequenti modo deſignamus:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{etc.} = A\pi^2$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{etc.} = B\pi^4$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \text{etc.} = C\pi^6$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \text{etc.} = D\pi^8$$

$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \text{etc.} = E\pi^{10}$$

primum per hos numeros A, B, C, D etc. praecedentes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc. ita determinari oſtendi vt ſit:

ideoque

$$\mathfrak{A} = \frac{1.2.3}{1} A \qquad\qquad A = \frac{2^0 \mathfrak{A}}{1.2.3}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{1.2.3.4.5}{2^2} B \qquad\qquad B = \frac{2^2 \mathfrak{B}}{1.2.3.4.5}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{1.2.3\ldots 7}{2^4} C \qquad\qquad C = \frac{2^4 \mathfrak{C}}{1.2.3\ldots 7}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{1.2.3\ldots 9}{2^6} D \qquad\qquad D = \frac{2^6 \mathfrak{D}}{1.2.3\ldots 9}$$

$$\mathfrak{E} = \frac{1.2.3\ldots 11}{2^8} E \qquad\qquad E = \frac{2^8 \mathfrak{E}}{1.2.3\ldots 11}$$

$$\mathfrak{F} = \frac{1.2.3\ldots 13}{2^{10}} F \qquad\qquad F = \frac{2^{10} \mathfrak{F}}{1.2.3\ldots 13}$$

etc. etc.

3. Porro autem pro litterarum A, B, C, D etc. progreſſione duplicem obſeruaui legem, cuius ope quamlibet per praecedentes determinari licet. Prior lex quemlibet terminum per ſingulos praecedentium ita definit, vt ſit

$$A = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$B = \frac{A}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{2}{1 \cdot 2 \cdots 5}$$

$$C = \frac{B}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{A}{1 \cdot 2 \cdots 5} + \frac{3}{1 \cdot 2 \cdots 7}$$

$$D = \frac{C}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{B}{1 \cdot 2 \cdots 5} + \frac{A}{1 \cdot 2 \cdots 7} - \frac{4}{1 \cdot 2 \cdots 9}$$

$$E = \frac{D}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{C}{1 \cdot 2 \cdots 5} + \frac{B}{1 \cdot 2 \cdots 7} - \frac{A}{1 \cdot 2 \cdots 9} + \frac{5}{1 \cdot 2 \cdots 11}.$$

Altera vero lex commodius quemuis terminum per producta ex binis praecedentibus ſequenti modo exprimit:

$$5B = 2A^2 \quad \text{exiſtente } A = \tfrac{1}{6}$$
$$7C = 4AB$$
$$9D = 4AC + 2BB$$
$$11E = 4AD + 4BC$$
$$13F = 4AE + 4BD + 2CC$$
$$15G = 4AF + 4BE + 4CD$$
$$17H = 4AG + 4BF + 4CE + 2DD$$
etc.

vnde etiam mihi quidem has ſeries tam longe continuare licuit.

4. His expoſitis hoc loco in ſummas plurium ſerierum, quorum termini iſtos numeros A, B, C, D, E etc. praeter alios factores, quorum lex per ſe eſt manifeſta, inuoluunt, inquirere conſtitui, ita v mihi in genere propoſita ſit inueſtigatio ſummae huius ſeriei

$S = \alpha$

$$S = \alpha A x^2 + \beta B x^4 + \gamma C x^6 + \delta D x^8 + \varepsilon E x^{10} + \text{etc.}$$

dum litterae α, β, γ, δ etc. ſeriem quamcunque cognitam conſtituunt, eximias enim hinc enaſci ſeries, quarum ſummae omni attentione ſint dignae pluribus ſpeciminibus iam oſtendi. Incipio igitur ab hac ſerie:

$$S = A x^2 + B x^4 + C x^6 + D x^8 + E x^{10} + \text{etc.}$$

quam per priorem legem progreſſionis litterarum A, B, C, D etc. manifeſto ex euolutione huius fractionis reſultare manifeſtum eſt:

$$S = \frac{\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} x^2 - \frac{2}{1\cdot 2 \cdots 5} x^4 + \frac{3}{1\cdot 2 \cdots 7} x^6 - \frac{4}{1\cdot 2 \cdots 9} x^8 + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} x^2 + \frac{1}{1\cdot 2 \cdots 5} x^4 - \frac{1}{1\cdot 2 \cdots 7} x^6 + \frac{1}{1\cdot 2 \cdots 9} x^8 - \text{etc.}}$$

cuius denominator exhibet valorem $\frac{\text{ſin.}\, x}{x}$; eiusque differentiale $\frac{dx \,\text{coſ.}\, x}{x} - \frac{dx \,\text{ſin.}\, x}{xx}$ per $\frac{-x}{2dx}$ multiplicatum ipſum praebet numeratorem, ita vt ſit:

$$s = \frac{\text{ſin.}\, x - x \,\text{coſ.}\, x}{2\, \text{ſin.}\, x} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} x \,\text{cot.}\, x$$

hincque ſumma iſtius ſeriei

$$A x^2 + B x^4 + C x^6 + D x^8 + E x^{10} + \text{etc.} = \tfrac{1}{2} - x \,\text{cot.}\, x$$

vbi notari meretur ſi x euaneſcat, fore ſummam $= \frac{1}{6} xx$ ob $\text{cot.}\, x = \frac{1 - \frac{1}{3} xx}{x}$.

5. Ponamus $xx = -yy$, totamque ſeriem negatiue exponamus, vt quaeratur haec ſumma:

$$s = A yy - B y^4 + C y^6 - D y^8 + E y^{10} - \text{etc.}$$

atque cum iam ſit per legem priorem:

$$s = \frac{\frac{1}{1.2.3}y^2 + \frac{2}{1.2....5}y^4 + \frac{3}{1.2....7}y^6 + \frac{4}{1.2....9}y^8 + \text{etc.}}{1 + \frac{1}{1.2.3}y^2 + \frac{1}{1.2....5}y^4 + \frac{1}{1.2....7}y^6 + \frac{1}{1.2...9}y^8 + \text{etc.}}$$

cuius denominator eſt $\frac{1}{2y}(e^y - e^{-y})$, eiusque differentiale $\frac{-dy}{2yy}(e^y - e^{-y}) + \frac{dy}{2y}(e^y + e^{-y})$, quod per $\frac{y}{2dy}$ multiplicatum dat numeratorem $= -\frac{1}{4y}(e^y - e^{-y}) + \frac{1}{4}(e^y + e^{-y})$ ita vt huius ſeriei ſumma ſit

$$s = \frac{y}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}} - \frac{1}{2}.$$

Caſus hic notari meretur quo $y = 1$, haecque ſeries ſummatur:

$$A - B + C - D + E - \text{etc.} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ee+1}{ee-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{ee-1}.$$

Si hic pro litteris A, B, C, D etc. ipſae ſeries aſſumtae reſtituantur, et quatenus fieri poteſt, in ſummas colligantur, erit

$$\frac{1}{\pi\pi + 1} + \frac{1}{4\pi\pi + 1} + \frac{1}{9\pi\pi + 1} + \frac{1}{16\pi\pi + 1} + \text{etc.} = \frac{1}{ee-1}.$$

6. Inuenta ſumma ſeriei

$$Ax^2 + Bx^4 + Cx^6 + Dx^8 + \text{etc} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x \cot. x$$

in qua ſimul alteram complecti licet

$$Ay^2 - By^4 + Cy^6 - Dy^8 + \text{etc.} = \frac{y}{2} \cdot \frac{e^{2y}+1}{e^{2y}-1} - \frac{1}{2}$$

tam ope differentiationis quam integrationis innumerabiles aliae inde deduci poſſunt quarum ſumma pariter

pariter aſſignari valet. Multiplicata ſcilicet illa ſerie per x^n differentiatio dabit

$$(n+2)Ax^{n+1}+(n+4)Bx^{n+3}+(n+6)Cx^{n+5}+(n+8)Dx^{n+7}\text{ etc.}$$

$$=\tfrac{n}{2}x^{n-1}-\tfrac{(n+1)}{2}x^n\cot.x+\frac{x^{n+1}}{2\,\text{ſin}\,x^2}\ \text{ſiue}$$

$$(n+2)Ax^2+(n+4)Bx^4+(n+6)Cx^6+(n+8)Dx^8\text{ etc.}$$

$$=\tfrac{n}{2}-\tfrac{1}{2}(n+1)x\cot.x+\frac{xx}{2\,\text{ſin}.x^2}$$

ſin autem illa ſeries per $x^{n-1}dx$ multiplicata integretur, prodibit ſequens ſummatio:

$$\frac{A}{n+2}x^{n+2}+\frac{B}{n+4}x^{n+4}+\frac{C}{n+6}x^{n+6}+\frac{D}{n+8}x^{n+8}+\text{ etc.}$$

$$=\frac{1}{2n}x^n-\tfrac{1}{2}\int x^n\,dx\cot.x$$

quae ſumma vt cognita eſt ſpectanda, etiamſi formulae $\int x^n\,dx\cot.x$ integrale euolui vel exprimi finite nequit. Quin etiam ambabus operationibus combinandis ac repetendis infinitae ſeries formae

$$\alpha Ax^2+\beta Bx^4+\gamma Cx^6+\delta Dx^8+\text{ etc.}$$

obtinebuntur, vbi literae α, β, γ, δ etc. ſint producta ex duabus pluribusue fractionibus, quarum tam numeratores quam denominatores progreſſiones arithmeticas conſtituant. Veluti ſi ſeries per differentiationem inuenta per $\frac{dx}{x}$ multiplicetur et integretur orietur:

$$\frac{n+2}{2}Ax^2+\frac{n+4}{4}Bx^4+\frac{n+6}{6}Cx^6+\text{ etc.}=\tfrac{n}{2}l\frac{x}{\text{ſin}.x}-\frac{x\,\text{coſ}.x}{2\,\text{ſin}.x}+\tfrac{1}{2}$$

ita

ita vt ſit.

$$\tfrac{1}{2}A x^2 + \tfrac{1}{4}B x^4 + \tfrac{1}{6}C x^6 + \tfrac{1}{8}D x^8 + \text{etc.} = \tfrac{1}{2} l \frac{x}{\sin. x}$$

7. Datur vero praeterea alia methodus omnino ſingularis ex ſerie inuenta alias innumerabiles eruendi quarum ſumma itidem aſſignari queat. Hunc in finem ſeriem principalem ita repraeſento:

$$A a^2 x^2 + B a^4 x^4 + C a^6 x^6 + D a^8 x^8 + \text{etc.} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} a x \cot. a x$$

eamque multiplico per eiusmodi formulam differentialem $X dx$, vt ſi poſt integrationem ipſi x certus valor $x = f$ tribuatur, integrale $\int X x^n dx$ valorem nanciſcatur concinnum: ſcilicet vt fiat:

$$\int X x^2 dx = \alpha \int X dx; \ \int X x^4 dx = \beta \int X x^2 dx; \ \int X x^6 dx = \gamma \int X x^3 dx \text{ etc.}$$

quo facto naſcetur huiusmodi ſeries:

$$\alpha A a^2 + \alpha\beta B a^4 + \alpha\beta\gamma C a^6 + \alpha\beta\gamma\delta D a^8 + \text{etc.} = \tfrac{1}{2} - \frac{a \int X x dx \cot. a x}{2 \int X dx}$$

vbi X ita accipi poteſt, vt $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. fiant vel numeri in arithmetica progreſſione procedentes, vel fractiones, quarum tam numeratores quam denominatores talem progreſſionem conſtituant. Veluti ſi ſumatur.

$X = x^{m-1}(1-x^2)^k$ erit poſito $x = 1$ | ideoque

$$\int x^{m+1} dx (1-x^2)^k = \frac{m}{m+2k+2} \int x^{m-1} dx (1-x^2)^k \qquad \alpha = \frac{m}{m+2k+2}$$

$$\int x^{m+3} dx (1-x^2)^k = \frac{m+2}{m+2k+4} \int x^{m+1} dx (1-x^2)^k \qquad \beta = \frac{m+2}{m+2k+4}$$

$$\int x^{m+5} dx (1-x^2)^k = \frac{m+4}{m+2k+6} \int x^{m+3} dx (1-x^2)^k \qquad \gamma = \frac{m+4}{m+2k+6}$$

$$\int x^{m+7} dx (1-x^2)^k = \frac{m+6}{m+2k+8} \int x^{m+5} dx (1-x^2)^k \qquad \delta = \frac{m+6}{m+2k+8}$$

etc.

At

At ſi ſumatur $X dx = e^{-mxx} x^n dx$ erit poſito poſt integrationem $x = \infty$

	ideoque
$\int e^{-mxx} x^{n+2} dx = \frac{n+1}{2m} \int e^{-mxx} x^n dx$	$\alpha = \frac{n+1}{2m}$
$\int e^{-mxx} x^{n+4} dx = \frac{n+3}{2m} \int e^{-mxx} x^{n+2} dx$	$\beta = \frac{n+1}{2m}$
$\int e^{-mxx} x^{n+6} dx = \frac{n+5}{2m} \int e^{-mxx} x^{n+4} dx$	$\gamma = \frac{n+5}{2m}$

etc.

Sumto autem $X dx = x^{n-1} dx (lx)^m$ fit poſito $x = 1$ poſt integrationem:

$$\int x^{n-1} dx (lx)^m = \pm \frac{1.\,2.\,3 \ldots\ldots m}{n^{m+1}}$$

ſigno + valente ſi m ſit numerus par, contra ſigno −.

8. His autem transformationibus, quae alibi fuſius ſunt expoſitae, hic non immoror, ſed alium fontem, vnde huiusmodi ſeries promanant, contemplabor quem olim iam mihi aperuit ſummatio progreſſionum generalis ſcilicet ſi ſeriei cuiuscunque terminus generalis, ſeu is qui indici x conuenit, ponatur $= X$, vt ſit X functio quaecunque ipſius x, huiusque ſeriei terminus ſummatorius ſtatuatur $= S$ reperi fore per numeros *Bernoullianos* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc.

$$2S = 2\int X dx + X + \frac{\mathfrak{A}\, dX}{1.\,2.\,3\, dx} - \frac{\mathfrak{B}\, d^3 X}{1.\,2 \ldots 5\, dx^3} + \frac{\mathfrak{C}\, d^5 X}{1.\,2 \ldots 7\, dx^5} - \frac{\mathfrak{D}\, d^7 X}{1.\,2 \ldots 9\, dx^7} + \text{etc,}$$

vnde ſi alteri numeri A, B, C, D etc. ad ſummas poteſtatum reciprocarum relati introducantur, deducimus:

$$2S = 2\int X dx + X + \frac{A dX}{1 dx} - \frac{B d^3X}{2^2 dx^3} + \frac{C d^5X}{2^4 dx^5} - \frac{D d^7X}{2^6 dx^7} + \text{etc.}$$

Quare ſi ſeriem cuius terminus generalis eſt X et ſummatorius $= S$ pro lubitu accipiamus habebimus hanc ſummationem:

$$\frac{A dX}{2 dx} - \frac{B d^3X}{2^3 dx^3} + \frac{C d^5X}{2^5 dx^5} - \frac{D d^7X}{2^7 dx^7} + \text{etc.} = S - \int X dx - \tfrac{1}{2}X.$$

Quaecunque ergo pro X ſumatur functio ipſius, conceſſa progreſſionis, cuius X eſt terminus generalis, ſummatione iſtius ſeriei litteras A, B, C, D etc. inuoluentis ſummam aſſignare poterimus, etiamſi forte eiusdem ſummatio ſecundum praecepta modo expoſita inſtituta ſummis difficultatibus ſit obnoxia.

9. Primum ergo ipſi X tribuamus eiusmodi valorem vt ſit $X = \frac{1}{x^n}$; vnde ſit

$$\frac{dX}{dx} = \frac{-n}{x^{n+1}};\ \frac{d^3X}{dx^3} = \frac{-n(n+1)(n+2)}{x^{n+3}};\ \frac{d^5X}{dx^5} = \frac{-n(n+1)\ldots\ldots(n+4)}{x^{n+5}}$$

et quia eſt $\int X dx = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + O$ atque

$$S = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \ldots + \frac{1}{x^n}$$

habebi-

habebimus hanc ſeriem:

$$\frac{-nA}{2x^{n+1}}+\frac{n(n+1)(n+2)B}{2^3x^{n+3}}-\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)C}{2^5x^{n+5}}+\text{etc.}$$

$$=S-\frac{1}{2x^n}+\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}-O$$

vbi conſtantem O ex caſu quodam cognito definiri conuenit, quo ipſi x certus tribuitur valor. Ita poſito $x=\infty$, quoniam tum tota ſeries in nihilum abit conſtans haec O exprimet ſummam huius ſeriei in infinitum continuatae $1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\text{etc.}$ quam nouimus per quadraturam circuli π exhiberi poſſe quoties exponens n eſt numerus par. Hos ergo caſus primum euoluam.

Caſus I. quo $n=2$.

10. Hoc ergo caſu $n=2$ fit conſtans $O=\frac{\pi\pi}{6}=A\pi^2$, poſitaque huius progreſſionis ſumma indefinite

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{x^2}=S$$

habebimus hanc ſummationem:

$$-\frac{2A}{2x^3}+\frac{2.3.4B}{2^3x^5}-\frac{2.3.4.5.6C}{2^5x^7}+\frac{2.3\ldots\ldots8D}{2^7x^9}-\text{etc.}$$

$$=S-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x}-A\pi^2 \text{ ſeu}$$

$$\frac{1.2A}{2^1x}-\frac{1.2.3.4B}{2^3x^3}+\frac{1.2\ldots\ldots6C}{2^5x^5}-\frac{1.2\ldots\ldots8D}{2^7x^7}+\text{etc.}$$

$$=A\pi^2x^2-x+\tfrac{1}{2}-Sxx.$$

Cuius ergo ſumma quoties x eſt numerus integer exhiberi poteſt. Ita obtinebimus:

$$\frac{1.2\,A}{2} - \frac{1.2.3.4\,B}{2^3} + \frac{1\ldots\ldots6\,C}{2^5} - \frac{1\ldots\ldots8\,D}{2^7} + \text{etc.} = A\pi^2 - \tfrac{3}{2}$$

$$\frac{1.2\,A}{4} - \frac{1\ldots\ldots4\,B}{4^3} + \frac{1\ldots\ldots6\,C}{4^5} - \frac{1\ldots\ldots8\,D}{4^7} + \text{etc.} = 4\,A\,\pi^2 - \tfrac{3}{2} - 4(1 + \tfrac{1}{4})$$

$$\frac{1.2\,A}{6} - \frac{1\ldots\ldots4\,B}{6^3} + \frac{1\ldots\ldots6\,C}{6^5} - \frac{1\ldots\ldots8\,D}{6^7} + \text{etc.} = 9\,A\,\pi^2 - \tfrac{5}{2} - 9(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9})$$

$$\frac{1.2\,A}{8} - \frac{1\ldots\ldots4\,B}{8^3} + \frac{1\ldots\ldots6\,C}{8^5} - \frac{1\ldots\ldots8\,D}{8^7} + \text{etc.} = 16\,A\,\pi^2 - \tfrac{7}{2} - 16(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16}).$$

II. Inueſtigemus iam easdem ſeries methodo ſupra expoſita, et cum ibi inueniſſemus:

$$Aay - Ba^3y^3 + Ca^5y^5 - Da^7y^7 + \text{etc.} = \tfrac{1}{2}.\frac{e^{2ay}+1}{e^{2ay}-1} - \frac{1}{2\,ay}$$

multiplicemus per $e^{-y}y\,dy$, et integratione ita inſtituta vt integralia euaneſcant poſito $y = 0$, ſtatuamus $y = \infty$, ſicque adipiſcimur:

$$\int e^{-y}y^2dy = -e^{-y}y^2 - 2e^{-y}y - 2.1\,e^{-y} + 1.2 = 1.2$$

$$\int e^{-y}y^4dy = -e^{-y}(y^4 + 4y^3 + 4.3y^2 + 4.3.2.y + 4.3.2.1.) + 1.2.3.4 = 1.2.3.4$$

ſimilique modo

$$\int e^{-y}y^6dy = 1.2.3.4.5.6;\quad \int e^{-y}y^8dy = 1.2\ldots.8.$$

Hinc itaque perueniemus ad hanc ſummationem

$$1.2Aa - 1\ldots4Ba^3 + 1\ldots\ldots6Ca^5 - \text{etc.} = \tfrac{1}{2}\int e^{-y}y\,dy.\frac{e^{2ay}+1}{e^{2ay}-1} - \frac{1}{2\,a}$$

Pona-

Ponamus nunc $a = \frac{1}{2}$ vt prodeat haec ſeries:

$$\frac{1.2\,A}{2} - \frac{1.2.3.4\,B}{2^3} + \frac{1.2\ldots.6\,C}{2^5} - \frac{1.2\ldots.8\,D}{2^7} + \text{etc.}$$

cuius ſummam nouimus eſſe $= A\pi^2 - \frac{3}{2}$, nunc autem eandem ita expreſſam inuenimus:

$$\tfrac{1}{2}\int e^{-y} y\,dy . \frac{e^y + 1}{e^y - 1} - 1 = \tfrac{1}{2}\int y\,dy . \frac{1 + e^{-y}}{e^y - 1} - 1$$

ſi modo poſt integrationem ponatur $y = \infty$. Cuius veritas hoc modo oſtendi poteſt: ſit $e^{-y} = z$ et nunc integratione ita abſoluta, vt integrale euaneſcat poſito $z = 1$, ſtatui oportet $z = 0$, quae ſubſtitutio praebet

$$\tfrac{1}{2}\int y\,dy . \frac{1+e^{-y}}{e^y - 1} = \tfrac{1}{2}\int dz . lz \frac{1+z}{1-z} = \int dz\,lz . (\tfrac{1}{2} + z + z^2 + z^3 + z^4 + \text{etc.}),$$

Verum ob $\int z^{n-1} dz\,lz = \frac{z^n}{n} lz - \frac{z^n}{nn} + \frac{1}{nn}$ facto $z = 0$ fit $\int z^{n-1} dz\,lz = \frac{1}{nn}$, hincque per ſeriem

$$\tfrac{1}{2}\int y\,dy . \frac{1 + e^{-y}}{e^y - 1} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \text{etc.} = A\pi\pi - \tfrac{1}{2}$$ vti oportet.

12. Facilius idem oſtenditur ponendo $1 - z = v$ ſeu $z = 1 - v$, vt iam integralia a termino $v = 0$ vsque ad terminum $v = 1$ extendi debeant; tum autem noſtra ſumma ita exprimetur $-\frac{1}{2}\int \frac{(2-v)\,dv}{v}\, l(1-v).$

$l(1-v)-1$, quam aequalem eſſe oportet ipſi $A\pi\pi-\frac{3}{2}$, ita vt ſit

$$A\pi\pi = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\int \tfrac{2\,dv}{v}\, l(1-v) + \tfrac{1}{2}\int dv\, l(1-v)$$

at $\int dv\, l(1-v) = -(1-v)\,l(1-v) + (1-v) - 1 = -1$ ſicque ſit neceſſe eſt $A\pi\pi = -\int \frac{dv}{v}\, l(1-v)$, quod per ſe eſt manifeſtum. Cum enim ſit

$$-l(1-v) = v + \tfrac{1}{2}v^2 + \tfrac{1}{3}v^3 + \tfrac{1}{4}v^4 + \text{etc.}$$

erit integratione ſecundum legem praeſcriptam inſtituta:

$$-\int \tfrac{dv}{v}\, l(1-v) = 1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \text{etc.} = A\pi^2.$$

13. Euoluamus etiam ſimili modo caſum $a = \frac{1}{4}$ atque oſtendi oportebit fore:

$$\tfrac{1}{2}\int e^{-y}\, y\, dy.\, \frac{e^{\frac{y}{2}}+1}{e^{\frac{y}{2}}-1} - 2 = 4A\pi^2 - \tfrac{3}{2} - 4\left(1+\tfrac{1}{4}\right)$$

ſeu $\int e^{-y}\, y\, dy.\, \frac{e^{\frac{y}{2}}+1}{e^{\frac{y}{2}}-1} = 8A\pi^2 + 1 - 8\left(1+\frac{1}{4}\right) = 8A\pi^2 - 9.$

Ponamus $e^{\frac{-y}{2}} = 1-v$, vt iam integrale a termino $v=0$ vsque ad $v=1$ extendi debeat, et habebimus ob $e^{-y} = (1-v)^2$, $y = -2\,l(1-v)$, et $dy = \frac{2.dv}{1-v}$ hanc aequalitatem demonſtrandam:

$$-4\int \frac{2-3v+vv}{v}\, dv\, l(1-v) = 8A\pi^2 - 9$$

verum

verum vti iam obſeruauimus eſt

$$\int dv\,l(1-v) = -1 \quad \text{et} \quad \int v\,dv\,l(1-v) = -\tfrac{3}{4}$$

vnde conficitur

$$-8\int \tfrac{dv}{v} l(1-v) - 12 + 3 = 8A\pi^2 - 9 \quad \text{ſeu} \quad \int \tfrac{dv}{v} l(1-v) = A\pi^2.$$

14. Simili modo ſi capiatur $a = \frac{1}{6}$ oſtendi debet eſſe

$$\tfrac{1}{2}\int e^{-y} y\,dy . \frac{e^{\frac{y}{3}}+1}{e^{\frac{y}{3}}-1} - 3 = 9A\pi^2 - \tfrac{5}{2} - 9\left(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9}\right)$$

ſeu $\int e^{-y} y\,dy . \frac{e^{\frac{y}{3}}+1}{e^{\frac{y}{3}}-1} = 18A\pi^2 + 1 - 18\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right).$

Ponamus primo $e^{\frac{-y}{3}} = z$ vt ſit $y = -3lz$ et $dy = \frac{-3dz}{z}$ habebimusque:

$$9\int zz\,dz\,lz . \frac{1+z}{1-z} = 9\int dz\left(-zz - 2z - 2 + \frac{2}{1-z}\right) lz$$

at eſt $\int zz\,dz\,lz = +\frac{1}{9}$, $\int z\,dz\,lz = +\frac{1}{4}$; $\int dz\,lz = +1$ vnde noſtra formula integralis euadit

$$18\int \tfrac{dz}{1-z} lz - 18\left(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9}\right) + 1$$

ita vt ſit $\int \frac{dz}{1-z} lz = A\pi^2$ vti iam ſupra oſtendimus atque hoc modo etiam ſequentium caſuum veritas euincetur.

15. Sin autem ſumamus $a = 1$, vt ſummanda ſit haec ſeries:

$1.2A - 1.2.3.4B + 1\ldots6C - 1\ldots8D +$ etc.
quoniam fit $x = \frac{1}{2}$, ex §. 10 ſummam aſſignare non licet, ſiquidem valor progreſſionis $S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{xx}$ quando terminorum numerus $= \frac{1}{2}$ non conſtat. Altera vero methodus eius ſummam praebet:

$$\tfrac{1}{2}\int e^{-y} y\,dy.\ \frac{1 + e^{-2y}}{1 - e^{-2y}} - \tfrac{1}{2}$$

quae poſito $e^{-y} = z$ in hanc formam transmutatur

$$\tfrac{1}{2}\int dz\,lz.\ \frac{1+zz}{1-zz} - \tfrac{1}{2} = \int \frac{dz\,lz}{1-zz} - \tfrac{1}{2}\int dz\,lz - \tfrac{1}{2}$$

et quia $\int dz\,lz = 1$, fiet ea

$$\int \frac{dz\,lz}{1-zz} - 1 = 1 + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{25} + \tfrac{1}{49} + \text{etc.} - 1 = \tfrac{3}{4}A\pi\pi - 1.$$

Quod ſi iam ponamus ſumto $x = \frac{1}{2}$ fieri $S = \Delta$ eadem ſumma reperitur $= \frac{1}{4}A\pi\pi - \frac{1}{4}\Delta$ vnde concludimus fore $\frac{3}{4}A\pi\pi - 1 = \frac{1}{4}A\pi\pi - \frac{1}{4}\Delta$ ideoque quantitas illa incognita $\Delta = 4 - 2A\pi\pi$ ex quo hanc progreſſionem interpolare licebit

1	$4 - 2A\pi\pi$
$1 + \frac{1}{4}$	$4 - 2A\pi\pi + \frac{4}{9}$
$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$	$4 - 2A\pi\pi + \frac{4}{9} + \frac{4}{25}$
$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$	$4 - 2A\pi\pi + \frac{4}{9} + \frac{4}{25} + \frac{4}{49}$
$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25}$	$4 - 2A\pi\pi + \frac{4}{9} + \frac{4}{25} + \frac{4}{49} + \frac{4}{81}$

etc.

et quoniam termini infiniteſimi ſunt aequales, fit

$$1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16}\ \text{etc.} = 4\left(1 + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{25} + \text{etc.}\right) - 2A\pi\pi$$

quae

quae aequalitas per ſe eſt manifeſta cum ſit

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16} \text{ etc.} = A\pi\pi \text{ et } 1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\text{ etc.} = \frac{3}{4}A\pi\pi.$$

16. Conſideremus rem in genere ſitque $a=\frac{m}{n}$ vt ſummanda ſit haec ſeries infinita.

$$\frac{1.2\,A\,m}{n}-\frac{1.2\ldots 4\,B\,m^3}{n^3}+\frac{1.2\ldots 6\,C\,m^5}{n^5}-\frac{1.2\ldots 8\,D\,m^7}{n^7}+\text{ etc.}$$

ac poſito $e^{\frac{-y}{n}}=z$, reperitur eius ſumma

$$\frac{1}{2}\int e^{-y}y\,dy.\frac{1+e^{\frac{-2my}{n}}}{1-e^{\frac{-2my}{n}}}-\frac{n}{2m}=\frac{nn}{2}\int z^{n-1}dz\,lz.\frac{1+z^{2m}}{1-z^{2m}}-\frac{n}{2m}$$

quae reducitur ad hanc formam

$$nn\int\frac{z^{n-1}dz\,lz}{1-z^{2m}}-\frac{nn}{2}\int z^{n-1}\,dz\,lz-\frac{n}{2m}.$$

Cum autem ſit $\int z^{n-1}dz\,lz=\frac{-1}{nn}$, per euolutionem primi membri nanciſcimur hanc ſeriem illi aequalem

$$-\frac{1}{2}-\frac{n}{2m}+\frac{nn}{nn}+\frac{nn}{(2m+n)^2}+\frac{nn}{(4m+n)^2}+\frac{nn}{(6m+n)^2}+\text{ etc.}$$

Verum ex §. 10 ob $2x=\frac{n}{m}$ ſeu $x=\frac{n}{2m}$ poſito

$$S=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{x^2}$$

eadem ſumma prodit $\frac{nn}{4mm}A\pi^2-\frac{n}{2m}+\frac{1}{2}-\frac{nn}{4mm}S$ qua cum praecedente comparata colligitur.

$$S=A\pi\pi-\frac{4mm}{(2m+n)^2}-\frac{4mm}{(4m+n)^2}-\frac{4mm}{(6m+n)^2}-\frac{4mm}{(8m+n)^2}-\text{ etc.}$$

ex quo valorem ipſius S aſſignare poterimus, quicunque numerus fractus pro x accipiatur veluti ſi ſtatuatur $x=\frac{\nu}{\mu}$ erit

$$S = A\pi^2 - \frac{\mu\mu}{(\mu+\nu)^2} - \frac{\mu\mu}{(2\mu+\nu)^2} - \frac{\mu\mu}{(3\mu+\nu)^2} - \frac{\mu\mu}{(4\mu+\nu)^2} - \text{etc.}$$

quae ſeries hoc modo immediate per x commodius exhibetur, vt ſit

$$S = A\pi^2 - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x+3)^2} - \frac{1}{(x+4)^2} - \text{etc.}$$

17. Quod hic per tantas ambages inuenimus, ita obuium videtur, vt ſtatim immediate ex ſerie prima deriuari potuiſſet. Cum enim ſit

$$A\pi^2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \text{etc.}$$

hinc vtique manifeſtum eſt fore

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{x^2} = A\pi^2 - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x+3)^2} - \text{etc.}$$

Quia vero illa ſeriei ſumma $A\pi^2$ non eſt veritati conſentanea, niſi littera x denotet numeros integros quo quidem caſu concluſio eſt, perſpicua, eius certitudo pro caſibus quibus x eſt numerus fractus vel adeo irrationalis, maxime adhuc dubia relinquitur, et cum nunc quidem pateat, eam inter veritates eſſe referendam, hoc certe neutiquam ex iſto breui ratiocinio perſpicitur, ac niſi praecedentes rationes negotium confeciſſent, merito maximam haberemus dubitandi rationem. Nunc autem plena fiducia hoc ratiocinium multo latius extendere licet ita vt ſi fuerit

$$S = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \text{etc. in infinitum}$$

hinc

hinc tuto inferre queamus fore generatim

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\ldots+\frac{1}{x^n}=S-\frac{1}{(x+1)^n}-\frac{1}{(x+2)^n}-\frac{1}{(x+3)^n}-\text{etc.}$$

etiamſi x non fuerit numerus integer ſed fractus vel adeo irrationalis quicunque.

Caſus II. quo $n = 4$.

18. Poſito primo indefinite

$$S = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots + \frac{1}{x^4}$$

tum vero hac ſerie in infinitum continuata

$$O = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{etc. in infinitum}$$

vt ſit $O = B\pi^4$, habebimus hanc ſummationem

$$-\frac{4\,A}{2\,x^5} + \frac{4.5.6\,B}{2^3\,x^7} - \frac{4.5.\ldots 8\,C}{2^5\,x^9} + \frac{4.5.\ldots 10\,D}{2^7\,x^{11}} - \text{etc.}$$

$$= S - \frac{1}{2\,x^4} + \frac{1}{3\,x^3} - B\pi^4$$

quae per $-1.2.3\,x^4$ multiplicata abit in hanc

$$\frac{1.2.\ldots 4\,A}{2\,x} - \frac{1.2.\ldots 6\,B}{2^3\,x^3} + \frac{1.2.\ldots 8\,C}{2^5\,x^5} - \frac{1.2.\ldots 10\,D}{2^7\,x^7} + \text{etc.}$$

$$= 1.2.3\,B\pi^4 x^4 + 3 - 2x - 6\,S\,x^4$$

ſicque quoties x eſt numerus integer, iſtius ſeriei ſumma exhiberi poteſt. Per numeros ergo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. erit

$$\frac{4\,\mathfrak{A}}{2\,x} - \frac{6\,\mathfrak{B}}{2\,x^3} + \frac{8\,\mathfrak{C}}{2\,x^5} - \frac{10\,\mathfrak{D}}{2\,x^7} + \text{etc.} = 6\,B\pi^4 x^4 + 3 - 2x - 6\,S\,x^4$$

19. Eiusdem autem ſeriei ſummam ex forma ſupra inuenta definire poſſumus, quae erat:

$$A ay - B a^3 y^3 + C a^5 y^5 - D a^7 y^7 + \text{etc.} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{e^{2ay}+1}{e^{2ay}-1} - \frac{1}{2ay}$$

haec enim per $e^{-y} y^3\, dy$ multiplicata et integratione a termino $y = 0$ vſque ad $y = \infty$ extenſa praebet

$$1.2..4Aa - 1.2..6Ba^3 + 1.2..8Ca^5 - 1.2...10Da^7 + \text{etc.}$$

$$= \tfrac{1}{2} \int e^{-y} y^3\, dy. \frac{1+e^{-2ay}}{1-e^{-2ay}} - \frac{1}{a}$$

Hanc vero formulam integralem ſine ſubſtitutione hoc modo euoluere licet: cum ſit

$$\frac{1+e^{-2ay}}{1-e^{-2ay}} = 1 + 2e^{-2ay} + 2e^{-4ay} + 2e^{-6ay} + 2e^{-8ay} + \text{etc.}$$

multiplicetur per $\tfrac{1}{2} e^{-y} y^3\, dy$, et quoniam in genere eſt

$$\int e^{-my} y^3\, dy = -e^{-my}\left(\frac{y^3}{m} + \frac{3y^2}{m^2} + \frac{3 \cdot 2 \cdot y}{m^3} + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{m^4}\right) + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{m^4} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{m^4}$$

ſumma illa transformatur in hanc ſeriem infinitam

$$-\frac{1}{a} + 3 + \frac{6}{(2a+1)^4} + \frac{6}{(4a+1)^4} + \frac{6}{(6a+1)^4} + \frac{6}{(8a+1)^4} + \text{etc.}$$

Hinc poſito $a = \frac{1}{2x}$ vt prodeat prior ſeries, erit etiam

$$-2x + 3 + \frac{6x^4}{(x+1)^4} + \frac{6x^4}{(x+2)^4} + \frac{6x^4}{(x+3)^4} + \frac{6x^4}{(x+4)^4} + \text{etc.}$$
$$= 6B\pi^4 x^4 + 3 - 2x - 6Sx^4$$

ideoque per $6x^4$ diuidendo

$$B\pi^4 - S = \frac{1}{(x+1)^4} + \frac{1}{(x+2)^4} + \frac{1}{(x+3)^4} + \frac{1}{(x+4)^4} + \text{etc.}$$

prorſus vti ſupra iam animaduertimus.

Caſus

Caſus III. *quo* n *eſt numerus quicunque.*

20. Primum hic obſeruo, ſi ponatur ſeries infinita

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\text{etc.}=O$$

hanc ſeriem ex euolutione huius formulae integralis oriri $\int\frac{dz\,(lz)^{n-1}}{1-z}$, ſi integratio a termino $z=0$ vsque ad terminum $z=1$ extendatur. Cum enim hac lege obſeruata ſit

$$\int z^{m-1}dz(lz)=\tfrac{1}{m}z^m lz-\tfrac{1}{m^2}z^m=-\tfrac{1}{m^2}$$

$$\int z^{m-1}dz(lz)^2=\tfrac{1}{m}z^m(lz)^2-\tfrac{2}{m^2}z^m lz+\tfrac{2.1}{m^3}z^m=+\tfrac{1.2}{m^3}$$

$$\int z^{m-1}dz(lz)^3=-\tfrac{1.2.3}{m^4}$$

$$\int z^{m-1}dz(lz)^4=+\tfrac{1.2.3.4}{m^5}$$

etc.

erit in genere $\pm\int z^{m-1}dz(lz)^{n-1}=+\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{m^n}$ vbi ſignum ſuperius $+$ valet ſi n ſit numerus impar inferius vero $-$, ſi n ſit numerus par. Quam ob rem euolutio formulae $\pm\int\frac{dz}{1-z}(lz)^{n-1}$ praebet hanc ſeriem ſub eadem lege ambiguitatis:

$$1.2.3\ldots(n-1)\left(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\text{etc.}\right)$$

ita vt ſit $O=\frac{\pm 1}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)}\int\frac{dz}{1-z}(lz)^{n-1}$

 21.

21. Simili modo haec ſeries ad datum quemvis terminum indefinite ſummari poterit, ſi enim ponatur:

$$S = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \ldots + \frac{1}{m^n}$$

erit $S = \frac{+1}{1.2.3\ldots.(n-1)}\int\frac{1-z^m}{1-z}dz(lz)^{n-1}$

quae formula veritati eſt conſentanea ſiue m ſit numerus integer ſiue fractus: vnde cum ſit $\frac{\pm 1}{1.2.\ldots.(n-1)}$:

$$\int\frac{z^m dz}{1-z}(lz)^{n-1} = \frac{1}{(m+1)^n} + \frac{1}{(m+2)^n} + \frac{1}{(m+3)^n} + \text{etc.}$$

perſpicuum eſt fore:

$$S = O - \frac{1}{(m+1)^n} - \frac{1}{(m+2)^n} - \frac{1}{(m+3)^n} - \frac{1}{(m+4)^n} - \text{etc.}$$

Quocirca cum ſumto $m = \frac{1}{2}$ ſit

$$\frac{1}{m^n} + \frac{1}{(m+1)^n} + \frac{1}{(m+2)^n} + \text{etc.} = \frac{2^n}{1} + \frac{2^n}{3^n} + \frac{2^n}{5^n} + \frac{2^n}{7^n} + \text{etc.}$$

$= (2^n - 1)O$, hinc elicimus:

$$S = O - (2^n - 1)O + 2^n = 2^n - (2^n - 2)O$$

vnde valores interpolati ipſius S ita ſe habebunt

ſi ſit

ſi ſit	erit S
$m = 0$	0
$m = \frac{1}{2}$	$2^n - (2^n - 2)\,O$
$m = 1$	1
$m = 1\frac{1}{2}$	$2^n + \frac{2^n}{3^n} - (2^n - 2)\,O$
$m = 2$	$1 + \frac{1}{2^n}$
$m = 2\frac{1}{2}$	$2^n + \frac{2^n}{3^n} + \frac{2^n}{5^n} - (2^n - 2)\,O$
$m = 3$	$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$
$m = 3\frac{1}{2}$	$2^n + \frac{2^n}{3^n} + \frac{2^n}{5^n} + \frac{2^n}{7^n} - (2^n - 2)\,O$

etc.

ſi ad ſingulos terminos addatur $(2^n - 2)O$, iique tum per 2^n diuidantur, habebitur interpolatio huius ſeriei

$$0,\ 1,\ 1 + \frac{1}{3^n},\ 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n},\ 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n};\ \text{etc.}$$

22. Cum ſumma ſeriei infinitae O per quadraturam circuli ſeu litteram π ſit aſſignabilis, quoties exponens n fuerit numerus par, notari merentur ſequentium formularum integralium reductiones ad circuli quadraturam:

$\int \frac{dz}{1-z}$

$$\int \frac{dz}{1-z}\, lz = -1.\, A\pi^2 \qquad = -\frac{2^0}{2.\,3}\mathfrak{A}\pi^2$$
$$\int \frac{dz}{1-z}\,(lz)^3 = -1.\,2.\,3\, B\pi^4 \qquad = -\frac{2^2}{4.\,5}\mathfrak{B}\pi^4$$
$$\int \frac{dz}{1-z}\,(lz)^5 = -1.\,2.\,3.\,4.\,5\, C\pi^6 = -\frac{2^4}{6.\,7}\mathfrak{C}\pi^6$$
$$\int \frac{dz}{1-z}\,(lz)^7 = -1.\,2\ldots.7\, D\pi^8 \quad = -\frac{2^6}{8.\,9}\mathfrak{D}\pi^8$$
$$\int \frac{dz}{1-z}\,(lz)^9 = -1.\,2\ldots.9\, E\pi^{10} \quad = -\frac{2^8}{10.\,11}\mathfrak{E}\pi^{10}$$
etc.

Atque hinc eo magis eſt mirandum, quod nullam harum formularum $\int \frac{dz}{1-z}(lz)^2$, $\int \frac{dz}{1-z}(lz)^4$, $\int \frac{dz}{1-z}(lz)^6$ etc. nullo modo ad quampiam quadraturam cognitam reducere liceat, cum tamen ex hoc ordine prima formula $\int \frac{dz}{1-z}(lz)^0$ manifeſto per logarithmos abſoluatur.

23. Scribamus nunc in §. 9. m loco x, et aequationem ibi datam per $-1.\,2.\ldots.(n-1)m^n$ multiplicemus, vt obtineamus hanc ſummationem:

$$\frac{1.\,2\ldots n\, A}{2\, m} - \frac{1.\,2\ldots.(n+2)B}{2^3\, m^3} + \frac{1.\,2\ldots.(n+4)C}{2^5\, m^5} - \frac{1.\,2\ldots.(n+6)D}{2^7\, m^7} + \text{etc.}$$
$$= 1.\,2\ldots.(n-1)(Om^n - Sm^n + \tfrac{1}{2} - \tfrac{m}{n-1})$$

ſimili autem modo quo ſupra ſumus vſi (19), ponendo $a = \frac{1}{2m}$ eiusdem ſeriei ſummam per ſequentem formulam integralem expreſſam inueniemus:

$$\tfrac{1}{2}\int e^{-y} y^{n-1} dy.\frac{1+e^{-y:m}}{1-e^{-y:m}} - 1.\,2\ldots.(n-2)\, m$$

ita

ita vt ſit

$$\tfrac{1}{2}\int e^{-y} y^{n-1} dy . \frac{1+e^{-y:m}}{1-e^{-y:m}} = 1.2 \ldots (n-1)(Om^n - Sm^n + \tfrac{1}{2})$$

atque ob $\frac{1+e^{-y:m}}{1-e^{-y:m}} = -1 + \frac{2}{1-e^{-y:m}}$ erit

$$\int \frac{e^{-y} y^{n-1} dy}{1-e^{-y:m}} = 1, 2 \ldots (n-1) m^n (O - S)$$

quae formula integralis ponendo $e^{-y:m} = z$ ad eam quam modo tractauimus, reducitur ſcilicet $\int \frac{dz}{1-z} (lz)^{n-1}$, ſiquidem eius integrale a termino $z = 1$ vsque ad terminum $z = 0$ extendatur.

Caſus IV. quo $n = 1$.

24. Hic caſus peculiarem tractationem poſtulat, quia ſeriei $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ etc. ſumma eſt infinita ſit ergo indefinite

$$S = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots\ldots + \tfrac{1}{x}$$

vt quia ob $X = \frac{1}{x}$ eſt $\int X dx = lx$, habebimus hanc ſummationem

$$\frac{-1A}{2x^2} + \frac{1.2.3B}{2^3 x^4} - \frac{1.2 \ldots 5C}{2^5 x^6} + \frac{1.2 \ldots 7D}{2^7 x^8} - \text{etc.} = S - lx - \frac{1}{2x} - O$$

ſeu per $-x$ multiplicando:

$$\frac{1A}{2x} - \frac{1.2.3B}{2^3 x^3} + \frac{1.2 \ldots 5C}{2^5 x^5} - \frac{1.2 \ldots 7D}{2^7 x^7} + \text{etc.} = (O-S)x + \tfrac{1}{2} + xlx.$$

vbi conſtantem O ex caſu per ſe cognito definiri oportet. Veluti ſi ſumatur $x = 1$, ob $S = 1$ et $lx = 0$, erit

 $O - \frac{1}{2}$

$$O-\frac{1}{2}=\frac{1A}{2}-\frac{1.2.3B}{2^3}+\frac{1.2\ldots5C}{2^5}-\frac{1.2\ldots7D}{2^7}+\text{etc.}$$

Quo autem iſte valor ipſius O facilius obtineatur, ponatur $x=10$, et cum fiat:

$$(O-1-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5}\ldots\ldots-\tfrac{1}{10}).10+\tfrac{1}{2}+10l10=$$
$$\frac{1A}{20}-\frac{1.2.3B}{20^3}+\frac{1.2\ldots5C}{20^5}-\frac{1.2\ldots7D}{20^7}+\text{etc.}$$

hinc valor ipſius O per ſeriem maxime conuergentem eruitur:

$$O=0,5772156649015325$$

qui numerus eo maiori attentione dignus videtur, quod eum, cum olim in hac inueſtigatione multum ſtudii conſumſiſſem, nullo modo ad cognitum quantitatum genus reducere valui. Eo autem invento viciſſim ſeriei harmonicae ad quotcunque terminos continuatae ſumma facile aſſignatur, cum ſit

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\ldots\ldots+\tfrac{1}{x}=$$
$$O+lx+\frac{1}{2x}-\frac{1A}{2x^2}+\frac{1.2.3B}{2^3x^4}-\frac{1.2\ldots5C}{2^5x^6}+\frac{1.2\ldots7D}{2^7x^8}-\text{etc.}$$

25. Cum autem ſcripta littera m loco x ſeriei

$$\frac{1A}{2m}-\frac{1.2.3B}{2^3m^3}+\frac{1.2\ldots5C}{2^5m^5}-\frac{1.2\ldots7D}{2^7m^7}\text{ etc.}$$

ſumma, quae modo prodiit $=(O-S)m+\frac{1}{2}+mlm$ exiſtente $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots\frac{1}{m}$, etiam ex hac ſerie:

$$Aay-Ba^3y^3+Ca^5y^5-Da^7y^7+\text{etc.}=\tfrac{1}{2}.\frac{1+e^{-2ay}}{1-e^{-2ay}}-\frac{1}{2ay}$$

$$=-\tfrac{1}{2}$$

$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2ay} + \frac{1}{1-e^{-2ay}}$ definiri poſſit, hanc operationem ſuſcipiamus. Multiplicemus ſcilicet per $e^{-y}\,dy$ et integrale a termino $y=0$ vsque ad $y=\infty$ extendamus, et quia in genere eſt $\int e^{-y} y^{\mu}\, dy = 1.\,2.\,3 \ldots\ldots \mu$, nanciſcemnr

$$1 A a - 1.2.3 B a^3 + 1.2 \ldots\ldots 5 C a^5 - 1.2 \ldots\ldots 7 D a^7 + \text{etc.}$$

$$= -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2a} \int \frac{e^{-y}\,dy}{y} + \int \frac{e^{-y}\,dy}{1-e^{-2ay}}.$$

Quare poſito $a = \frac{1}{2m}$ erit

$$(O-S)m + \tfrac{1}{2} + m\,l\,m = -\tfrac{1}{2} - m\int \frac{e^{-y}\,dy}{y} + \int \frac{e^{-y}\,dy}{1-e^{-y:m}}$$

ideoque poſito $m = 1$, fiet

$$O = -\int \frac{e^{-y}\,dy}{y} + \int \frac{e^{-y}\,dy}{1-e^{-y}}$$

ita vt numerus O quem quaerimus, duplicem quantitatem tranſcendentem inuoluat.

26. Transformemus has formulas ope ſubſtitutionis $e^{-y} = z$ fietque integralia a termino $z=1$ vsque ad $z=0$ extendendo

$$O = -\int \frac{dz}{lz} - \int \frac{dz}{1-z} = -\int \frac{dz(1-z+lz)}{(1-z)lz}.$$

Vel ſtatuamus $1-z=v$, vt iam integralia a termino $v=0$ vsque ad $v=1$ extendi debeant, provenietque

$$O = \int \frac{dv}{l(1-v)} + \int \frac{dv}{v} = \int \frac{v + l(1-v)}{v\,l(1-v)}\, dv.$$

At maxima difficultas hic in eo conſiſtit, quod vtraque pars ſeorſim euoluta praebeat numerum infinite magnum quae autem duo infinita neceſſario ſe mutuo ita tollere debent vt pro O obtineatur valor ille finitus ſupra aſſignatus.

Retenta autem priori forma integralia more ſolito a termino $z = 0$ ad $z = 1$ extendamus, vt ſit $O = \int \frac{dz}{lz} + \int \frac{dz}{1-z}$, et cum denotante i numerum infinitum ſit $lz = i(z^{1:i} - 1)$, erit

$O = \int \frac{dz}{1-z} - \frac{1}{i} \int \frac{dz}{1-z^{1:i}}$. Iam ponamus $z = u^i$, vt fiat

$$O = i \int \frac{u^{i-1} du}{1-u^i} - \int \frac{u^{i-1} du}{1-u}$$

quarum formularum euolutio praebet:

$$\begin{aligned} O = u^i & \qquad + \tfrac{1}{2} u^{2i} \qquad\qquad + \tfrac{1}{3} u^{3i} \text{ etc.} \\ - \tfrac{1}{i} u^i - \tfrac{1}{i+1} u^{i+1} \ldots\ldots & - \tfrac{1}{2i} u^{2i} - \tfrac{1}{2i+1} u^{2i+1} \ldots\ldots - \tfrac{1}{3i} u^{3i} - \tfrac{1}{3i+1} u^{3i+1} \text{ etc.} \end{aligned}$$

et ponendo vti oportet $u = 1$, ſit

$$\begin{aligned} O = {} & + 1 - \left(\tfrac{1}{i} + \tfrac{1}{i+1} + \tfrac{1}{i+2} \ldots\ldots + \tfrac{1}{2i-1}\right) \\ & + \tfrac{1}{2} - \left(\tfrac{1}{2i} + \tfrac{1}{2i+1} + \tfrac{1}{2i+2} \ldots\ldots + \tfrac{1}{3i-1}\right) \\ & + \tfrac{1}{3} - \left(\tfrac{1}{3i} + \tfrac{1}{3i+1} + \tfrac{1}{3i+2} \ldots\ldots + \tfrac{1}{4i-1}\right) \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

vbi notandum eſt harum progreſſionum harmonicarum primam $\frac{1}{i} + \frac{1}{i+1} + \frac{1}{i+2} \ldots\ldots + \frac{1}{2i-1}$ ob i numerum infinitum exprimere $l\,2$ ſecundam $l\frac{3}{2}$, tertiam

tertiam $l\frac{4}{3}$, etc. ita vt habeatur per ſeriem ſatis ſimplicem et regularem:

$$O = 1 - l2 + \tfrac{1}{2} - l\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{3} - l\tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{4} - l\tfrac{5}{4} + \tfrac{1}{5} - l\tfrac{6}{5} + \text{etc.}$$

27. Eandem hanc ſeriem ex prima ſtatim forma deriuare licuiſſet, ſi enim ibi (24) ponatur $x = \infty$ fit $0 = S - lx - O$ ita vt ſit

$$O = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} \ldots\ldots + \tfrac{1}{x} - lx$$

quia vero tam ſeries $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots\ldots + \frac{1}{x}$ quam lx habet valorem infinitum, quo facilius poſterior a priori auferri queat conueniet lx in totidem partes diuidere, quot prior ſeries habet terminos, quod manifeſto fit hoc modo

$$lx = l\tfrac{2}{1} + l\tfrac{3}{2} + l\tfrac{4}{3} + \ldots\ldots + l\tfrac{x}{x-1}$$

vnde ſeries inuenta conficitur. Haec ſeries nunc pluribus modis in alias formas transmutari poteſt, ex quibus valorem numeri O facile quam proxime ſaltem colligere licebit.

Primo enim cum ſit $\frac{1}{n} - l\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{4n^4} - \frac{1}{5n^5} + \text{etc.}$ habebimus

$$\begin{aligned} O = \tfrac{1}{2}(1 + \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{3^2} + \tfrac{1}{4^2} + \text{etc.}) - \tfrac{1}{3}(1 + \tfrac{1}{2^3} + \tfrac{1}{3^3} + \tfrac{1}{4^3} + \text{etc.}) \\ + \tfrac{1}{4}(1 + \tfrac{1}{2^4} + \tfrac{1}{3^4} + \tfrac{1}{4^4} + \text{etc.}) - \tfrac{1}{5}(1 + \tfrac{1}{2^5} + \tfrac{1}{3^5} + \tfrac{1}{4^5} + \text{etc.}) \\ + \tfrac{1}{6}(1 + \tfrac{1}{2^6} + \tfrac{1}{3^6} + \tfrac{1}{4^6} + \text{etc.}) - \tfrac{1}{7}(1 + \tfrac{1}{2^7} + \tfrac{1}{3^7} + \tfrac{1}{4^7} + \text{etc.}) \\ \text{etc.} \end{aligned}$$

Deinde ob $\frac{1}{n-1} - l\frac{n}{n-1} = \frac{1}{2n^2} + \frac{2}{3n^3} + \frac{3}{4n^4} + \frac{4}{5n^5} + \frac{5}{6n^6} + \text{etc.}$

 erit

erit etiam

$$O=\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2^2}+\tfrac{1}{3^2}+\tfrac{1}{4^2}+\text{etc.}\right)+\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{2^3}+\tfrac{1}{3^3}+\tfrac{1}{4^3}+\tfrac{1}{5^3}+\text{etc.}\right)$$
$$+\tfrac{3}{4}\left(\tfrac{1}{2^4}+\tfrac{1}{3^4}+\tfrac{1}{4^4}+\text{etc.}\right)+\tfrac{4}{5}\left(\tfrac{1}{2^5}+\tfrac{1}{3^5}+\tfrac{1}{4^5}+\tfrac{1}{5^5}+\text{etc.}\right)$$
$$+\tfrac{5}{6}\left(\tfrac{1}{2^6}+\tfrac{1}{3^6}+\tfrac{1}{4^6}+\text{etc.}\right)+\tfrac{6}{7}\left(\tfrac{1}{2^7}+\tfrac{1}{3^7}+\tfrac{1}{4^7}+\tfrac{1}{5^7}+\text{etc.}\right)$$
etc.

28. Huius poſterioris formae conſiderentur primo partes priores poteſtatibus paribus contentae; quae modo ſupra adhibito expreſſae ita ſe habebunt:

$$\tfrac{1}{2}(A\pi^2-1)+\tfrac{3}{4}(B\pi^4-1)+\tfrac{5}{6}(C\pi^6-1)+\text{etc.}$$

Contemplemur ergo ſeriem hanc:

$$P=(A\pi^2-1)x^2+(B\pi^4-1)x^4+(C\pi^6-1)x^6+\text{etc.}$$

eritque ex §. 7. $P=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\pi x\cot.\pi x-\frac{xx}{1-xx}$, cuius valor caſu $x=1$ reperitur ponendo $x=1-\omega$ euaneſcente ω, tum autem oritur $P=\frac{1}{2}+\frac{\pi(1-\omega)\,coſ.\,\pi\omega}{2\,ſin.\,\pi\omega}-\frac{1+2\omega+\omega\omega}{\omega(2-\omega)}$

ſeu $P=\frac{1}{2}+\frac{1-\omega}{2\omega}-\frac{1+2\omega}{\omega(2-\omega)}=\frac{1}{2}+\frac{\omega}{2\omega(2-\omega)}=\frac{3}{4}$, ita vt quod omnino notatu dignum videtur ſit

$$A\pi^2-1+B\pi^4-1+C\pi^6-1+D\pi^8-1\text{ etc.}=\tfrac{3}{4}.$$

Deinde per integrationem elicimus:

$$\int\tfrac{P\,dx}{x}=\tfrac{1}{2}(A\pi^2-1)xx+\tfrac{1}{4}(B\pi^4-1)x^4+\tfrac{1}{6}(C\pi^6-1)x^6+\text{etc.}$$

hincque $\int\frac{P\,dx}{x}=\frac{1}{2}lx-\frac{1}{2}l\,ſin.\,\pi x+\frac{1}{2}l(1-xx)+\frac{1}{2}l\pi$ ſeu $\int\frac{P\,dx}{x}=\frac{1}{2}l(1-xx)-\frac{1}{2}l\frac{ſin.\,\pi x}{\pi x}$. Ponatur nunc iterum $x=1-\omega$

fietque

fietque $\int \frac{P\,dx}{x} = \frac{1}{2}l\,2\,\omega - \frac{1}{2}l\,\frac{\text{ſin.}\,\pi\,\omega}{\pi(1-\omega)} = \frac{1}{2}l\,2$ ita vt ſit

$$\tfrac{1}{2}(A\pi\pi - 1) + \tfrac{1}{4}(B\pi^4 - 1) + \tfrac{1}{6}(C\pi^6 - 1) + \text{etc.} = \tfrac{1}{2}l\,2$$

hac autem ſerie a ſuperiori ablata relinquitur:

$$\tfrac{1}{2}(A\pi\pi - 1) + \tfrac{3}{4}(B\pi^4 - 1) + \tfrac{5}{6}(C\pi^6 - 1) + \text{etc.} = \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{2}l\,2$$

ita vt ſit

$$\begin{aligned} O = \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{2}l\,2 &+ \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{2^3} + \tfrac{1}{3^3} + \tfrac{1}{4^3} + \text{etc.}\right) \\ &+ \tfrac{4}{5}\left(\tfrac{1}{2^5} + \tfrac{1}{3^5} + \tfrac{1}{4^5} + \text{etc.}\right) \\ &+ \tfrac{6}{7}\left(\tfrac{1}{2^7} + \tfrac{1}{3^7} + \tfrac{1}{4^7} + \text{etc.}\right) \\ &\quad \text{etc.} \end{aligned}$$

29. Cum igitur numerus O duabus conſtet partibus, quarum prior eſt

$\frac{3}{4} - \frac{1}{2}l\,2 = 0,4034264097200273$, ipſe autem numerus ſit $O = 0,5772156649015325$ erit altera pars

$$= 0,1737892551815052$$

ſi ergo ſimili modo haec altera pars ad logarithmos vel quadraturam circuli reuocari poſſet, nihil amplius in hoc negotio deſiderari poſſet. Haec autem pars altera ob

$$\tfrac{2}{3}z^3 + \tfrac{4}{5}z^5 + \tfrac{6}{7}z^7 + \text{etc.} = 2\int \frac{zz\,dz}{(1-zz)^2} = \frac{z}{1-zz} - \tfrac{1}{2}l\,\frac{1+z}{1-z}$$

ſequenti forma exhiberi poteſt:

$$\tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{1}{3} - l\tfrac{3}{1}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - l\tfrac{4}{2}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - l\tfrac{5}{3}\right) + \text{etc.}$$

quae autem denotante i numerum infinitum ſponte reducitur ad hanc expreſſionem

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots\ldots + \tfrac{1}{i} - l\,i - \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2}l\,2$$

ita

ita vt hinc nihil noui eliciatur, cum adiecta parte priori $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}l2$ oriatur vt per ſe conſtat

$$O=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\tfrac{1}{i}-li.$$

Manet ergo quaeſtio magni momenti, cuiusnam indolis ſit numerus iſte O, et ad quodnam genus quantitatum ſit referendus.

Si terminus generalis $X=lx$.

30. Hic ergo erit $\int X\,dx=x\,lx-x$ et ob $\frac{dX}{dx}=\frac{1}{x}$ fiet porro $\frac{d^3X}{dx^3}=\frac{1.2}{x^3}$; $\frac{d^5X}{dx^5}=\frac{1.2.3.4}{x^5}$; $\frac{d^7X}{dx^7}=\frac{1.2\ldots6}{x^7}$ etc. Vnde ſi ponamus indefinite:

$$S=l1+l2+l3+l4+\ldots\ldots+lx$$

habebimus hanc ſummationem

$$\frac{A}{2x}-\frac{1.2\,B}{2^3x^3}+\frac{1.2.3.4\,C}{2^5x^5}-\frac{1.2\ldots\ldots6\,D}{2^7x^7}+\text{etc.}=S-\tfrac{1}{2}lx-x\,lx+x-O$$

quae conſtans ita eſſe debet comparata, vt vni ipſius x valori ſatisfaciat. Sit ergo $x=1$ et cum ſit $S=l1=0$ erit

$$-O+1=\frac{A}{2}-\frac{1.2\,B}{2^3}+\frac{1.2.3.4\,C}{2^5}-\frac{1.2\ldots\ldots6\,D}{2^7}+\text{etc.}$$

Cum igitur ſit

$$A\,ay-B\,a^3y^3+C\,a^5y^5-D\,a^7y^7+\text{etc.}=\tfrac{1}{2}.\frac{1+e^{-2ay}}{1-e^{-2ay}}-\frac{1}{2ay}$$

ob $\int e^{-y}y^n dy=1.2\ldots.n$ multiplicemus per $e^{-y}\frac{dy}{y}$ et integratio ſuppeditabit

$$Aa-1.2Ba^3+1\,2.3.4Ca^5-\text{etc.}=\tfrac{1}{2}\int e^{-y}\frac{1+e^{-2ay}}{1-e^{-2ay}}.\frac{dy}{y}-\frac{1}{2a}\int e^{-y}\frac{dy}{yy}$$

$$=\int\frac{e^{-y}\,dy}{y(1-e^{-2ay})}-\tfrac{1}{2}\int\frac{e^{-y}dy}{y}-\frac{1}{2a}\int e^{-y}\frac{dy}{yy}$$

inte-

integralibus his a termino $y = 0$ vsque ad $y = \infty$ extenſis.

31. Statuamus nunc $a = \frac{1}{2x}$, et obtinebimus hanc aequationem:

$$-O + S + x - \tfrac{1}{2}lx - xlx = \int \frac{e^{-y}dy}{y(1-e^{-y:x})} - \tfrac{1}{2}\int \frac{e^{-y}dy}{y} - x\int e^{-y}\frac{dy}{yy}$$

in quibus integrationibus quantitatem x vt conſtantem ſpectari oportet. Quare ſumto $x = 1$ fiet

$$-O + 1 = \int \frac{e^{-y}dy}{y(1-e^{-y})} - \tfrac{1}{2}\int \frac{e^{-y}dy}{y} - \int \frac{e^{-y}dy}{yy}$$

et quoniam eſt $-\int \frac{e^{-y}dy}{yy} = \frac{e^{-y}}{y} + \int \frac{e^{-y}dy}{y}$ erit

$$-O + 1 = \int \frac{e^{-y}dy}{y(1-e^{-y})} + \tfrac{1}{2}\int \frac{e^{-y}dy}{y} + \frac{e^{-y}}{y} - \frac{e}{o}.$$

Hic ſi ponatur $e^{-y} = z$ et integralia a termino $z = 0$ vsque ad $z = 1$ extendantur, reperitur:

$$-O + 1 = \tfrac{1}{2}\int \frac{dz}{lz} - \int \frac{dz}{(1-z)lz} - \int \frac{dz}{(lz)^2}$$

neque vero hinc natura huius numeri O cognoſci poteſt cum tamen aliunde conſtet eum eſſe $= \frac{1}{2}l2\pi$, ſicque partim per logarithmos partim per circuli peripheriam π determinari. Quemadmodum ergo iſte valor eruatur operae pretium erit accuratius perpendiſſe.

32. Quoniam a Walliſio inuenta eſt haec aequalitas

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{8 \cdot 8}{7 \cdot 9} \cdot \frac{10 \cdot 10}{9 \cdot 11} \text{ etc.}$$

 erit

erit logarithmis ſumendis

$$\tfrac{1}{2}l\tfrac{\pi}{2} = l2 - l3 + l4 - l5 + l6 - l7 + l8 - l9 + \text{etc.}$$

ſeu hoc modo per duplicem ſeriem

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}l\tfrac{\pi}{2} = l2 + l4 + l6 + l8 + l10 + l12 + \text{etc.} \ldots + l2x + \tfrac{1}{2}l2(x+1)\\ - l3 - l5 - l7 - l9 - l11 - l13 - \text{etc.} - l(2x+1)\end{aligned}$$

ſiquidem vtraque ſeries in infinitum quidem ſed tamen parem terminorum numerum continuetur, ſeu ipſi x vtrinque idem valor tribuatur: quae duplex ſeries etiam hoc modo exhiberi poteſt

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}l\tfrac{\pi}{2} = l2 + l4 + l6 + l8 + \ldots\ldots + l2x - \tfrac{1}{2}l2x\\ - l1 - l3 - l5 - l7 - \ldots\ldots - l(2x-1)\end{aligned}$$

At ex ipſa noſtra ſerie ſumto x infinito habemus

$$l1 + l2 + l3 + l4 \ldots + lx = 0 - x + (x + \tfrac{1}{2})lx$$

vnde ſi $xl2$ ſeu ad quemlibet terminum $l2$ addatur fit

$$l2 + l4 + l6 + l8 + \ldots + l2x = 0 - x + xl2 + (x + \tfrac{1}{2})lx$$

Deinde ſi ibi loco x ſcribamus $2x$ prodit

$$l1 + l2 + l3 + l4 + \ldots + l2x = 0 - 2x + (2x + \tfrac{1}{2})l2 + (2x + \tfrac{1}{2})lx$$

a qua ſi illa auferatur relinquitur:

$$l1 + l3 + l5 + \ldots + l(2x-1) = -x + (x + \tfrac{1}{2})l2 + xlx$$

quae ſummae ſi in illa forma loco vtriusque ſeriei ſubſtituantur orietur haec aequatio:

$$\left.\begin{aligned}\tfrac{1}{2}l\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{1}{2}l2x = 0 - x + xl2 + (x + \tfrac{1}{2})lx\\ + x - (x + \tfrac{1}{2})l2 - xlx\end{aligned}\right\} = 0 - \tfrac{1}{2}l2 + \tfrac{1}{2}lx$$

vnde

vnde concluditur $O = \frac{1}{2}l\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}l2x + \frac{1}{2}l2 - \frac{1}{2}lx = \frac{1}{2}l2\pi$ ſeu $O = 0,91893853320467274178032 97$.

33. Cum ergo ſit $O = \frac{1}{2}l2\pi$ hinc viciſſim colligimus fore

$$\tfrac{1}{2}\int\frac{dz}{lz} - \int\frac{dz}{(1-z)lz} - \int\frac{dz}{(lz)^2} = 1 - \tfrac{1}{2}l2\pi$$

ſicque patet has tres integrationes, ſiquidem a termino $z = 0$ ad terminum $z = 1$ extendantur perduci ad quantitatem $l2\pi$ quod quomodo per calculum oſtendi poſſit, haud liquet, vnde haec inueſtigatio eo maiori attentione digna videtur. Facile quidem perſpicitur eſſe

$-\int\frac{dz}{(lz)^2} = \frac{z}{lz} - \int\frac{dz}{lz}$, ita vt ſit $\frac{z}{lz} - \frac{1}{2}\int\frac{dz}{lz} - \int\frac{dz}{(1-z)lz} = 1 - \frac{1}{2}l2\pi$

Parum quoque lucramur ponendo $z = v^i$ et $lz = -i(1-v)$ exiſtente i numero infinito conſequimur autem hanc aequationem.

$$\frac{-v^i}{i(1-v)} + \tfrac{1}{2}\int\frac{v^{i-1}dv}{1-v} + \int\frac{v^{i-1}dv}{(1-v)(1-v^i)} = 1 - \tfrac{1}{2}l2\pi$$

quae integralia pariter ab $v = 0$ vsque ad $v = 1$ extendi debent.

34. Euolutio harum formularum nihil aliud ſuppeditat niſi quod ſtatim ex prima aequatione ſumendo numerum x infinitum concludi poteſt, quia enim tum ſeries litteras A. B. C. D etc. complectens euaneſcit, habebimus

$$O = \tfrac{1}{2}l2\pi = l1 + l2 + l3 + \ldots + lx - (x + \tfrac{1}{2})lx + x$$

X 2 vbi

vbi cum ſeries $l1+l2\ldots+lx$ conſtet x terminis quaelibet reliquarum partium $(x+\frac{1}{2})lx$ et x in ſeriem totidem terminorum conuertatur. Ac poſterior quidem x totidem terminos vnitati aequales praebet, prior vero $(x+\frac{1}{2})lx$ ſequenti modo euoluitur:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}l2\pi = {} & l1+l2+l3\ldots+l(x-1)+lx\\ & +1+1+1\ldots+1 \qquad +1\\ & -\tfrac{3}{2}l1-\tfrac{5}{2}l2-\tfrac{7}{2}l3\ldots-(x-\tfrac{1}{2})l(x-1)-(x+\tfrac{1}{2})lx\\ & \qquad +\tfrac{3}{2}l1+\tfrac{5}{2}l2\ldots+(x-\tfrac{3}{2})l(x-2)+(x-\tfrac{1}{2})l(x-1)\end{aligned}$$

vnde colligitur haec ſeries ſatis concinna:

$$\tfrac{1}{2}l2\pi = 1-(\tfrac{3}{2}l\tfrac{2}{1}-1)-(\tfrac{5}{2}l\tfrac{3}{2}-1)-(\tfrac{7}{2}l\tfrac{4}{3}-1)-(\tfrac{9}{2}l\tfrac{5}{4}-1)\text{ etc.}$$

quae commodius hac forma exhibetur:

$$1-\tfrac{1}{2}l2\pi = \tfrac{3}{2}l\tfrac{2}{1}-1+\tfrac{5}{2}l\tfrac{3}{2}-1+\tfrac{7}{2}l\tfrac{4}{3}-1+\tfrac{9}{2}l\tfrac{5}{4}-1\text{ etc.}$$

Terminus generalis huius ſeriei eſt $\frac{x}{2}l\frac{x+1}{x-1}-1$, qui in hanc ſeriem euoluitur: $\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{5x^4}+\frac{1}{7x^6}+\frac{1}{9x^8}+\text{etc.}$ ex quo per infinitas ſeries habebimus:

$$\begin{aligned}1-\tfrac{1}{2}l2\pi = {} & \frac{1}{3\cdot3^2}+\frac{1}{5\cdot3^4}+\frac{1}{7\cdot3^6}+\frac{1}{9\cdot3^8}+\text{etc.}\\ & \frac{1}{3\cdot5^2}+\frac{1}{5\cdot5^4}+\frac{1}{7\cdot5^6}+\frac{1}{9\cdot5^8}+\text{etc.}\\ & \frac{1}{3\cdot7^2}+\frac{1}{5\cdot7^4}+\frac{1}{7\cdot7^6}+\frac{1}{9\cdot7^8}+\text{etc.}\\ & \frac{1}{3\cdot9^2}+\frac{1}{5\cdot9^4}+\frac{1}{7\cdot9^6}+\frac{1}{9\cdot9^8}+\text{etc.}\\ & \text{etc.}\end{aligned}$$

vt

vbi cum ſeries poteſtatum reciprocarum primo termino truncatarum occurrant, erit

$$1-\tfrac{1}{2}l2\pi=\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{2^2-1}{2^2}A\pi^2-1\right)+\tfrac{1}{5}\left(\tfrac{2^4-1}{2^4}B\pi^4-1\right)+\tfrac{1}{7}\left(\tfrac{2^6-1}{2^6}C\pi^6-1\right)+\text{etc.}$$

ſupra autem inueneramus:

$$1-\tfrac{1}{2}l\,2\,\pi=\tfrac{A}{2}-\tfrac{1.2\,B}{2^3}+\tfrac{1.2.3.4\,C}{2^5}-\tfrac{1.2\ldots6\,D}{2^7}+\text{etc.}$$

35. Huiusmodi relationes eo maiorem attentionem merentur, quo magis ſunt abſconditae, vnde operae erit pretium ſeriem modo inuentam accuratius euoluere. Hunc in finem eam generaliori forma complectar, ſtatuens:

$$P=\tfrac{1}{3}A\pi^2u^2+\tfrac{1}{5}B\pi^4u^4+\tfrac{1}{7}C\pi^6u^6+\tfrac{1}{9}D\pi^8u^8+\text{etc.}$$

$$Q=\tfrac{1}{3}A\tfrac{\pi^2u^2}{2^2}+\tfrac{1}{5}B\tfrac{\pi^4u^4}{2^4}+\tfrac{1}{7}C\tfrac{\pi^6u^6}{2^6}+\tfrac{1}{9}D\tfrac{\pi^8u^8}{2^8}+\text{etc.}$$

$$R=\tfrac{1}{3}u^2+\tfrac{1}{5}u^4+\tfrac{1}{7}u^6+\tfrac{1}{9}u^8+\text{etc.}=\tfrac{1}{2u}\,l\tfrac{1+u}{1-u}-1$$

vt poſito $u=1$ ſit $1-\tfrac{1}{2}l2\pi=P-Q-R$

Iam ad valores litterarum P et Q definiendos ſumo aequationem ſupra §. 6 datam

$$Ax^2+Bx^4+Cx^6+Dx^8+\text{etc.}=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}x\cot.x$$

vnde per integrationem fit

$$\tfrac{1}{3}Ax^3+\tfrac{1}{5}Bx^5+\tfrac{1}{7}Cx^7+\text{etc.}=\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2}\int\tfrac{x\,dx\cos.x}{\sin.x}$$

$$\text{ſeu }\tfrac{1}{3}Ax^2+\tfrac{1}{5}Bx^4+\tfrac{1}{7}Cx^6+\text{etc.}=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2x}\int\tfrac{x\,dx\cos.x}{\sin.x}.$$

Hinc poſito primo $x=\pi u$ tum vero $x=\frac{\pi u}{2}$ deducimus

$$P=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2\pi u}\int\tfrac{\pi\pi u\,du\cos.\pi u}{\sin.\pi u}=\tfrac{1}{2}-\tfrac{\pi}{2}\int\tfrac{u\,du\cos.\pi u}{\sin.\pi u}\text{ ob }u=1$$

$$Q = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi u}\int\frac{\pi\pi u du \operatorname{coſ.}\frac{1}{2}\pi u}{4 \operatorname{ſin.}\frac{1}{2}\pi u} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\int\frac{u du \operatorname{coſ.}\frac{1}{2}\pi u}{\operatorname{ſin.}\frac{1}{2}\pi u}$$

et ob $\operatorname{ſin.}\pi u = 2\operatorname{ſin.}\frac{1}{2}\pi u \operatorname{coſ.}\frac{1}{2}\pi u$ et $\operatorname{coſ.}\pi u = \operatorname{coſ.}\frac{1}{2}\pi u^2 - \operatorname{ſin.}\frac{1}{2}\pi u^2$ fiet

$$P - Q = \frac{\pi}{4}\int\frac{u du(\operatorname{coſ.}\frac{1}{2}\pi u^2 - \operatorname{coſ.}\frac{1}{2}\pi u^2 + \operatorname{ſin.}\frac{1}{2}\pi u^2)}{\operatorname{ſin.}\frac{1}{2}\pi u \operatorname{coſ.}\frac{1}{2}\pi u} = \frac{\pi}{4}\int\frac{u du \operatorname{ſin.}\frac{1}{2}\pi u}{\operatorname{coſ.}\frac{1}{2}\pi u}$$

ita vt ſit $1 - \frac{1}{2}l 2\pi = \frac{\pi}{4}\int\frac{u du \operatorname{ſin.}\frac{1}{2}\pi u}{\operatorname{coſ.}\frac{1}{2}\pi u} - \frac{1}{2}l\frac{1+u}{1-u} + 1$

ſeu $l 2\pi = \int\frac{-\frac{1}{2}\pi u du \operatorname{ſin.}\frac{1}{2}\pi u}{\operatorname{coſ.}\frac{1}{2}\pi u} + l\frac{1+u}{1-u} = l\frac{1+u}{1-u} + u l \operatorname{coſ.}\frac{1}{2}\pi u - \int du\, l \operatorname{coſ.}\frac{1}{2}\pi u$

ſiquidem integratione abſoluta ponatur $u = 1$.

36. Statuamus nunc angulum $\frac{1}{2}\pi u = \Phi$, ſeu $u = \frac{2\Phi}{\pi}$, vt integrale a termino $\Phi = 0$ vsque ad $\Phi = \frac{\pi}{2} = 90°$ extendi oporteat, ac praecedens aequatio abibit in hanc formam

$$l 2\pi = l\frac{\pi + 2\Phi}{\pi - 2\Phi} + l \operatorname{coſ.}\Phi - \frac{2}{\pi}\int d\Phi\, l \operatorname{coſ.}\Phi. \text{ ſiue ob } \Phi = \frac{\pi}{2}$$

$$l 2\pi = l 2\pi - l\frac{\pi - 2\Phi}{\operatorname{coſ}\Phi} - \frac{2}{\pi}\int d\Phi\, l \operatorname{coſ.}\Phi$$

vbi fractio $\frac{\pi - 2\Phi}{\operatorname{coſ.}\Phi}$ caſu $\Phi = \frac{\pi}{2}$ abit in $\frac{2}{\operatorname{ſin.}\Phi} = 2$ ita vt ſit $l 2\pi = l 2\pi - l 2 - \frac{2}{\pi}\int d\Phi\, l \operatorname{coſ.}\Phi$ ſeu $\int d\Phi\, l \operatorname{coſ.}\Phi = -\frac{\pi l 2}{2}$.

Quod ſi ergo demonſtrari poſſet formulae integralis $\int d\Phi\, l \operatorname{coſ.}\Phi$ valorem a termino $\Phi = 0$ ad $\Phi = 90° = \frac{\pi}{2}$ extenſum reuera quantitati $= \frac{\pi l 2}{2}$ aequari, omnino per aliam viam id aſſequeremur quod ante per ambages circa valorem litterae $O = \frac{1}{2} l 2\pi$ concluſimus. Quoniam vero nunc de hoc valore ſumus

ſumus certi, inſigne conſecuti ſumus hoc theorema quod ſit integrali a valore $\Phi = 0$ vsque ad $\Phi = \frac{\pi}{2} = 90°$ extenſum $\int d\Phi\, l\, \text{coſ.}\, \Phi = -\frac{\pi l 2}{2}$

vel ſi ponamus coſ. $\Phi = v$, vt termini integrationis ſint $v = 1$ et $v = 0$ oſtendendum eſt fore

$$\int \frac{dv\, lv}{\sqrt{(1-vv)}} = \frac{\pi l 2}{2}$$

vnde hoc integrali in ſeriem euoluto erit

$$\frac{\pi l 2}{2} = 1 + \frac{1}{2.3^2} + \frac{1.3}{2.4.5^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7^2} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9^2}$$

quae ſeries viciſſim reducitur ad $\int \frac{ds}{s}$ Ang. ſin. s ponendo poſt integrationem $s = 1$: haec vero porro poſito $s = \text{ſin.}\, \Phi$ ad hanc

$$\int \frac{\Phi\, d\Phi\, \text{coſ.}\,\Phi}{\text{ſin.}\,\Phi} = \Phi\, l\, \text{ſin.}\, \Phi - \int d\Phi\, l\, \text{ſin.}\, \Phi = \frac{\pi l 2}{2},\ \text{ſeu} \int d\Phi\, l\, \text{ſin.}\, \Phi = -\frac{\pi l 2}{2}$$

quae cum ſuperiori congruit.

36. Quod autem ſit $\int d\Phi\, l\, \text{ſin.}\, \Phi = -\frac{\pi l 2}{2}$ hoc modo demonſtratur. Cum ſit $\frac{\text{coſ.}\,\Phi}{\text{ſin.}\,\Phi} = 2\, \text{ſin.}\, 2\Phi + 2\, \text{ſin.}\, 4\Phi + 2\, \text{ſin.}\, 6\Phi + 2\, \text{ſin.}\, 8\Phi$ etc. erit

$$l\, \text{ſin.}\, \Phi = -\text{coſ.}\, 2\Phi - \tfrac{1}{2}\text{coſ.}\, 4\Phi - \tfrac{1}{3}\text{coſ.}\, 6\Phi - \tfrac{1}{4}\text{coſ.}\, 8\Phi \text{ etc.} - l2$$

ergo $\int d\Phi\, l\, \text{ſin.}\, \Phi = -\Phi\, l2 - \frac{1}{2}\text{ſin.}\, 2\Phi - \frac{1}{2.2^2}\text{ſin.}\, 4\Phi - \frac{1}{2.3^2}\text{ſin}\, 6\Phi - \frac{1}{2.4^2}\text{ſin.}\, 8\Phi$ etc.

iam facto $\Phi = \frac{\pi}{2}$ fit $\int d\Phi\, l\, \text{ſin.}\, \Phi = -\frac{\pi}{2} l 2$.

DE

DE PARTITIONE NVMERORVM IN PARTES TAM NVMERO QVAM SPECIE DATAS.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Cum olim tractauiſſem problema de partitione numerorum, quo quaerebatur, quot variis modis datus numerus in duas, vel tres, vel quatuor vel generatim in tot partes, quot quis voluerit, diſcerpi poſſit, id potiſſimum curaui, vt in eius ſolutione nihil quicquam inductioni, cuius vſus plerumque in huiusmodi problematibus ſoluendis ſolet eſſe frequentiſſimus, tribuerem. Atque methodus, qua ſum vſus, ita videtur comparata, vt etiam ad alia problemata aequo ſucceſſu adhiberi poſſit, id quod vulgatiſſimo illo problemate, quo quaeri ſolet, quot modis datus numerus dato teſſerarum numero proiici poſſit, eo quidem ampliſſime extenſo hic oſtendere conſtitui.

2. Quando autem quaeritur, quot modis datus numerus N datum teſſerarum numerum *n* proiiciendo cadere poſſit, quaeſtio huc redit, quot variis

riis modis datus numerus N in n partes reſolui poſſit, quarum ſingulae ſint vel 1, vel 2, vel 3, vel 4, vel 5, vel 6, ſiquidem facies teſſerarum his numeris ſint inſignitae. Ex quo naſcitur haec quaeſtio latius patens, quot variis modis datus numerus N diuidi poſſit in n partes, quarum ſingulae ſint vel α, vel β, vel γ, vel δ etc. quorum numerorum α, β, γ, δ etc. multitudo ſit pariter data puta $= m$; ita vt partes, in quas datus numerus ſit reſoluendus tam numero quam ſpecie dentur.

3. Concipiantur ſcilicet eiusmodi teſſerae, quae non vt vulgo ſex, ſed m habeant facies ſeu hedras, ita vt in ſingulis hae facies notatae ſint numeris α, β, γ, δ etc. atque iam quaeritur, ſi habeantur n huiusmodi teſſerae, quot modis iis proiiciendis datus numerus N produci poſſit. Poſſent etiam teſſerae inter ſe diſpares aſſumi, ita vt ſingulae peculiarem haberent hedrarum numerum, quae etiam in ſingulis peculiaribus numeris ſint inſcriptae; verum ex iis quae de teſſeris vulgaribus ſum allaturus, etiam ſolutio huius quaeſtionis latiſſime patentis haud difficulter colligetur.

4. Numeros autem, quibus facies teſſerarum ſunt notatae, tanquam exponentes quantitatis cuiusdam x conſidero, ita vt pro teſſera vulgari hanc habeamus expreſſionem $x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$, etc. vbi cuique poteſtati vnitatem pro coëfficiente tribuo, quandoquidem quilibet numerus exponente deſignatus

aeque facile cadere poteſt. Quodſi iam huius expreſſionis quadratum ſumatur, quaeuis poteſtas ipſius x tantum recipiet coefficientem, qui indicet quot modis ea poteſtas ex multiplicatione binorum terminorum iſtius expreſſionis reſultare, hoc eſt, quot modis eius exponens ex additione binorum numerorum ex ordine 1, 2, 3, 4, 5, 6 produci poſſit. Euoluto ergo noſtrae expreſſionis quadrato, ſi in eo occurrat terminus Mx^N, inde colligitur numerum N binis teſſeris iaciendis tot modis prodire, quot coefficiens M contineat vnitates.

5. Simili modo euidens eſt, ſi iſtius expreſſionis ſumatur cubus $(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^3$, in eius euolutione quamuis poteſtatem x^N toties occurrere, quot modis eius exponens N oriri poteſt addendis tribus numeris ex ordine 1, 2, 3, 4, 5, 6; vnde ſi huius poteſtatis coefficiens ſit M, totusque terminus Mx^N, ex eo concludimus numerum N tribus teſſeris iaciendis tot modis produci poſſe, quot coefficiens M contineat vnitates. Generatim ergo ſi ſumatur exponentis n dignitas noſtrae expreſſionis $(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^n$, ea euoluta ſecundum poteſtates ipſius x, quilibet terminus Mx^N docebit, ſi numerus teſſerarum fuerit $= n$, iis iaciendis numerum N tot modis cadere poſſe, quot coefficiens M contineat vnitates.

6. Si ergo teſſerarum numerus fuerit $= n$, quaeraturque quot modis datus numerus N iis proii-

proiiciendis cadere poſſit, quaeſtio reſoluetur per euolutionem huius formulae $(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^n$, cuius cum primus terminus futurus ſit x^n, vltimus vero x^{6n}, prodibit huiusmodi terminorum progreſſio:

$$x^n + Ax^{n+1} + Bx^{n+2} + Cx^{n+4} \ldots + Mx^N \ldots + x^{6n}$$

cuius quilibet terminus Mx^N oſtendet numerum N exponenti aequalem tot modis cadere poſſe, quot coefficiens M contineat vnitates: ex quo ſtatim elucet, quaeſtionem locum habere non poſſe, niſi numerus propoſitus N contineatur intra limites n et $6n$. Totum ergo negotium huc redit, vt iſta progreſſio ſeu ſingulorum terminorum coefficientes aſſignentur.

7. Ad hos igitur inueniendos ponatur formula euoluenda hoc modo repraeſentata

$$x^n(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^n = V$$

tum vero pro eiusdem euolutione ſtatuatur

$$V = x^n(1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + \text{etc.})$$

Ac poſito $\frac{V}{x^n} = Z$ erit ex priori differentiale logarithmicum:

$$\frac{xdZ}{Zdx} = \frac{nx + 2nx^2 + 3nx^3 + 4nx^4 + 5nx^5}{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5}$$

Eiusdem autem valor ex poſteriori prodit

$$\frac{xdZ}{Zdx} = \frac{Ax + 2Bx^2 + 3Cx^3 + 4Dx^4 + 5Ex^5 + 6Fx^6 \text{ etc.}}{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 \text{ etc.}}$$

 quae

quae duae expreſſiones inter ſe debent eſſe aequales, vnde coefficientium valores determinabuntur

8. Conſtituta autem harum duarum expreſſionum aequalitate oritur iſta aequatio

$$\begin{array}{llllllll}
nx & +nAx^2 & +nBx^3 & +nCx^4 & +nDx^5 & +nEx^6 & +nFx^7 & +nGx^8 \text{ etc.} \\
 & +2n & +2nA & +2nB & +2nC & +2nD & +2nE & +2nF \\
 & & +3n & +3nA & +3nB & +3nC & +3nD & +3nE \\
 & & & +4n & +4nA & +4nB & +4nC & +4nD \\
 & & & & +5n & +5nA & +5nB & +5nC
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllllll}
= Ax & +2Bx^2 & +3Cx^3 & +4Dx^4 & +5Ex^5 & +6Fx^6 & +7Gx^7 & +8Hx^8 \\
 & +A & +2B & +3C & +4D & +5E & +6F & +7G \\
 & & +A & +2B & +3C & +4D & +5E & +6F \\
 & & & +A & +2B & +3C & +4D & +5E \\
 & & & & +A & +2B & +3C & +4D \\
 & & & & & +A & +2B & +3C
\end{array}$$

quae binae expreſſiones, cum ſecundum ſingulos terminos inter ſe debeant eſſe aequales, valores ſingulorum coefficientium ſuppeditabunt.

9. Hinc autem ſequentes determinationes impetrantur,

$$\begin{aligned}
A &= n \\
2B &= (n-1)A + 2n \\
3C &= (n-2)B + (2n-1)A + 3n \\
4D &= (n-3)C + (2n-2)B + (3n-1)A + 4n \\
5E &= (n-4)D + (2n-3)C + (3n-2)B + (4n-1)A + 5n \\
6F &= (n-5)E + (2n-4)D + (3n-3)C + (4n-2)B + (5n-1)A \\
7G &= (n-6)F + (2n-5)E + (3n-4)D + (4n-3)C + (5n-2)B \\
8H &= (n-7)G + (2n-6)F + (3n-5)E + (4n-4)D + (5n-3)C
\end{aligned}$$

etc.

Quili-

Quilibet ergo coefficiens determinatur per quinos praecedentium, quibus inuentis erit

$$V = x^n + A x^{n+1} + B x^{n+2} + C x^{n+3} + D x^{n+4} + E x^{n+5} + \text{etc.}$$

ſicque problema de n teſſeris in genere eſt ſolutum.

10. Si a qualibet ſuperiorum aequationum praecedens ſubtrahatur, obtinebuntur ſequentes determinationes multo ſimpliciores:

$$A = n$$
$$2B = nA + n$$
$$3C = nB + nA + n$$
$$4D = nC + nB + nA + n$$
$$5E = nD + nC + nB + nA + n$$
$$6F = nE + nD + nC + nB + nA - 5n$$
$$7G = nF + nE + nD + nC + nB - (5n - 1)A$$
$$8H = nG + nF + nE + nD + nC - (5n - 2)B$$

etc.

Si denuo differentiae caperentur, relationes iſtae adhuc ſimpliciores eſſent proditurae, hoc modo

$$2B = (n+1)A;\ 3C = (n+2)B;\ 4D = (n+3)C;\ 6E = (n+4)D;$$
$$6F = (n+5)E - 6n;\ 7G = (n+6)F - (6n-1)A + 5n$$
$$8H = (n+7)G - (6n-2)B + (5n-1)A$$
$$9I = (n+8)H - (6n-3)C + (5n-2)B$$
$$10K = (n+9)I - (6n-4)D + (5n-3)C$$

etc.

11. Hinc prout teſſerarum numerus fuerit vel 2, vel 3 vel 4 lex progreſſionis coefficientium erit vt ſequitur:

	pro duabus	pro tribus	pro quatuor
$A =$	2	3	4
$2B =$	$3A$	$4A$	$5A$
$3C =$	$4B$	$5B$	$6B$
$4D =$	$5C$	$6C$	$7C$
$5E =$	$6D$	$7D$	$8D$
$6F =$	$7E - 12$	$8E - 18$	$9E - 24$
$7G =$	$8F - 11A + 10$	$9F - 17A + 15$	$10F - 23A + 20$
$8H =$	$9G - 10B + 9A$	$10G - 16B + 14A$	$11G - 22B + 19A$
$9I =$	$10H - 9C + 8B$	$11H - 15C + 13B$	$12H - 21C + 18B$
$10K =$	$11I - 8D + 7C$	$12I - 14D + 12C$	$13I - 20D + 17C$
$11L =$	$12K - 7E + 6D$	$13K - 13E + 11D$	$14K - 19E + 16D$
$12M =$	$13L - 6F + 5E$	$14L - 12F + 10E$	$15L - 18F + 15E$

etc.

quilibet ergo coefficiens per tres praecedentes determinatur vbi hoc imprimis eſt notatu dignum, quod tandem in nihilum abeant, et poſtremi primis euadant pares, id quod ex hac lege minus perſpicere licet.

12. Quo autem hanc legem clarius intelligamus denotet haec formula $\overset{(n)}{(N)}$ numerum caſuum quibus numerus N per n teſſeras produci poteſt, ita vt ſit $\overset{(n)}{(n)} = 1$; $\overset{(n)}{(n+1)} = A$; $\overset{(n)}{(n+2)} = B$;

$(n+3)$

$(n+3)^{(n)} = C$; $(n+4)^{(n)} = D$; . . . . . $(n+9)^{(n)} = I$ et $(n+10)^{(n)} = K$. Hinc ergo fiet

$$10(n+10)^{(n)} = (n+9)(n+9)^{(n)} - (6n-4)(n+4)^{(n)} + (5n-3)(n-3)^{(n)}$$

vnde concluditur ſore in genere:

$$\lambda(n+\lambda)^{(n)} = (n+\lambda-1)(n+\lambda-1)^{(n)} - (6n+6-\lambda)(n+\lambda-6)^{(n)}$$
$$+ (5n+7-\lambda)(n+\lambda-7)^{(n)}.$$

Ponamus iam $n+\lambda = N$ vt ſit $\lambda = N-n$, eritque

$$(N)^{(n)} = \frac{(N-1)(N-1)^{(n)} - (7n+6-N)(N-6)^{(n)} + (6n+7-N)(N-7)^{(n)}}{N-n}$$

vbi notandum eſt ſemper ſore $(P)^{(n)} = 0$, ſi fuerit $P < n$.

13. Facilius autem hi coefficientes definiri poſſunt pro quouis teſſerarum numero, ſi iidem pro teſſerarum numero vnitate minore iam fuerint reperti. Si enim ſit

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^n = x^n + Ax^{n+1} + Bx^{n+2}$$
$$+ Cx^{n+3} + Dx^{n+4} + \text{etc.}$$

ponaturque

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^{n+1} = x^{n+1} + A'x^{n+2} + B'x^{n+3}$$
$$+ C'x^{n+4} + D'x^{n+5} + \text{etc.}$$

erit,

erit, quia haec expreſſio illi per $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$ multiplicatae eſt aequalis

	hinc differentiis ſumendis
$A' = A + 1$	
$B' = B + A + 1$	$B' = A' + B$
$C' = C + B + A + 1$	$C' = B' + C$
$D' = D + C + B + A + 1$	$D' = C' + D$
$E' = E + D + C + B + A + 1$	$E' = D' + E$
$F' = F + E + D + C + B + A$	$F' = E' + F - 1$
$G' = G + F + E + D + C + B$	$G' = F' + G - A$
etc.	etc.

14. Quare ſi modo denotandi ante introducto vtamur, ex aequatione $G' = F' + G - A$ naſcitur haec:

$$(n+8)^{(n+1)} = (n+7)^{(n+1)} + (n+7)^{(n)} - (n+1)^{(n)}$$

quae in genere ita repraeſentabitur:

$$(n+1+\lambda)^{(n+1)} = (n+\lambda)^{(n+1)} + (n+\lambda)^{(n)} - (n+\lambda-6)^{(n)}.$$

Quod ſi iam pro $n+\lambda$ ſcribatur N erit

$$(N+1)^{(n+1)} = (N)^{(n+1)} + (N)^{(n)} - (N-6)^{(n)}$$

vbi notandum eſt quamdiu fuerit $N-6 < n$ fore $(N-6)^{(n)} = 0$. Hinc ſimul patet omnes hos numeros fore integros, quod ex priori lege minus apparet.

Tabula

Tabula oſtendens

quot modis quilibet numerus N per *n* teſſeras cadere poſſit

N	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0
3	1	2	1	0	0	0	0	0
4	1	3	3	1	0	0	0	0
5	1	4	6	4	1	0	0	0
6	1	5	10	10	5	1	0	0
7	0	6	15	20	15	6	1	0
8	0	5	21	35	35	21	7	1
9	0	4	25	56	70	56	28	8
10	0	3	27	80	126	126	84	36
11	0	2	27	104	205	252	210	120
12	0	1	25	125	305	456	462	330
13	0	0	21	140	420	756	917	792
14	0	0	15	146	540	1161	1667	1708
15	0	0	10	140	651	1666	2807	3368
16	0	0	6	125	735	2247	4417	6147
17	0	0	3	104	780	2856	6538	10480
18	0	0	1	80	780	3431	9142	16808
19	0	0	0	56	735	3906	12117	25488
20	0	0	0	35	651	4221	15267	36688
21	0	0	0	20	540	4332	18327	50288
22	0	0	0	10	420	4221	20993	65808
23	0	0	0	4	305	3906	22967	82384
24	0	0	0	1	205	3431	24017	98813
25	0	0	0	0	126	2856	24017	113688

N	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$
26	0	0	0	0	70	2247	22967	125588
27	0	0	0	0	35	1666	20993	133288
28	0	0	0	0	15	1161	18327	135954
29	0	0	0	0	5	756	15267	133288
30	0	0	0	0	1	456	12117	125588
31	0	0	0	0	0	252	9142	113688
32	0	0	0	0	0	126	6538	98813
33	0	0	0	0	0	56	4417	82384
34	0	0	0	0	0	21	2807	65808
35	0	0	0	0	0	6	1667	50288
36	0	0	0	0	0	1	917	36688

15. In his ergo ſeriebus etiam proprietas §. 12 inuenta locum habet; ita ſi fuerit $n=6$ erit:

$$(N)^{(6)}=\frac{(N-1)(N-1)^{(6)}-(48-N)(N-6)^{(6)}+(43-N)(N-7)^{(6)}}{N-6}$$

vnde ſi exempli gratia $N=25$ erit

$$(25)^{(6)}=\frac{24.(24)^{(6)}-23.(19)^{(6)}+18.(18)^{(6)}}{19}$$

at eſt $(24)^{(6)}=3431$; $(19)^{(6)}=3906$; $(18)^{(6)}=3431$ ideoque

$$(25)^{(6)}=\frac{24.3431-23.3906+18.3431}{19}=\frac{54264}{19}=2856$$

vti tabula habet. Similiter ſi ſit $N=29$ erit

$$(29)^{(6)}=\frac{28.(28)^{(6)}-19.(23)^{(6)}+14.(22)^{(6)}}{23}$$

hinc

hinc ob $(28)^{(6)} = 1161$; $(23)^{(6)} = 3906$ et $(22)^{(6)} = 4221$ erit

$$(29)^{(6)} = \frac{32508 - 74214 + 59094}{23} = \frac{17388}{23} = 756$$

16. Verum euolutio formulae V (§. 7) alio modo inſtitui poteſt, vt quilibet terminus abſolute aſſignetur, neque ad hoc praecedentibus ſit opus. Cum enim ſit

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = \frac{1 - x^6}{1 - x}$$

erit $V = \frac{x^n(1 - x^6)^n}{(1 - x)^n}$, atque euolutione facta ob

$$(1 - x^6)^n = 1 - \frac{n}{1}x^6 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{12} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^{18} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^{24} - \text{etc.}$$

$$\frac{x^n}{(1-x)^n} = x^n + \frac{n}{1}x^{n+1} + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}x^{n+2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^{n+3}$$
$$+ \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^{n+4}$$

vnde colligitur fore:

$(n)^{(n)} = 1$;

$(n+1)^{(n)} = \frac{n}{1}$

$(n+2)^{(n)} = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$

$(n+3)^{(n)} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

$(n+4)^{(n)} = \frac{n \ldots\ldots (n+3)}{1 \ldots\ldots 4}$

$(n+5)^{(n)} = \frac{n \ldots\ldots (n+4)}{1 \ldots\ldots 5}$

$(n+6)^{(n)} = \frac{n \ldots\ldots (n+5)}{1 \ldots\ldots 6} - \frac{n}{1} 1$

$(n+7)^{(n)} = \frac{n \ldots\ldots (n+6)}{1 \ldots\ldots 7} - \frac{n}{1} \cdot \frac{n}{1}$

$(n+8)^{(n)} = \frac{n \ldots\ldots (n+7)}{1 \ldots\ldots 8} - \frac{n}{1} \cdot \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$

$(n+9)^{(n)} = \frac{n \ldots\ldots (n+8)}{1 \ldots\ldots 9} - \frac{n}{1} \cdot \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

$(n+10)^{(n)} = \frac{n \ldots\ldots (n+9)}{1 \ldots\ldots 10} - \frac{n}{1} \cdot \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

$(n+11)^{(n)} = \frac{n \ldots\ldots (n+10)}{1 \ldots\ldots 11} - \frac{n}{1} \cdot \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$

$$(n+12)^{(n)} = \frac{n \ldots\ldots (n+11)}{1 \ldots\ldots 12} - \frac{n}{1} \cdot \frac{n \ldots\ldots (n+5)}{1 \ldots\ldots 6} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot 1$$

$$(n+13)^{(n)} = \frac{n \ldots\ldots (n+12)}{1 \ldots\ldots 13} - \frac{n}{1} \cdot \frac{n \ldots\ldots (n+6)}{1 \ldots\ldots 7} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{n}{1}$$

etc.

vnde in genere concluditur:

$$(n+\lambda)^{(n)} = \frac{n \ldots\ldots (n+\lambda-1)}{1 \ldots\ldots \lambda} - \frac{n}{1} \cdot \frac{n \ldots\ldots (n+\lambda-7)}{1 \ldots\ldots (\lambda-6)} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{n \ldots\ldots (n+\lambda-13)}{1 \ldots\ldots (\lambda-12)}$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{n \ldots\ldots (n+\lambda-19)}{1 \ldots\ldots (\lambda-18)} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{n \ldots\ldots (n+\lambda-25)}{1 \ldots\ldots (\lambda-24)}.$$

etc.

17. Hinc ſolutio ad teſſeras quocunque alio facierum numero praeditas accommodari poteſt. Sit enim m numerus facierum in ſingulis teſſeris, quae notatae ſint numeris 1, 2, 3 .... m talium autem teſſerarum numerus ſit $= n$, quibus proiectis quaeritur, quot modis datus numerus N cadere poſſit. Seu quod eodem redit, quaeritur quot modis numerus N in n partes reſolui poſſit, quae ſingulae in hoc ordine numerorum 1, 2 ... m ſint contentae; vbi quidem notandum eſt non ſolum diuerſas partitiones, ſed etiam diuerſos ordines earundem partium numerari, vti in teſſeris fieri ſolet, vbi exempli gratia iactus 3, 4 et 4, 3 pro duobus diverſis caſibus habentur.

18. Quodſi ergo haec ſcriptio $(N)^{(n)}$ denotet caſuum numerum, quibus numerus N proiiciendis n teſſeris, quarum ſingulae habeant m facies numeris 1, 2, 3 ... m notatas, produci poſſit; primo notandum

tandum eſt fore $(n)^{(n)} = 1$, et ſi $N < n$ eſſe $(N)^{(n)} = 0$. Deinde ſi $N = mn$ eſt quoque $(mn)^{(n)} = 1$, et ſi $N > mn$ erit $(N)^{(n)} = 0$. Denique ſiue ſit $N = n + \lambda$ ſiue $N = mn - \lambda$, numerus caſuum eſt idem ſeu $(n + \lambda)^{(n)} = (mn - \lambda)^{(n)}$. Poſtrema autem formula praebet:

$$(n+\lambda)^{(n)} = \frac{n \ldots (n+\lambda-1)}{1 \ldots \lambda} - \frac{n}{1} \cdot \frac{n \ldots (n+\lambda-m-1)}{1 \ldots (\lambda-m)} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{n \ldots (n+\lambda-2m-1)}{1 \ldots (\lambda-2m)}$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{n \ldots (n+\lambda-3m-1)}{1 \ldots (\lambda-3m)} + \text{etc.}$$

19. Facillime autem hi numeri cum ex praecedentibus tum ex caſibus, vbi teſſerarum numerus eſt vnitate minor, determinabuntur. Erit enim generaliter, ſi ſingularum teſſerarum numerus facierum fuerit $= m$, eaeque numeris $1, 2 \ldots m$ ſint inſignitae:

$$(N+1)^{(n+1)} = (N)^{(n+1)} + (N)^{(n)} - (N-m)^{(n)}$$

ſeu $(N+1)^{(n)} = (N)^{(n)} + (N)^{(n-1)} - (N-m)^{(n-1)}$.

Hinc ſi pro $N+1$ ſcribatur $n+\lambda$ habebitur

$$(n+\lambda)^{(n)} = (n+\lambda-1)^{(n)} + (n+\lambda-1)^{(n-1)} - (n+\lambda-m-1)^{(n-1)}$$

Denique pro eodem teſſerarum numero n iſti numeri ita a praecedentibus pendent, vt ſit

$$\lambda(n+\lambda)^{(n)} = (n+\lambda-1)(n+\lambda-1)^{(n)} - (mn+m-\lambda)(n+\lambda-m)^{(n)}$$
$$+ (mn-n+m+1-\lambda)(n+\lambda-m-1)^{(n)}$$

Ceterum notum eſt ſummam omnium horum numerorum eſſe $= m^n$.

20. Simili modo haec quaeſtio reſolui poteſt, ſi non omnes teſſerae pari hedrarum numero fuerint

praeditae. Ponamus tres dari teſſeras, primam hexaedram numeros 1, 2, 3, 4, 5, 6 ſecundam octaedram numeros 1 2, 3 ... 8 et tertiam dodecaedram numeros 1, 2, 3 ..... 12 gerentem: quod ſi iam quaeratur, quot modis datus numerus N cadere poſſit euoluatur hoc productum

$$(x+x^2+x^3\ldots x^6)(x+x^2+x^3\ldots x^8)(x+x^2+x^3\ldots x^{12})=V$$

et coefficiens poteſtatis x^N oſtendet caſuum numerum. Cum iam ſit

$$V=\frac{x^3(1-x^6)(1-x^8)(1-x^{12})}{(1-x)^3}$$

erit numeratorem euoluendo

$$V=\frac{x^3-x^9-x^{11}-x^{15}+x^{17}+x^{21}+x^{23}-x^{29}}{(1-x)^3}.$$

21. Hic numerator multiplicetur per $\frac{1}{(1-x)^3}$ ſeu hanc ſeriem

$$1+3x+6x^2+10x^3+15x^4+21x^5+28x^6+36x^7+\text{etc.}$$

cuius coefficientes ſunt numeri trigonales, vnde cum numeri n trigonalis $\frac{n(n+1)}{2}$, quiuis huius ſeriei terminus erit

$$\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1} \text{ ſeu } \frac{(n-1)(n-2)}{2}x^{n-3}$$

Iam per numeratorem multiplicando, poteſtatis x^n coefficiens reperitur:

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}-\frac{(n-7)(n-8)}{2}-\frac{(n-9)(n-10)}{2}-\frac{(n-13)(n-14)}{2}$$
$$+\frac{(n-15)(n-16)}{2}+\frac{(n-19)(n-20)}{2}+\frac{(n-21)(n-22)}{2}-\frac{(n-27)(n-28)}{2}$$

quae

quae expreſſio autem quouis caſu non vlterius continuari debet, quam donec ad factores negatiuos perueniatur.

22. Relicto autem denominatore $(1-x)^3 = 1-3x+3x^2-x^3$ ſeries quaeſita erit recurrens ex ſcala relationis 3, −3, +1 nata, dummodo terminorum numeratoris ratio habeatur. Hinc pro quouis exponente ſequentes coefficientes inueniuntur

Exp.	Coeff.	Exp.	Coeff.
3	1	15	47
4	3	16	45
5	6	17	42
6	10	18	38
7	15	19	33
8	21	20	27
9	27	21	21
10	33	22	15
11	38	23	10
12	42	24	6
13	45	25	3
14	47	26	1

Numeri hic maiores quam 26 produci nequeunt. cum ſit $26 = 6+8+12$, et omnium caſuum ſumma eſt $576 = 6.8.12$.

20. Cum hoc modo reſolutio numerorum in partes numero et ſpecie datas ſine inductionis ſuſidio abſolui poſſit, in mentem mihi incidunt, quae-

quaedam Fermatii elegantia Theoremata, quae cum nondum ſint demonſtrata, fortaſſe haec methodus ad demonſtrationes eorum perductura videtur. Cum enim Fermatius aſſeueraſſet omnes numeros vel eſſe trigonales, vel duorum vel trium trigonalium aggregata; quia cyphra etiam in ordine trigonalium reperitur, theorema ita enunciari poteſt, vt vt omnes numeri in tres trigonales reſolubiles dicantur. Quare ſi numeris trigonalibus pro exponentibus ſumtis formetur haec ſeries:

$$1 + x^{1} + x^{3} + x^{6} + x^{10} + x^{15} + x^{21} + x^{28} + \text{etc.} = s$$

demonſtrari oportet, ſi huius ſeriei cubus euoluatur tum omnes plane poteſtates ipſius x eſſe occurſuras, nullamque omiſſum iri quod ſi demonſtari poſſet, haberetur demonſtratio iſtius Theorematis Fermatiani.

24. Simili modo ſi huius ſeriei

$$1 + x^{1} + x^{4} + x^{9} + x^{16} + x^{25} + x^{36} + \text{etc.} = S$$

ſumatur poteſtas quarta, oſtendique queat, in ea omnes plane poteſtates ipſius x reperiri, habebitur demonſtratio huius Theorematis Fermatiani, quo omnes numeri ex additione quaternorum quadratorum reſultare ſtatuuntur. In genere autem ſi ponatur

$$S = 1 + x^{1} + x^{m} + x^{3m-3} + x^{6m-8} + x^{10m-15} + x^{15m-24} + x^{21m-35} \text{ etc.}$$

huiusque ſeriei ſumatur poteſtas exponentis m, demonſtrandum eſt in ea omnes poteſtates ipſius x eſſe prodituras, ita vt omnis numerus ſit agregatum

tum m numerorum polygonalium laterum numero exiſtente $= m$ vel pauciorum.

25. Ex iisdem principiis alia ſe offert via ad has demonſtrationes inueſtigandas, quae a praecedente hoc differt, quod vti ibi non ſolum diuerſitas partium ſed etiam ordo ſpectatur, hic ordinis ratio omittitur Pro reſolutione ſcilicet in triangulares numeros conſtituatur haec formula

$$\frac{1}{(1-z)(1-xz)(1-x^3z)(1-x^6z)(1-x^{10}z)(1-x^{15}z)\text{ etc.}}$$

quae euoluta hanc praebeat ſeriem:

$$1+Pz+Qz^2+Rz^3+Sz^4+Tz^5+\text{etc.}$$

ita vt P, Q, R, S, etc. ſint functiones ipſius x tantum Manifeſtum autem eſt fore:

$$P=1+x+x^3+x^6+x^{10}+x^{15}+x^{21}+\text{etc.}$$

at Q praeterea eas poteſtates ipſius x continebit, quarum exponentes ſunt aggregata duorum trigonalium. Demonſtrari ergo debet, in functione R omnes plane poteſtates ipſius x eſſe occurſuras.

26. Simili modo pro reſolutione numerorum in quaterna quadrata euoluatur haec fractio

$$\frac{1}{(1-z)(1-xz)(1-x^4z)(1-x^9z)(1-x^{16}z)(1-x^{25}z)\text{etc.}}$$

quae ſi abeat in hanc formam:

$$1+Pz+Qz^2+Rz^3+Sz^4+\text{etc.}$$

demonſtrandum eſt functionem S omnes poteſtates ipſius x complecti. Nam P aequatur ſeriei $1+x+x^4+x^9+x^{16}+$ etc. et Q praeterea eas continet poteſtates ipſius x, quarum exponentes ſunt aggregata duorum quadratorum, in qua ergo ſerie multae adhuc poteſtates deſunt. In R autem inſuper eae poteſtates, quarum exponentes ſunt aggregata ternorum quadratorum, aderunt; atque in S quoque eae; quarum exponentes ſunt ſummae quaternorum ita vt in S omnes numeri in exponentibus occurrere debeant.

27. Ex hoc principio definiri poteſt, quot ſolutiones problemata, quae ab arithmeticis ad regulam Virginum referri ſolent, admittat. Huiusmodi problemata huc redeunt, vt inueniri debeant numeri p, q, r, s, t etc. ita vt his duabus conditionibus ſatisfiat:

$$ap + bq + cr + ds \text{ etc.} = n \text{ et}$$
$$\alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s \text{ etc.} = \nu$$

et iam quaeſtio eſt, quot ſolutiones in numeris integris poſitiuis locum ſint habiturae: vbi quidem tenendum eſt numeros a, b, c, d etc. n et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. ν eſſe integros, quia niſi tales eſſent, facile eo reducerentur. Statim quidem apparet, ſi duo tantum numeri inueniendi p et q proponantur, plus vna ſolutione non dari, quae adeo, niſi pro p et q numeri integri poſitiui prodeant, pro nulla haberi ſolet.

28.

28. Iam ad numerum omnium ſolutionum quouis caſu definiendum, ne inductioni ſeu tentationi quicquam tribuatur, conſideretur haec expreſſio

$$\frac{1}{(1-x^a y^\alpha)(1-x^b y^\beta)(1-x^c y^\gamma)(1-x^d y^\delta)\ \text{etc.}}$$

eaque euoluatur; vnde prodibit huiusmodi ſeries

$$1+Ax^{\cdot\cdot}y^{\cdot\cdot}+Bx^{\cdot\cdot}y^{\cdot\cdot}+Cx^{\cdot\cdot}y^{\cdot\cdot}\ \text{etc.}$$

in qua ſi occurrat terminus $Nx^n y^\nu$, coefficiens N numerum ſolutionum indicabit: ac ſi eueniat, vt hic terminus non occurrat, id indicio erit nullam dari ſolutionem. Totum ergo negotium in hoc verſatur, vt coefficiens huius termini $x^n y^\nu$ inueſtigetur.

DE INVENTIONE QVOTCVNQVE MEDIARVM PROPORTIONALIVM CITRA RADICVM EXTRACTIONEM.

Auctore

L. EVLERO.

Propoſitio I.

1.

Si numeri a, b, c, d etc. ſint continue proportionales, etiam differentiae $b-a$, $c-b$, $d-c$ etc. erunt in proportione geometrica continua eiusdem exponentis; ac ſi prior ſeries a proportione geometrica aberret, poſterior multo magis aberrabit.

Demonſtratio.

Prior propoſitionis pars in elementis eſt demonſtrata; pro altera autem parte ponamus exponentem rationis geometricae $=r$ vt ſecundum proportionem geometricam foret $b=ar$, $c=ar^2$, $d=ar^3$ etc. Sit autem $b=ar+z$ manente $c=arr$, ita vt z ſit error termini b a proportione geometrica, erunt-

eruntque differentiae $b-a=a(r-1)+z$ et $c-b$ $=ar(r-1)-z$, quarum ratio eſt $\frac{ar(r-1)-z}{a(r-1)+z}=r$ $-\frac{(r+1)z}{a(r-1)+z}$, cuius aberratio ab exponente r vtique maior eſt, quam rationis $\frac{b}{a}=r+\frac{z}{a}$. Vnde etiam facile intelligitur, ſi ſeriei a, b, c, d etc. plures termini a ratione geometrica $1:r$ aberrent, in ſerie differentiarum maiores errores ineſſe debere.

Corollarium.

2. Viciſſim ergo quantumuis ſeries differentiarum a proportione geometrica aberrauerit, ſeries terminorum ipſa propius ad hanc proportionem accedet.

Propoſitio II.

3. Inter duos numeros datam rationem $1:r$ tenentes medium proportionalem inuenire ſine extractione radicis.

Solutio.

Sint numeri propoſiti A et Ar, mediusque proportionalis prope ſaltem verus $=$B; vt hi tres numeri A, B, Ar progreſſionem a geometrica parum aberrantem conſtituant. Statuantur autem differentiae pro lubitu: $B-A=a$ et $Ar-B=b$, hincque colligitur $A(r-1)=a+b$ et $B(r-1)=ar+b$, ita vt ſit

$$A=\frac{a+b}{r-1} \quad \text{et} \quad B=\frac{ar+b}{r-1}$$

 nihil

nihil autem impedit quominus numeri A et B in ratione $1 : r-1$ augeantur, vt in integris habeamus:

$$A = a + b \quad \text{et} \quad B = ar + b$$

vnde ſumtis pro lubitu binis numeris a et b, hi tres numeri

$$a + b; \quad ar + b; \quad ar + br$$

quorum primus eſt ad tertium in ratione data $1 : r$ eo propius ad progreſſionem geometricam accedent, quo minus numerorum aſſumtorum a et b ratio a ratione $1 : \sqrt{r}$ aberrauerit; ſeu fractio $\frac{ar+b}{a+b}$ propius ad valorem $\sqrt{r}$ accedet, quam fractio $\frac{b}{a}$. Quo igitur valorem medii proportionalis $\sqrt{r}$ inter 1 et r accuratius obtineamus, ſtatuamus $a + b = a'$ et $ar + b = b'$; atque fractio $\frac{a'r+b'}{a'+b'}$ adhuc propius valorem $\sqrt{r}$ exhibebit ſimili ergo modo ſi porro ſtatuamus

$$a' + b' = a''; \quad a'' + b'' = a'''; \quad a''' + b''' = a'''' \text{ etc.}$$
$$a'r + b' = b''; \quad a''r + b'' = b'''; \quad a'''r + b''' = b'''' \text{ etc.}$$

fractiones $\frac{b''}{a''}$; $\frac{b'''}{a'''}$; $\frac{b''''}{a''''}$ etc. continuo accuratius valorem medii proportionalis $\sqrt{r}$ exprimient.

Coroll. 1.

4. Cum igitur quaeſtio ſit de medio proportionali inter numeros $1 : r$ ſumtis pro lubitu duobus numeris a et b formentur inde duae ſeries

a, a',

a, a', a'', a''', a'''' etc.
b, b', b'', b''', b'''' etc.

hac lege vt ſit

$a' = a + b$; $a'' = a' + b'$; $a''' = a'' + b''$; $a'''' = a''' + b'''$
$b' = ar + b$; $b'' = a'r + b'$; $b''' = a''r + b''$; $b'''' = a'''r + b'''$

et fractiones $\frac{b}{a}, \frac{b'}{a'}, \frac{b''}{a''}, \frac{b'''}{a'''}, \frac{b''''}{a''''}$ etc. continuo propius valorem quaeſitum $\sqrt{r}$ exhibebunt.

Coroll. 2.

5. Vel ſi conſtituatur progreſſio a ratione geometrica continua quantumuis aberrans, cuius termini alterni ſint in ratione $1 : r$

$a, b, ar, br, ar^2, br^2, ar^3, br^3, ar^4, br^4$ etc.

hinc binis terminis coniungendis noua formetur progreſſio:

$a+b, b+ar, ar+br, br+ar^2, ar^2+br^2, br^2+ar^3$, etc.

haecque magis ad progreſſionem geometricam accedet.

Coroll. 3.

6. Si hic denuo bini termini coniungantur, prodibit haec ſeries:

$a(r+1)+2b$; $2ar+b(r+1)$; $ar(r+1)+2br$; $2ar^2 + br(r+1)$ etc.

hincque porro ſimili modo iſtae

$a(3r+1)+b(r+3)$; $ar(r+3)+b(3r+1)$; $ar(3r+1) + br(r+3)$ etc.

$a(rr$

$a(rr+6r+1)+b(4r+4)$; $ar(4r+4)+b\,rr+6r+1)$;
$ar(rr+6r+1)+br(4r+4)$ etc.

$a(5rr+10r+1)+b(rr+10r+5)$; $ar(rr+10r+5)$
$+b(5rr+10r+1)$; etc.

quae continuo propius ad progreſſionem geometricam conuergunt.

Scholion.

7. Totum ergo negotium huc redit, vt binae ſeries a, a', a'', a''' etc. b, b', b'', b''', b'''' etc. formentur quippe quarum termini homologi continuo propius rationem $1 : \sqrt{r}$ exhibebunt. Cum autem ſinguli termini poſt primos vtramque litteram a et b inuoluant ita vt quilibet terminus vtriusque hanc habiturus ſit formam $Ma+Nb$, primum obſeruo poſteriorem ſeriem ex priori oriri, ſi loco litterarum a et b ſcribantur b et ar. Quare ſi prioris ſeriei terminus indici n reſpondens fuerit $a^{(n)}=Ma+Nb$, poſterioris ſeriei terminus eidem indici n reſpondens erit $b^{(n)}=Mb+Nar$, ita vt fractio $\frac{Mb+Nar}{Ma+Nb}$ eo exactius valorem $\sqrt{r}$ ſit expreſſura, quo maior fuerit exponens n, atque adeo ſumto $n=\infty$ verus valor $\sqrt{r}$ prodire debeat. Ita ſi exempli gratia capiatur $r=2$ ſeries illae binae ita ſe habebunt:

a	$a+b$	$3a+2b$	$7a+5b$	$17a+12b$	$41a+29b$
b	$2a+b$	$4a+3b$	$10a+7b$	$24a+17b$	$58a+41b$
$2a$	$2a+2b$	$6a+4b$	$14a+10b$	$34a+24b$	$82a+58b$

cui

cui tertiam ſubſcripſi primae duplam, quippe cuius ope continuatio facillime inſtituitur. Quicunque ergo numeri hic pro a at b accipiantur, ſeries media continebit ſatis prope media proportionalia inter primam et tertiam, vti facile perſpicitur. Simili modo ſumto $r = 3$, hae ſeries ita ſe habebunt

a	$a+b$	$4a+2b$	$10a+6b$	$28a+16b$	$76a+44b$
b	$3a+b$	$6a+4b$	$18a+10b$	$48a+28b$	$132a+76b$
$3a$	$3a+3b$	$12a+6b$	$30a+18b$	$84a+48b$	$228a+132b$

eritque ergo ex vltimis $\frac{132a+76b}{76a+44b} = \frac{33a+19b}{19a+11b}$ eo exactius $= \sqrt{3}$, quo propius ratio $\frac{b}{a}$ eo accedat, ita ſumto $b = 2$ et $a = 1$ fit admodum exacte $\sqrt{3} = \frac{71}{41}$ et nunc ſumto $b = 71$ et $a = 41$ exactiſſime erit $= \frac{2702}{1560} = \frac{1351}{780} = \sqrt{3}$ errore ne millioneſimam quidem partem vnitatis attingente.

Propoſitio III.

8. Inueſtigare legem progreſſionis binarum illarum ſerierum a, a', a'', a''' etc. et b, b', b'', b''' etc. quarum termini homologi continuo propius rationem $1 : \sqrt{r}$ exprimunt.

Solutio.

Quoniam nouimus omnes terminos binas litteras a et b ita complecti, vt in forma $Ma + Nb$ contineantur, ac ſi pro priori ſtatuatur in genere $a^{(n)} = Ma + Nb$ tum pro poſteriori fore $b^{(n)} = Mb$

$+Nar$, hinc lex progreſſionis ſuppeditat terminos ſequentes:

$$a^{(n+1)} = (M+Nr)a + (M+N)b \text{ et}$$
$$b^{(n+1)} = (M+Nr)b + (M+N)ra$$

ex quo in legem progreſſionis vtriusque ſerei inquiri oportet. Quo igitur ſcrutemur, quemadmodum primae ſeriei quilibet terminus definiatur, conſideremus hanc ſeriem ſub iſta forma generaliori

$$a + a'x^1 + a''x^2 + a'''x^3 + a''''x^4 +$$

cuius in infinitum continuatae ſumma fingatur $Pa+Qb$ et quoniam altera ex hac naſcitur, dum loco a et b ſcribitur b et ra erit

$$b + b'x + b''x^2 + b'''x^3 + b''''x^4 + \text{ etc.} = Pb + Q\,ra$$

Addantur hae ſeries inuicem, et quia eſt

$$a + b = a'; \; a' + b' = a''; \; a'' + b'' = a''' \text{ etc. erit}$$
$$a' + a''x + a'''x^2 + a''''x^3 \text{ etc.} = (P+Qr)a + (P+Q)b$$

multiplicemus hanc ſeriem per x et a prima ſubtrahamus prodibitque

$$a = Pa + Qb - (P+Qr)ax - (P+Q)bx$$

Quoniam vero quantitates P et Q a litteris a et b non pendent, hinc duae reſultant aequationes

$$1 = P - Px - Qrx \text{ et } 0 = Q - Px - Qx$$

vnde deducimus has determinationes

$$P = \frac{1-x}{(1-x)^2 - rxx} = \frac{1-x}{1-2x-(r-1)xx} \text{ et}$$
$$Q = \frac{Px}{1-x} = \frac{x}{1-2x-(r-1)xx}.$$

Quo-

Quocirca prior ſeries $a+a'x+a''x^2+a'''x^3+$ etc. naſcitur ex euolutione huius fractionis $\frac{a(1-x)+bx}{1-2x-(r-1)xx}$, poſterior vero $b+b'x+b''x^2+b'''x^3+$ etc. ex euolutione huius $\frac{b(1-x)+arx}{1-2x-(r-1)xx}$ ita vt vtraque ſit ſeries recurrens ſecundi ordinis, ſcala relationis exiſtente $2, (r-1)$, hincque pro ſerie priori a, a', a'', a''', a'''' etc. ſit primo $a'=a+b$, tum vero $a''=2a'+(r-1)a$; $a'''=2a''+(r-1)a'$; $a''''=2a'''+(r-1)a''$ etc. ex hac vero naſcitur altera ponendo $a=b$ et $b=ra$. Hinc adeo huius ſeriei terminum generalem definire licet ad quod valores quantitatum P et Q in fractiones ſimplices reſolui oportet. Cum igitur denominatoris communis factor ſit $1-x-x\sqrt{r}=1-x(1+\sqrt{r})$, pro quantitate P ſtatuatur fractio ſimplex inde nata $=\frac{\mathfrak{A}}{1-x(1+\sqrt{r})}$, ac demonſtraui fore $\mathfrak{A}=\frac{1-x}{1-x+x\sqrt{r}}$ poſito $1-x=x\sqrt{r}$, vnde fit $\mathfrak{A}=\frac{1}{2}$, pro altero autem factore tantum $\sqrt{r}$ negatiue accipi opus eſt, ita vt ſit

$$P=\tfrac{1}{2}.\frac{1}{1-x(1+\sqrt{r})}+\tfrac{1}{2}.\frac{1}{a-x(1-\sqrt{r})}$$

Simili modo pro Q ſi fractio partialis ex denominatoris factore $1-x(1+\sqrt{r})$ nata ponatur $\frac{\mathfrak{A}}{1-x(1+\sqrt{r})}$, reperitur $\mathfrak{A}=\frac{x}{1-x+x\sqrt{r}}$ poſito $1-x=x\sqrt{r}$ indeque $\mathfrak{A}=\frac{1}{2\sqrt{r}}$. Quare ipſi $\sqrt{r}$ binos valores tribuendo ſit

$$Q=\frac{1}{2\sqrt{r}}.\frac{1}{1-x(1+\sqrt{r})}-\frac{1}{2\sqrt{r}}.\frac{1}{1-x(1-\sqrt{r})}$$

ſicque ſumma prioris ſeriei $a+a'x+a''x^2+a'''x^3+$ etc. erit

$$=\frac{a\sqrt{r}+b}{2\sqrt{r}}.\frac{1}{1-x(1+\sqrt{r})}+\frac{a\sqrt{r}-b}{2\sqrt{r}}.\frac{1}{1-x(1-\sqrt{r})}$$

 cum

cum nunc ex vtraque parte progreſſio naſcatur geometrica prodit noſtrae ſeriei terminus generalis

$$\frac{a\sqrt{r}+b}{2\sqrt{r}}(1+\sqrt{r})^{n}x^{n}+\frac{a\sqrt{r}-b}{2\sqrt{r}}(1-\sqrt{r})^{n}x^{n}$$

ita vt ſit indefinite.

$$a^{(n)}=\frac{a\sqrt{r}+b}{2\sqrt{r}}.(1+\sqrt{r})^{n}+\frac{a\sqrt{r}-b}{2\sqrt{r}}(1-\sqrt{r})^{n}$$

et pro altera ſerie

$$b^{(n)}=\frac{b+a\sqrt{r}}{2}(1+\sqrt{r})^{n}+\frac{b-a\sqrt{r}}{2}(1-\sqrt{r})^{n}$$

Coroll.

9. Ex hoc termino generali demum plene conuincimur, fore ſumto exponente n infinito $\frac{b^{(n)}}{a^{(n)}}=\sqrt{r}$, cum enim tum poteſtas $(1-\sqrt{r})^{n}$ prae priori $(1+\sqrt{r})^{n}$ euaneſcat, erit vtique

$$\frac{b^{(n)}}{a^{(n)}}=\frac{b\sqrt{r}+ar}{a\sqrt{r}+b}=\sqrt{r}.$$

Vnde ſimul patet quo maior capiatur exponens n, eo propius ad veritatem accedi.

Scholion.

10. Eadem quidem veritas etiam hac ratione oſtendi poteſt. Poſito generatim $a^{(n)}=\mathrm{M}a+\mathrm{N}b$, erit $b^{(n)}=\mathrm{M}b+\mathrm{N}ar$, et termini ſequentes:

$$a^{(n+1)}=(\mathrm{M}+\mathrm{N}r)a+(\mathrm{M}+\mathrm{N})b \text{ et } b^{(n+1)}=(\mathrm{M}+\mathrm{N}r)b+(\mathrm{M}+\mathrm{N})ar$$

Iam

Iam caſu $n = \infty$, nullum dubium ſupereſſe poteſt, quin ſit $\frac{b^{(n+1)}}{a^{(n+1)}} = \frac{b^{(n)}}{a^{(n)}}$; vnde neceſſe eſt ſit:

$$\frac{(M+Nr)b+(M+N)ar}{(M+Nr)a+(M+N)b} = \frac{Mb+Nar}{Ma+Nb}$$

Statuatur hic valor $= v$, et quia tum ſit

$$\frac{M}{N} = \frac{bv-ar}{b-av} \text{ et } \frac{M}{N} = \frac{arv+brv-br-ar}{b+ar-1v-bv} \text{ ſeu}$$

$$\frac{M}{N} - v = \frac{a(vv-r)}{b-av} = \frac{(a+b)(vv-r)}{b+ar-(a+b)v}$$

vnde manifeſto ſequitur $vv - r = 0$ et $v = \sqrt{r}$. Simul vero etiam quantitatum M et N haec relatio perſpicitur, quod ſumto $n = \infty$ fiat $\frac{M}{N} = v = \sqrt{r}$.

Propoſitio IV.

II. Inter duos numeros datam rationem $1:r$ tenentes duos medios proportionales in rationalibus proxime exhibere.

Solutio.

Sumantur bini numeri quicunque a et ar in ratione data inter eosque capiantur duo medii quicunque b et c atque quantumuis relatio $a:b:c:ar$ a ratione geometrica diſcrepet, inde alias propius eo accedentes hoc modo eliciemus. Quaerantur alii ſimiles quaterni numeri $A:B:C:Ar$ quorum illi ſint differentiae, ita vt ſit $B-A=a$; $C-B=b$ et $Ar-C=c$, hincque $B=A+a$; $C=A+a+b$; et $Ar=A+a+b+c$ ſeu $A=\frac{a+b+c}{r-1}$; $B=\frac{ar+b+c}{r-1}$; $C=\frac{ar+br+c}{r-1}$

 qui

qui per $r-1$ multiplicati praebebunt hos quaternos numeros

$$a'=a+b+c;\ b'=b+c+ar;\ c'=c+ar+br;\ a'r=ar+br+cr$$

qui iam multo propius ad proportionem geometricam continuam accedent. Simili ergo modo hinc alii noui $a'', b'', c'', a''r$ deriuabuntur ſumendo:

$$a''=a'+b'+c';\ b''=b'+c'+a'r;\ c''=c'+a'r+b'r$$

hincque denuo alii, qui continuo propius propoſito ſatisfacient. Totum ergo negotium reducitur ad formationem trium progreſſionum:

$$\text{I. } a, a', a'', a''', a'''' \ldots\ldots a^{(n)}$$
$$\text{II. } b, b', b'', b''', b'''' \ldots\ldots b^{(n)}$$
$$\text{III. } c, c', c'', c''', c'''' \ldots\ldots c^{(n)}$$

quarum lex eſt ſatis ſimplex quae quo vlterius continuentur, eo propius quaterni numeri

$$a^{(n)} : b^{(n)} : c^{(n)} : r\,a^{(n)}$$

proportionem geometricam continuam exhibebunt, etiamſi initio aſſumti a, b, c, ra plurimum aberraverint.

Coroll. 1.

12. De his tribus ſeriebus primum obſeruo ſingulos earum terminos huiusmodi formam $La+Mb+Nc$ eſſe habituros, ita vt quantitates L, M, N litteras pro arbitrio aſſumtas a, b, c non inuoluant, ſed a ſola ratione propoſita $1:r$ pendeant.

Coroll.

Coroll. 2.

13. Deinde ſi primae ſeriei terminus quicunque fuerit $a^{(n)} = La + Mb + Nc$, euidens eſt pro ſerie ſecunda fore $b^{(n)} = Lb + Mc + Nra$, et pro ſerie tertia $c^{(n)} = Lc + Mra + Nrb$. Vnde ſufficit harum trium ſerierum primae indolem explorauiſſe.

Scholion.

14. Harum obſeruationum ope inuentio duarum mediarum proportionalium, quae quidem in rationalibus proxime ſatisfaciat, expedite inſtituitur. Sint enim exempli cauſa inter duos numeros rationem duplam tenentes duo medii proportionales inueſtigandi, et operatio numerica ſumendis pro litteris a, b, c numeris 1, 1, 1 ob $r = 2$ ita ſe habebit

a ..	1	3	12	46	177	681	2620	10080
b ..	1	4	15	58	223	858	3301	12700
c ..	1	5	19	73	281	1081	4159	16001
$2a$ ..	2	6	24	92	354	1362	5240	20160
$2b$ ..	2	8	30	116	446	1716	6602	25400

Hic quatuor poſtremi numeri

10080 : 12700 : 16001 : 20160

tam parum a proportione geometrica recedunt, vt ſi inter extremos per extractionem radicis cubicae duo medii proportionales quaerantur, ii ne parte quidem

quidem decies milleſima a veritate aberrent; eſt enim:

$$\frac{12700}{10080} = \sqrt[3]{\frac{2048383000}{1024192512}} = \sqrt[3]{\left(2 - \frac{2024}{1024192512}\right)}$$

ideoque $= \sqrt[3]{2} - \frac{2024}{3 \cdot 1024192512 \sqrt[3]{4}}$, vnde cum fiat $12700 = 10080 \sqrt[3]{2} - \frac{1}{23906}$ error infra particulam decies milleſimam vnitatis ſubſiſtit, ipſa autem fractio $\frac{12700}{10080}$ tantum particula $\frac{1}{10080 \cdot 23906} = \frac{1}{24097248}$ hoc eſt minore quam vicies millioneſima vnitatis a vero valore $\sqrt[3]{2}$ deficit, tantam autem praeciſionem ope logarithmorum attingere non licet. Vnde intelligitur, quantum vſum haec methodus praeſtare queat in radicibus cuiusuis dignitatis proxime exprimendis.

Propoſitio V.

15. Inueſtigare legem harum trium progreſſionum:

$$a, a', a'' \text{ etc. } b, b', b'', \text{ etc. } c, c', c'' \text{ etc.}$$

quarum termini homologi $a^{(n)} : b^{(n)} : c^{(n)}$ continuo propius proportionem $1 : \sqrt[3]{r} : \sqrt[3]{r^2}$ exprimunt.

Solutio.

Cum omnes termini ex ternis primo aſſumtis a, b et c ita componantur, vt ſit $a^{(n)} = La + Mb + Nc$,

erit

erit ex earum indole $b^{(n)} = \mathrm{L}\,b + \mathrm{M}\,c + \mathrm{N}\,r\,a$ et $c^{(n)} = \mathrm{L}c + \mathrm{M}\,r\,a + \mathrm{N}\,r\,b$ at lex progreſſionis praebet ſequentes terminos:

$$a^{(n+1)} = (\mathrm{L}+\mathrm{M}r+\mathrm{N}r)a + (\mathrm{L}+\mathrm{M}+\mathrm{N}r)b + (\mathrm{L}+\mathrm{M}+\mathrm{N})c$$
$$b^{(n+1)} = (\mathrm{L}+\mathrm{M}r+\mathrm{N}r)b + (\mathrm{L}+\mathrm{M}+\mathrm{N}r)c + (\mathrm{L}+\mathrm{M}+\mathrm{N})ra$$
$$c^{(n+1)} = (\mathrm{L}+\mathrm{M}r+\mathrm{N}r)c + (\mathrm{L}+\mathrm{M}+\mathrm{N}r)ra + (\mathrm{L}+\mathrm{M}+\mathrm{N})rb.$$

Hinc ſi generalius ſtatuamus:

$$a + a'x + a''x^2 + a'''x^3 + \text{etc.} = \mathrm{P}a + \mathrm{Q}b + \mathrm{R}c \text{ erit}$$
$$b + b'x + b''x^2 + b'''x^3 + \text{etc.} = \mathrm{P}b + \mathrm{Q}c + \mathrm{R}ra$$
$$c + c'x + c''x^2 + c'''x^3 + \text{etc.} = \mathrm{P}c + \mathrm{Q}ra + \mathrm{R}rb.$$

Addantur hae ſeries inuicem, et quia eſt

$a+b+c=a'$, $a'+b'+c'=a''$, $a''+b''+c''=a'''$ erit

$$a' + a''x + a'''x^2 + \text{etc.} = (\mathrm{P}+\mathrm{Q}r+\mathrm{R}r)a + (\mathrm{P}+\mathrm{Q}+\mathrm{R}r)b + (\mathrm{P}+\mathrm{Q}+\mathrm{R})c$$

quae per x multiplicata et a prima ſubtracta dat

$$a = \mathrm{P}a + \mathrm{Q}b + \mathrm{R}c - (\mathrm{P}+\mathrm{Q}r+\mathrm{R}r)ax - (\mathrm{P}+\mathrm{Q}+\mathrm{R}r)bx - (\mathrm{P}+\mathrm{Q}+r)cx.$$

Quia autem quantitates P, Q, R litteras a, b, c non inuoluunt, hinc naſcuntur tres aequationes:

I. $1 = \mathrm{P} - \mathrm{P}x - \mathrm{Q}rx - \mathrm{R}rx$ $\quad 1 = \mathrm{P} - \mathrm{Q} - \mathrm{Q}(r-1)x$
II. $0 = \mathrm{Q} - \mathrm{P}x - \mathrm{Q}x - \mathrm{R}rx$ hincque $0 = \mathrm{Q} - \mathrm{R} - \mathrm{R}(r-1)x$
III. $0 = \mathrm{R} - \mathrm{P}x - \mathrm{Q}x - \mathrm{R}x$ $\quad 1 = \mathrm{P} - \mathrm{R} - (\mathrm{Q}+\mathrm{R})(r-1)x.$

Pro faciliori reſolutione ſtatuamus $1 - x + rx = z$ et ſequens combinatio praebebit

$$\begin{matrix} \text{I}-\text{II} & 1=P-Qz \\ \text{II}-\text{III} & 0=Q-Rz \end{matrix} \quad \text{hinc} \quad \begin{matrix} Q=Rz \\ P=1+Rzz \end{matrix}$$

vnde fit

$$\text{III.}\quad 0=R(1-x)-Px-Qx=R(1-x-xz-xzz)-x$$

ideoque $R=\frac{x}{1-x(1+z+zz)}$, at eſt $x=\frac{z-1}{r-1}$.

Ergo $R=\frac{z-1}{r-1-(z-1)(1+z+zz)}=\frac{z-1}{r-z^3}$ ſicque prodit

$$P=\frac{r-zz}{r-z^3};\ Q=\frac{zz-z}{r-z^3};\ R=\frac{z-1}{r-z^3}$$

quarum formarum cum denominator ſit

$$r-1-3(r-1)x-3(r-1)^2x^2-(r-1)^3x^3$$

ſeu $(r-1)(1-3x-3(r-1)x^2-(r-1)^2x^3)$

perſpicuum eſt noſtras tres progreſſiones eſſe recurrentes ſcala relationis exiſtente 3, $3(r-1)$, $(r-1)^2$, ita vt ſit

$$a^{(n)}=3a^{(n-1)}+3(r-1)a^{(n-2)}+(r-1)^2a^{(n-3)}.$$

Nunc pro terminis generalibus harum progreſſionum fractiones P, Q, R in ſimplices reſolui oportet: quoniam autem denominatoris factor ſimplex eſt $\sqrt[3]{r}-z$ ſimul vicem binorum reliquorum gerens, ſiquidem $\sqrt[3]{r}$ tres inuoluit valores diuerſos, ſufficit hunc vnicum factorem conſideraſſe. Sit ergo ex fractione R fractio ſimplex oriunda $=\frac{A}{\sqrt[3]{r}-z}$, et numera-

merator erit $A = \frac{z-1}{\sqrt[3]{r^2}+z\sqrt[3]{r}+zz}$ poſito $z=\sqrt[3]{r}$, vnde fit $A=\frac{\sqrt[3]{r}-1}{3\sqrt[3]{rr}}$, ideoque

$$P=\frac{1}{3\sqrt[3]{r^2}}.\frac{r-\sqrt[3]{r^2}}{\sqrt[3]{r}-z}\text{ etc. } Q=\frac{1}{3\sqrt[3]{r^2}}.\frac{\sqrt[3]{r^2}-\sqrt[3]{r}}{\sqrt[3]{r}-z}\text{ etc. } R=\frac{1}{3\sqrt[3]{r^2}}.\frac{\sqrt[3]{r}-1}{\sqrt[3]{r}-z}\text{ etc.}$$

Reſtituatur pro z valor $1+(r-1)x$, ſitque $\frac{r-1}{\sqrt[3]{r}-1}=s$, ac fiet

$$P=\tfrac{1}{3}.\frac{1}{1-sx}+\text{etc. } Q=\frac{1}{3\sqrt[3]{r}}.\frac{1}{1-sx}+\text{etc. } R=\frac{1}{3\sqrt[3]{r^2}}.\frac{1}{1-sx}+\text{etc.}$$

Hinc cum ſit $a+a'x+a''x^2+\text{etc.}=Pa+Qb+Rc$ ſequitur fore

$$a^{(n)}=\tfrac{1}{3}s^n\left(a+\frac{b}{\sqrt[3]{r}}+\frac{c}{\sqrt[3]{rr}}\right)+\ldots\ldots+\ldots\ldots$$

vbi duo membra omiſſa ex primo ita formantur vt loco $\sqrt[3]{r}$ ſcribatur $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{r}$, id quod etiam de $s=\frac{r-1}{\sqrt[3]{r}-1}$ eſt intelligendum. Deinde vero pro binis reliquis ſeriebus habebitur:

$$b^{(n)}=\tfrac{1}{3}s^n\left(a\sqrt[3]{r}+b+\frac{c}{\sqrt[3]{r}}\right)+\ldots\ldots+\ldots\ldots$$

$$c^{(n)}=\tfrac{1}{3}s^n\left(a\sqrt[3]{r^2}+b\sqrt[3]{r}+c\right)+\ldots\ldots+\ldots\ldots$$

Coroll. I.

16. Si n ſit numerus praegrandis, bina membra omiſſa prae primis hic appoſitis euaneſcunt; ex

quo perſpicuum eſt tum fore $a^{(n)} : b^{(n)} : c^{(n)} = 1 : \sqrt[3]{r} : \sqrt[3]{rr}$; in quo ipſo tota vis methodi hic traditae conſiſtit.

Coroll. 2.

17. Natura harum ſerierum recurrentium tertii ordinis ideo imprimis notari meretur; quod fractiones principales P, Q, R tam concinne in fractiones ſimplices reſoluere licuit, atque ex terminis generalibus inde deriuatis natura harum ſerierum facile perſpicitur.

Scholion.

18. Hinc ratio iſtam methodum ad plures medias proportionales extendendi ita iam eſt manifeſta, vt ſuperfluum foret omnia ratiocinia, quibus operationes vſurpatae innituntur, repetere. Quam ob rem inuentionem plurium mediarum proportionalium inter duos numeros datam rationem $1 : r$ tenentes, nunc quidem ſatis ſuccincte exponere atque adeo binas propoſitiones cuique caſui tribuendas commode in vnam contrahere poterimus.

Propoſitio VI.

19. Inter duos numeros rationem datam $1 : r$ tenentes, tres medias continue proportionales in rationalibus proxime exhibere.

Solutio.

Solutio.

Sumtis in ratione data duobus numeris a et ra inter eos pro lubitu tres medii conſtituantur b, c, d, vt habeantur hi quinque numeri quantumvis a ſcopo aberrantes:

$$a : b : c : d : ra.$$

Hinc formentur alii hac lege vt ſit

$$a' = a + b + c + d$$
$$b' = b + c + d + ra$$
$$c' = c + d + ra + rb$$
$$d' = d + ra + rb + rc$$

qui conſtituent progreſſionem iam multo propius ad ſcopum attingentem hanc:

$$a' : b' : c' : d' : ra'$$

ex quibus porro eadem lege alii noui quaerantur, indeque denuo alii, quo pacto continuo propius ad proportionem geometricam continuam accedetur, ita vt aberratio tandem omni aſſignabili minor euadat.

Singulae porro harum ſerierum

a, a', a'', a''', a'''' etc.
b, b', b'', b''', b'''' etc.
c, c', c'', c''', c'''' etc.
d, d', d'', d''', d'''' etc.

ſunt recurrentes quarti ordinis ſecundum ſcalam relationis: $4, 6(r-1), 4(r-1)^2, (r-1)^3$.

Denique harum ſerierum termini generales, poſito breuitatis gratia $\frac{r-1}{\sqrt[4]{r}-1} = 1 + \sqrt[4]{r} + \sqrt[4]{r^2} + \sqrt[4]{r^3} = s$ erunt

$$a^{(n)} = \frac{a\sqrt[4]{r^3} + b\sqrt[4]{r^2} + c\sqrt[4]{r} + d}{4\sqrt[4]{r^3}} s^n + \text{etc.}$$

$$b^{(n)} = \frac{a\sqrt[4]{r^3} + b\sqrt[4]{r^2} + c\sqrt[4]{r} + d}{4\sqrt[4]{r^2}} s^n + \text{etc.}$$

$$c^{(n)} = \frac{a\sqrt[4]{r^3} + b\sqrt[4]{r^2} + c\sqrt[4]{r} + d}{4\sqrt[4]{r}} s^n + \text{etc.}$$

$$d^{(n)} = \frac{a\sqrt[4]{r^3} + b\sqrt[4]{r^2} + c\sqrt[4]{r} + d}{4} s^n + \text{etc.}$$

quarum expreſſionum prima tantum membra appoſui, dum ex his reliqua facile formantur, loco $\sqrt[4]{r}$ eius ternos reliquos valores ſubſtituendo.

Ceterum ſi ſtatuatur

$$a + a'x + a''x^2 + a'''x^3 + a''''x^4 + \text{etc.} = Pa + Qb + Rc + Sd$$

ac breuitatis gratia fiat $1 - x + rx = z$ reperitur vt ante:

$$P = \frac{r - z^3}{r - z^4};\ Q = \frac{z^3 - z^2}{r - z^4};\ R = \frac{z^2 - z}{r - z^4};\ S = \frac{z - 1}{r - z^4}$$

vnde ſimul reliquarum ſimilium ſerierum a litteris b, c, d incipientium ſummae exhibentur.

Exem-

Exemplum.

20. Inter duos numeros rationem duplam tenentes, tres medii proportionales ſequenti modo reperiuntur:

a . . . 1	4	22	116	613	3240	17124	90504
b . . . 1	5	26	138	729	3853	20364	107628
c . . . 1	6	31	164	867	4582	24217	127992
d . . . 1	7	37	195	1031	5449	28799	152209
$2a$ . . . 2	8	44	232	12[illegible]6	6480	34248	181008

vbi vltimi numeri tam prope progreſſionem geometricam in ratione $1 : \sqrt[4]{2}$ procedentem conſtituunt, quam fieri poteſt, numeris non maioribus adhibendis. Ita ſatis exacte erit $\frac{107628}{90504} = \sqrt[4]{2}$ ſeu per 12 reducendo $\frac{8969}{7542} = \sqrt[4]{2}$ cuius error longe infra partem millioneſimam vnitatis ſubſiſtit.

Scholion 1.

21. In Muſicis ſimilis quaeſtio de vndecim mediis proportionalibus inter rationem duplam inveniendis tractari ſolet, vt hinc omnia ſemitonia vnius *Octauae* inter ſe aequalia reddantur; quod temperamentum etſi principiis harmoniae aduerſatur, tamen non abs re fore arbitror eius ſolutionem ex iisdem principiis petitam hic apponere:

A ..	1	12	210	3532	59379	998592
B ..	1	13	222	3742	62911	1057971
H ..	1	14	235	3964	66653	1120882
C ..	1	15	249	4199	70617	1187535
Cs ..	1	16	264	4448	74816	1258152
D ..	1	17	280	4712	79264	1332968
Ds ..	1	18	297	4992	83976	1412232
E ..	1	19	315	5289	88968	1496208
F ..	1	20	334	5604	94257	1585176
Fs ..	1	21	354	5938	99861	1679433
G ..	1	22	375	6292	105799	1779294
Gs ..	1	23	397	6667	112091	1885093
a ...	2	24	420	7064	118758	1997184

vltima columna tam parum a progreſſione geometrica recedit, vt error ne ad millioneſimam partem aſſurgere ſit cenſendus.

Scholion.

22. Quae hactenus ſunt tradita facile ad quotcunque medios proportionales inueniendos in genere accommodari poſſunt, in quo negotio hoc imprimis notari meretur, quod ſeries numerorum, quibus ſolutio continetur non ſolum ſint recurrentes, ſed etiam denominator fractionum, ex quibus naſcuntur ſemper in factores reſolui queat, ad quemcunque etiam gradum aſcendat: vnde egregia exempla aequationum altioris gradus ſolutionem admittentium colliguntur, quibus coniectura mea circa formam

formam radicum cuiusque gradus olim prolata pulcherrime confirmatur. Verum methodus hic expoſita multo latius extendi poteſt, quemadmodum in ſequente propoſitione ſum oſtenſurus; ita vt inde adhuc maiora ſubſidia in Analyſin redundatura videantur.

Propoſitio VII.

23. Methodum multo latius patentem exhibere, cuius ope inter duos numeros datam rationem $1:r$ tenentes quotcunque medii proportionales in rationalibus proxime inueniri queant.

Solutio.

Inter duos numeros a et ar datam rationem tenentes vt ante totidem medii pro lubitu accipiantur, quot medios proportionales aſignari oportet. Ponamus autem quatuor medios inueniri debere, quoniam hinc vis methodi clarius perſpicietur, quam ſi rem generaliter tractare velimus. Conſtituta ergo pro hoc caſu ad lubitum tali progreſſione

$$a:b:c:d:e:ar:br:cr:dr:er:ar^2 \text{ etc.}$$

ſumantur pro arbitrio quinque indices $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ per quos inde noua ſimilis progreſſio formetur:

$$a':b':c':d':e':a'r:b'r:c'r:d'r:e'r:a'r^2 \text{ etc.}$$

hac lege vt ſit

$$a' = \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d + \varepsilon e$$
$$b' = \alpha b + \beta c + \gamma d + \delta e + \varepsilon ar$$
$$c' = \alpha c + \beta d + \gamma e + \delta ar + \varepsilon br$$
$$d' = \alpha d + \beta e + \gamma ar + \delta br + \varepsilon cr$$
$$e' = \alpha e + \beta ar + \gamma br + \delta cr + \varepsilon dr$$

Tum vero per eosdem indices ex hac progreſſiore denuo alia formetur noua, atque ita porro, vt hac ratione ſequentes ſeries obtineantur

$$a + a'x + a''x^2 + a'''x^3 + \text{etc.} = Pa + Qb + Rc + Sd + Te$$
$$b + b'x + b''x^2 + b'''x^3 + \text{etc.} = Pb + Qc + Rd + Se + Tar$$
$$c + c'x + c''x^2 + c'''x^3 + \text{etc.} = Pc + Qd + Re + Sar + Tbr$$
$$d + d'x + d''x^2 + d'''x^3 + \text{etc.} = Pd + Qe + Rar + Sbr + Tcr$$
$$e + e'x + e''x^2 + e'''x^3 + \text{etc.} = Pe + Qar + Rbr + Scr + Tdr$$

vnde ex lege praeſcripta valores litterarum P, Q, R, S, T quae a litteris arbitrariis a, b, c, d, e ſunt immunes, et tantum ab indicibus $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ vna cum quantitate x et ratione propoſita $1 : r$ pendent, ita determinantur vt ſit:

$$\frac{P-1}{x} = \alpha P + \beta Tr + \gamma Sr + \delta Rr + \varepsilon Qr$$
$$\frac{Q}{x} = \alpha Q + \beta P + \gamma Tr + \delta Sr + \varepsilon Rr$$
$$\frac{R}{x} = \alpha R + \beta Q + \gamma P + \delta Tr + \varepsilon Sr$$
$$\frac{S}{x} = \alpha S + \beta R + \gamma Q + \delta P + \varepsilon Tr$$
$$\frac{T}{x} = \alpha T + \beta S + \gamma R + \delta Q + \varepsilon P$$

ex

ex quibus aequalitatibus quidem valores harum litterarum admodum perplexi eliciuntur, ita vt denominator communis huiusmodi formam ſit habiturus:

$$1-Ax-Bx^2-Cx^3-Dx^4-Ex^5$$

indicium praebens ſeries illas eſſe recurrentes ex eadem ſcala relationis oriundas. Verum quod hic potiſſimum eſt notandum, hunc denominatorem ſemper in factores ſimplices reſoluere licet, qui inter ſe ita erunt ſimiles, vt ex quinis ipſius $\sqrt[5]{r}$ valoribus ſimili modo formentur. Scilicet ſi breuitatis gratia ponatur

$$\alpha+\beta\sqrt[5]{r}+\gamma\sqrt[5]{r^2}+\delta\sqrt[5]{r^3}+\varepsilon\sqrt[5]{r^4}=s$$

vbi etiam s quinos valores diuerſos ſortitur erit $1-sx$ factor ſimplex illius denominatoris, ſimul omnes quinque in ſe inuoluens. Hinc ergo ſingulas fractiones, quibus litterae illae P, Q, R, S, T exprimuntur in quinque fractiones ſimplices reſoluere licebit quae ita concinne expreſſae reperiuntur:

$$P=\frac{1}{5(1-sx)}+\ldots+\ldots+\ldots+\ldots$$

$$Q=\frac{1}{5(1-sx)\sqrt[5]{r}}+\ldots+\ldots+\ldots+\ldots$$

$$R=\frac{1}{5(1-sx)\sqrt[5]{r^2}}+\ldots+\ldots+\ldots+\ldots$$

$$S=\frac{1}{5(1-sx)\sqrt[5]{r^3}}+\ldots+\ldots+\ldots+\ldots$$

$$T=\frac{1}{5(1-sx)\sqrt[5]{r^4}}+\ldots+\ldots+\ldots+\ldots$$

vbi quaterna membra punctis indicata ex primis, ipſi $\sqrt[5]{r}$ quatuor reliquos valores tribuendo, ſunt ſupplenda.

Hinc iam quinque ſerierum a numeris arbitrariis a, b, c, d, e incipientium termini generales formari poſſunt, qui etiam ponendo breuitatis gratia

$$a\sqrt[5]{r^4} + b\sqrt[5]{r^3} + c\sqrt[5]{r^2} + d\sqrt[5]{r} + e = k$$

(vbi quoque quantitas k quinque valores inuoluere eſt exiſtimanda) ſequenti modo concinne exprimuntur:

$$a^{(n)} = \frac{k}{5\sqrt[5]{r^4}} s^n + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots$$

$$b^{(n)} = \frac{k}{5\sqrt[5]{r^3}} s^n + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots$$

$$c^{(n)} = \frac{k}{5\sqrt[5]{r^2}} s^n + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots$$

$$d^{(n)} = \frac{k}{5\sqrt[5]{r}} s^n + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots$$

$$e^{(n)} = \frac{k}{5} s^n + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots$$

vbi quaterna membra omiſſa ſimili modo vt ſupra ex primis conſtitui oportet.

Hinc iam id in quo cardo rei verſatur, intelligitur ſcilicet ſi ſeries illae in infinitum continuentur, vt exponens n in infinitum excreſcat, tum reſpectu eius membri, in quo ipſi $\sqrt[5]{r}$ valor realis poſi-

poſitiuus tribuitur, reliqua euaneſcere, ſicque manifeſto numeros $a^{(n)} : b^{(n)} : c^{(n)} : d^{(n)} : e^{(n} : ra^{(n)}$ progreſſionem geometricam conſtituere. Verum hic probe eſt notandum, illam euaneſcentiam locum non habere niſi indices $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ ſint poſitiui, quemadmodum hinc etiam caſus ſupra tractatus reſultat, ſi hi indices vnitati aequales ſtatuantur.

Scholion.

24. Circa hanc ſolutionem generalem obſeruari conuenit, quod ſi valores litterarum P, Q, R, S, T ex formulis inuentis euoluantur, earumque denominator communis ad nihilum redigatur, vt poſito $x = \frac{1}{z}$ huiusmodi prodeat aequatio quinti gradus:

$$z^5 - Az^4 - Bz^3 - Cz^2 - Dz - E = 0$$

tum huius aequationis radicem fore

$$z = \alpha + \beta\sqrt[5]{r} + \gamma\sqrt[5]{r^2} + \delta\sqrt[5]{r^3} + \varepsilon\sqrt[5]{r^4}$$

in qua forma ſimul omnes quinque radices contineantur ſi modo pro $\sqrt[5]{r}$ eius quinque valores ſucceſſiue ſubſtituantur. Cum igitur hae radices eam ipſam habeant formam, quam olim coniectura eram affecutus, hinc multo confidentius affirmare poterimus, omnium aequationum cuiuscunque gradus radices eo modo exprimi, quem coniectura mea indicat. Quodſi

indices α, β, γ, δ, ε vnitati aequentur aequatio quinti gradus fit ex ſuperioribus:

$$z^5-5z^4-10(r-1)z^3-10(r-1)^2z^2-5(r-1)^3z-(r-1)^4=0$$

cuius radix erit $z=1+\sqrt[5]{r}+\sqrt[5]{r^2}+\sqrt[5]{r^3}+\sqrt[5]{r^4}$. Seu poſito $z=y+1$ erit huius aequationis

$$y^5=10ry^3+10r(r+1)y^2+5r(rr+r+1)y+r(r^3+r^2+r+1)$$

radix $y=\sqrt[5]{r}+\sqrt[5]{r^2}+\sqrt[5]{r^3}+\sqrt[5]{r^4}$.

DE

DE INTEGRATIONE AEQVATIONIS DIFFERENTIALIS:

$$a^n d^n y + b \cdot a^{n-1} d^{n-1} y dx + c \cdot a^{n-2} d^{n-2} y dx^2 + \ldots + r y dx^n = X dx^n \quad \text{(I)}$$

Auctore

AND. IOH. LEXELL.

1.

Ex occaſione aequationis differentialis $a^4 d^4 y - y dx^4 = 0$, cuius integrali inueniendo nuper eram intentus, incidi in methodum eam integrandi, haud inelegantem, quippe quae non ſolum eo nomine ſe commendabat, quod pro ſpeciali iſto exemplo videbatur eſſe facillima; ſed etiam quia optimo cum ſucceſſu applicari poſſet, ad perficiendam integrationem aequationis differentialis ſupra propoſitae, quae formae eſt generalis et innumeras ſub ſe complectitur. Deinceps vero cum perſpicerem, a ſummis Mathematicis, inprimis ab Illuſtr. *Eulero* in Tom. VII. Miſcellan. Berolin. et Tom. III. Nov. Comment. Acad. Imper. Petropol. antea iam traditas fuiſſe, hanc aequationem integrandi Methodos, merito dubius haeſi, vtrum quae ad hanc materiem illuſtrandam meditatus eram, publicae luci committerem, an non ſatius foret, eadem penitus

tus ſupprimere? Verum enim vero, quum Methodus a me adhibita, haud parum differat ab illis, quae in hoc negotio huc vsque allatae ſunt, nec ſuis plane deſtituatur commodis, e re eſſe duxi, eandem Iudicio Illuſtriſſimae Academiae Scient. Imperialis ſubmittere.

2. In aequatione differentiali propoſita, quam maioris facilitatis gratia, poſt hac per (I) deſignabo, ſunt x et y quantitates variabiles earumque fluxiones dx, dy quarum dx aſſumitur conſtans, a vero b, c, r denotant conſtantes et cognitas quantitates, n numerum integrum quemcunque et X functionem quamlibet ipſius x. Huius aequationis integrale, vt iam inueſtigari poſſit, ponatur idem ſequentis eſſe formae:

$$a^n d^{n-1}y + \alpha . a^{n-1} d^{n-2}y\,dx + \beta . a^{n-2} d^{n-3}y\,dx^2 + \ldots . .$$
$$\text{(II)} \quad + \lambda a y\,dx^{n-1} = z\,dx^{n-1}$$

cuius aequationis indoles facile patebit, modo valores conſtantium ſed incognitarum quantitatum α, $\beta \ldots \lambda$ atque variabilis quantitatis z erunt determinati. Quo autem facilius, ipſius z genuinus detegatur valor, primum conſiderandum venit, vtrum haec quantitas, vnice ſit functio ipſius x, an vero ſimul contineat y, aut quandam eius fluxionem vt $d^p y$? Ponamus ideoque z continere y ſitque $dz = Q dy + ds$, vbi $Q dy$ deſignat differentiale ipſius z, quod prouenit, dum ſola y vt variabilis tractatur,

tur, ds autem fluxionem eius, quae oritur, dum y pro conſtanti habetur. Quoniam autem differentiando aequationem (II), prodire debeat aequatio (I); hinc omnino neceſſum eſt, vt Q ſit quantitas conſtans, nam aliter fieri nequit, vt in aequatione (I) inueniatur terminus, qui reſpondeat huic $Q\,dy\,dx^{n-1}$. Sin vero Q fuerit quantitas conſtans, erit inſtituta integratione et poſito f conſtante, $z = Qy + s + f$, ex qua aequatione patet, quod s non contineat y, nam ſi ſecus eſſet, etiam ds contineret dy, vnde et colligitur, ſub hac ſuppoſitione, differentiale aequationis (II) non ſuppeditare terminum reſpondentem ipſi $r\,y\,dx^n$ in aequatione (I), adeoque liquet z non eſſe functionem ipſius y. Quum autem eadem plane ratione demonſtrari poſſit, quod z non contineat $d^p y$, in procliui eſt, vt concludamus eam quantitatem vnice eſſe functionem ipſius x.

3. Ponatur iam $z = u(\int \frac{X\,dx}{u} + v)$, vbi u et v denotant quantitates, quae vnicam variabilem x continent. Quod vero z eiusmodi formam habere debeat, id exinde liquet, quia differentiale aequationis (II) omnino conuenire debet cum aequatione differentiali propoſita (I), quae continet terminum $X\,dx^n$. Valorem itaque allatum pro z ſubſtituendo et differentiando aequationem (II), ſequens emergit aequatio differentialis:

$$a^n d^n y + \alpha . a^{n-1} d^{n-1} y\,dx + \beta . a^{n-2} d^{n-2} y\,dx^2 + \ldots + \lambda a\,dy\,dx^{n-1}$$
$$= du\,dx^{n-1} (\int \frac{X\,dx}{u} + v) + X\,dx^n + u\,dv . dx^{n-1},$$

quae iterum in hanc transformari poteſt:

$$a^n d^n y + \alpha . a^{n-1} d^{n-1} y dx + \beta . a^{n-2} d^{n-2} y dx^2 + \ldots + \lambda a dy dx^{n-1}$$
$$- \frac{du}{u} (a^n d^{n-1} y + \alpha . a^{n-1} d^{n-2} y + \beta . a^{n-2} d^{n-3} y + \ldots + \lambda a y dx^{n-1})$$
$$\overset{(III)}{=} X dx^n + u dv . dx^{n-1}.$$

Si iam ſingulos huius aequationis terminos, conferamus cum terminis homogeneis aequationis (I), facile deprehendetur eſſe $dv = 0$ adeoque fore v quantitatem conſtantem $= A$, deinceps perſpicere quoque licet, quod ſit $\alpha dx - \frac{a du}{u} = b dx$ vel poſito $m = \alpha - b$, $\frac{m dx}{a} = \frac{du}{u}$, vnde inſtituta integratione eruitur $u = N^{\frac{mx}{a}}$, poſito nimirum, quod N ſit numerus, cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$, ex quo demum ſequitur eſſe $z = N^{\frac{mx}{a}} (\int N^{\frac{-mx}{a}} X dx + A)$. Hoc autem inuento, non amplius reſtat, quam vt inueniatur valor ipſius $m = \alpha - b$, quocirca dum aequationem (III) iterum comparamus cum aequatione (I), obſeruamus eſſe $\alpha = m + b$, $\beta = c + \alpha(\alpha - b) = m^2 + mb + c$ atque $\lambda = m^{n-1} + b . m^{n-2} + c . m^{n-3} + \ldots + pm + q$, et quoniam denique $r + \lambda(\alpha - b) = r + \lambda m = 0$, erit:

$$m^n + b . m^{n-1} + c . m^{n-2} + \ldots + qm + r \overset{(IV)}{=} 0,$$

ex qua aequatione valores omnes et ſinguli ipſi m reſpondentes determinantur, ex quibus deinceps ipſorum α, $\beta \ldots \lambda$ aeſtimationes facile elici poſſunt.

4. Aequatio in § antecedenti tradita (IV), cuius ope m inuenitur, perſpicue indicat, quod numerus

merus valorum ipſius m per numerum n exprimatur. In eo igitur caſu, quo omnes hi valores inter ſe ſunt inaequales, reduci poteſt aequatio differentialis propoſita, dum ſecundum methodum allatam integratur, ad tot diuerſas aequationes differentiales gradus $n-1$, quot numerus n continet vnitates, quam ob rem etiam in iſto caſu, per debitam harum aequationum comparationem valor ipſius y, facillime inuenitur. Vt vero eo euidentius perſpicere liceat, quomodo haec comparatio ſit inſtituenda et qualem y hinc nanciſcatur formam, ponamus aequationem differentialem propoſitam eſſe quarti gradus, quae enim ſub iſta conditione valent, illa rite adplicari poſſunt ad aequationes differentiales altiorum graduum. Quum itaque m ſupponatur, quatuor valoribus inter ſe diuerſis gaudere, ſint iidem, e, f, g, i et ponatur praeterea maioris commoditatis gratia $N^{\frac{ex}{a}}(A+\int N^{\frac{-ex}{a}}.Xdx)=Q$, $N^{\frac{fx}{a}}(B+\int N^{\frac{-fx}{a}}.Xdx)=R$, $N^{\frac{gx}{a}}(C+\int N^{\frac{-gx}{a}}.Xdx)=S$ et $N^{\frac{ix}{a}}(D+\int N^{\frac{-ix}{a}}.Xdx)=T$, inuenientur hinc iuxta praecepta §. 3. ſequentes quatuor aequationes differentiales tertii gradus:

$$a^4d^3y-(f+g+i)a^3ddydx+(fg+fi+gi)a^2dydx^2-fgiaydx^3=Q.dx^3$$
$$a^4d^3y-(e+g+i)a^3ddydx+(eg+ei+gi)a^2dydx^2-egiaydx^3=R.dx^3$$
$$a^4d^3y-(e+f+i)a^3ddydx+(ef+ei+fi)a^2dydx^2-efiaydx^3=S.dx^3$$
$$a^4d^3y-(e+f+g)a^3ddydx+(ef+eg+fg)a^2dydx^2-efgaydx^3=T.dx^3.$$

Si iam ex prima harum, ſucceſſiue ſubtrahantur ſecunda, tertia et quarta, emergent ſequentes aequationes ſecundi gradus:

$$a^3 ddy - (g+i)a^2 dydx + giaydx^2 = \frac{Q.dx^2}{e-f} + \frac{R.dx^2}{f-e}$$

$$a^3 ddy - (f+i)a^2 dydx + fiaydx^2 = \frac{Q.dx^2}{e-g} + \frac{S.dx^2}{g-e}$$

$$a^3 ddy - (f+g)a^2 dydx + fgaydx^2 = \frac{Q.dx^2}{e-i} + \frac{T.dx^2}{i-e}$$

et dum eadem operatio cum his inſtituitur, reperietur:

$$a^2 dy - iaydx = \frac{Qdx}{(e-f)(e-g)} + \frac{Rdx}{(f-e)(f-g)} + \frac{Sdx}{(g-e)(g-f)}$$

$$a^2 dy - gaydx = \frac{Qdx}{(e-f)(e-i)} + \frac{Rdx}{(f-e)(f-i)} + \frac{Tdx}{(i-e)(i-f)}$$

ex quarum comparatione denique inuenitur:

$$ay = \frac{Q}{(e-f)(e-g)(e-i)} + \frac{R}{(f-e)(f-g)(f-i)} + \frac{S}{(g-e)(g-f)(g-i)} + \frac{T}{(i-e)(i-f)(i-g)}.$$

5. Huic autem rationi inueniendi y, aliam quoque addam quae non minus ſua elegantia ſeſe commendat. Etenim dum attente conſideramus methodum in §. 4 traditam, inuenimus quod eadem ad huiusmodi perducat aequationem: $ay = A'Q + B'R + C'S + D'T$ in qua A' B' C' D' quantitates conſtantes deſignant, adeoque ſimul patet, quod cognitis his coefficientibus, ipſum y eodem negotio inueniatur. Si igitur y ſucceſiue differentietur, emergent inde ſequentes aequationes differentiales:

$rydx$

$$ry\,dx^4 = \frac{r\,dx^4}{a}(\ A'Q + \ B'R + \ C'S + \ D'T)$$
$$qa\,dy\,dx^3 = \frac{q\,dx^4}{a}(e\,A'Q + f\,B'R + g\,C'S + i\,D'T)$$
$$ca^2\,ddy\,dx^2 = \frac{c\,dx^4}{a}(e^2A'Q + f^2B'R + g^2C'S + i^2D'T)$$
$$ba^3\,d^3y\,dx = \frac{b\,dx^4}{a}(e^3A'Q + f^3B'R + g^3C'S + i^3D'T)$$
$$a^4\,d^4y = \frac{d\,x^4}{a}(e^4A'Q + f^4B'R + g^4C'S + i^4D'T) + X\,dx^4(e^3A' + f^3B' + g^3C' + i^3D')$$

Quamuis enim differentiando ay inueniatur $a^2\,dy = dx(e\,A'Q + f\,B'R + g\,C'S + i\,D'T) + aX\,dx(A' + B' + C' + D')$ facile tamen colligi poteſt, quod $X\,dx$ non ingrediatur dy, ſic enim valorem ipſius $a^2\,ddy$ ingrediretur $dX\,dx$, quod quum non contingat ſtatuendum eſt, quod ſit $A' + B' + C' + D' = 0$. Similem ob rationem $X\,dx$, neque ingredietur valorem ipſius d^2y, nec ipſius d^3y, in differentiali vero d^4y neceſſum eſt vt $X\,dx$ reperiatur, alioquin enim non fieret $a^4\,d^4y + ba^3\,d^3y\,dx + ca^2\,ddy\,dx^2 + qa\,dy\,dx^3 + ry\,dx^4 = X\,dx^4$. Seorſim itaque conſiderando terminos, quos ſub determinatione differentialium dy, d^2y, d^3y inuenimus $= 0$ et terminum, qui determinando d^4y prouenit $= 1$, ſequentes habebimus aequationes, inueniendis A', B', C', D' inſeruientes nimirum:

$$A' + B' + C' + D' = 0$$
$$e\,A' + f\,B' + g\,C' + i\,D' = 0$$
$$e^2A' + f^2B' + g^2C' + i^2D' = 0$$
$$e^3A' + f^3B' + g^3C' + i^3D' = 1.$$

 Dum

Dum vero has aequationes ſic tractamus, vt ſingulas tres priores per e multiplicatas a proxime inſequentibus ſubtrahamus, detegimus:

$$(f-e)B'+ \ (g-e)C'+ \ (i-e)D'=0$$
$$f\ (f-e)B'+g\ (g-e)C'+i\ (i-e)D'=0$$
$$f^2(f-e)B'+g^2(g-e)C'+i^2(i-e)D'=1$$

atque poſt ſimilem cum his inſtitutam operationem

$$(g-f)(g-e)C'+ \ (i-f)(i-e)D'=0$$
$$g(g-f)(g-e)C'+i(i-f)(i-e)D'=1,$$

vnde denique oritur $D'(i-g)(i-f)(i-e)=1$ vel $D'=\frac{1}{(i-g)(i-f)(i-e)}$, et hinc reliquorum coefficientium A', B', C' ratio facile liquet.

6. Ex iis, quae in §. 4 monuimus, conſtat methodum ibidem traditam, eruendi incognitam y, non in aliis caſibus adhiberi poſſe, quam cum omnes valores ipſius m inter ſe ſunt inaequales. Nam ſi bini eorundem, nimirum g, i in §. 4 ponantur eſſe aequales, vnde et functiones S, T coincidere oportet; per integrationem aequationis differentialis quarti gradus, non prouenient plures, quam tres aequationes differentiales tertii gradus, per quarum debitam tractationem peruenire quidem licet ad aequationem differentialem primi gradus, non autem ad aequationem finitam determinando y inſeruientem. Haec quidem aequatio primi gradus, quia formae eſt *Bernoullianae* facile integratur, vnde

et

et y haud difficulter inuenitur, ſequenti tamen ratione idem multo facilius perfici poteſt. Dum ad aequationes in §. 4 adductas regredimur, inuenimus

$$a^3ddy-(g+i)a^2dydx+giaydx^2=\frac{Qdx^2}{e-f}+\frac{Rdx^2}{f-e}$$

$$a^3ddy-(f+i)a^2dydx+fiaydx^2=\frac{Qdx^2}{e-g}+\frac{Sdx^2}{g-e}.$$

Aequationum differentialium tertii gradus ibidem allatarum integretur ea, quae ordine tertia eſt atque ponatur $m=i$, eruetur inde $a^3ddy-(e+f)a^2dydx+efaydx^2=\frac{Vdx^2}{a}$, qualem vero formam quantitas V habeat, infra oſtendam. Iam collatis inter ſe hiſce aequationibus obtinemus:

$$a^2dy-iaydx=\frac{Qdx}{(e-f)(e-g)}+\frac{Rdx}{(f-e)(f-g)}+\frac{Sdx}{(g-e)(g-f)}$$

$$a^2dy-faydx=\frac{Qdx}{(e-g)(e-i)}-\frac{Sdx}{(g-e)^2}+\frac{Vdx}{a(g-e)}$$

atque ex his demum

$$ay=\frac{Q}{(e-f)(e-g)^2}+\frac{R}{(f-e)(f-g)^2}+\frac{S(e+f-2g)}{(g-e)^2(g-f)^2}+\frac{V}{a(g-e)(g-f)}.$$

Nunc itaque reſtat, vt quantitas V inueſtigetur, quoniam autem per hypotheſin ſit $g=i$, erit

$$\int N^{\frac{-gx}{a}}Sdx=\int dx\left(C+\int N^{\frac{-gx}{a}}Xdx\right)=x\left(C+\int N^{\frac{-gx}{a}}Xdx\right)$$

$$-\int N^{\frac{-gx}{a}}Xxdx \quad \text{adeoque} \quad V=N^{\frac{-ix}{a}}\left(D+\int N^{\frac{-ix}{a}}S\,dx\right)$$

$$=N^{\frac{gx}{a}}\left(D+x\left(C+\int N^{\frac{-gx}{a}}Xdx\right)-\int N^{\frac{-gx}{a}}xXdx\right).$$

Eadem

Eadem plane ratione, ſi occurrat aequatio differentialis quinti gradus, in qua aequatio (IV). quinque habet factores, $m-e=0$, $m-f=0$, $m-g=0$, $m-i=0$, $m-k=0$ atque ſit $i=k$, inuenietur eiusdem aequationis ſequens eſſe integrale:

$$ay=\frac{Q}{(e-f)(e-g)(e-i)^2}+\frac{R}{(f-e)(f-g)(f-i)^2}+\frac{S}{(g-e)(g-f)(g-i)^2}$$
$$-\frac{T((i-e)(i-f)+(i-e)(i-g)+(i-f)(i-g))}{(i-e)^2(i-f)^2(i-g)^2}+\frac{V}{a(i-e)(i-f)(i-g)}$$

vbi obſeruandum eſt, quod ſit $V=N^{\frac{kx}{a}}(E+\int N^{\frac{-kx}{a}}T\,dx)$, quae functio, vt ſupra oſtendi, in commodiorem mutari poteſt formam.

7. Quo magis de veritate eorum, quae in praecedenti §. adduximus, conuincamur, ſecundum methodum in §. 5 exhibitam examinabimus, quem valorem accipiat y dum integranda occurrit aequatio differentialis quarti gradus, in qua duo valores ipſius m ponuntur aequales. Sit itaque $ay=A'Q+B'R+C'S+D'V$, in qua aequatione coefficientes A', B', C', D' ſequenti ratione indagantur. Dum y ſucceſſiue differentiatur, ſequentes inde oriuntur aequationes differentiales:

$$r\,y\,dx^4=\frac{dx^4}{a}(A'Q+B'R+C'S+D'V)$$
$$q\,a\,dy\,dx^3=\frac{q\,dx^4}{a}(e\,A'Q+f\,B'R+(g\,C'+a\,D')S+g\,D'V)$$
$$c\,a^2\,ddy\,dx^2=\frac{c\,dx^4}{a}(e^2A'Q+f^2B'R+(g^2C'+2ag\,D')S+g^2D'V)$$
$$b.\,a^3\,d^3y\,dx=\frac{b\,dx^4}{a}(e^3A'Q+f^3B'R+(g^3C'+3ag^2D')S+g^3D'V)$$
$$a^4d^4y=\frac{dx^4}{a}(e^4A'Q+f^4B'R+(g^4C'+4ag^3D')S+g^4D'V)$$
$$+X\,dx^4(e^3A'+f^3B'+g^3C'+3ag^2D'.$$

Nam

Nam ex iis, quae in §. 5 iam propoſuimus, liquet differentialia dy, d^2y, d^3y non continere Xdx, ſed ſolummodo d^4y, atque hinc etiam ſequentes aequationes pro determinandis coefficientibus deriuantur:

$$A' + B' + C' = 0$$
$$e A' + f B' + g C' + a D' = 0$$
$$e^2 A' + f^2 B' + g^2 C' + 2ag D' = 0$$
$$e^3 A' + f^3 B' + g^3 C' + 3ag^2 D' = 1,$$

quae ſi ſecundum modum in §. 5. praeſcriptum tractentur, dant:

$$(f-e)B' + (g-e)C' + aD' = 0$$
$$f(f-e)B' + g(g-e)C' + (2g-e)aD' = 0$$
$$f^2(f-e)B' + g^2(g-e)C' + (3g-2e)ag D' = 1$$

ex quibus inuenitur:

$$(g-f)(g-e)C' + (2g-e-f)aD' = 0$$
$$g(g-f)(g-e)C' + (3g^2-2eg-2gf+ef)aD' = 1$$

vnde demum fit

$$(g^2-eg-gf+ef)aD' = 1, \text{ vel } D' = \frac{1}{a(g-e)(g-f)}$$

atque $C' = \frac{e+f-2g}{(g-e)^2(g-f)^2}$. Cum vero hi valores pro C' et D' ſurrogantur, A' et B' facile determinari poſſunt. Sin vero iam proponatur aequatio differentialis ſexti gradus, in qua factores aequationis (IV) ſunt ſequentes $m-e=0$, $m-f=0$, $m-g=0$, $m-i=0$, $m-k=0$, $m-k=0$, erit huius aequationis integrale $ay = A'Q + B'R + C'S + D'T$

 + E

$+E'U+F'V$, vbi Q, R, S, T retinent easdem ſignificationes ac in §. 4, U autem eſt $= N^{\frac{kx}{a}}(\int N^{\frac{-kx}{a}}.Xdx+E)$ et $V = N^{\frac{kx}{a}}(F+\int N^{\frac{-kx}{a}}.Udx)$, coefficientes vero ſecundum § praeſentem ſic definiuntur, vt ſit

$$A'(e-f)(e-g)(e-i)(e-k)^2 = 1$$
$$B'(f-e)(f-g)(f-i)(f-k)^2 = 1$$
$$C'(g-e)(g-f)(g-i)(g-k)^2 = 1$$
$$D'(i-e)(i-f)(i-g)(i-k)^2 = 1$$
$$-E'((k-e)(k-f)(k-g)(k-i))^2 = (k-i)(k-g)(k-f)+(k-i)(k-g)(k-e)$$
$$+(k-i)(k-f)(k-e)+(k-g)(k-e)(k-f)$$
$$aF'(k-e)(k-f)(k-g)(k-i) = 1.$$

Ex allatis itaque exemplis colligi facile poteſt, qualis forma ſit tribuenda aequationi integrali quaeſitae, cum differentialis fuerit altioris cuiuscunque gradus, atque bini tantummodo factores aequationis (IV) fuerint inter ſe aequales.

8. Si plures quam bini factores dictae aequationis ſint aequales, quemadmodum ſi quaeratur integrale aequationis differentialis quarti gradus, in qua m praeter vnum valorem $= e$, tres quoque inter ſe aequales $= f$ habeat, ſequentem in modum erit procedendum, vt inueniatur aequatio finita determinando y inſeruiens. In §. 6. iam oſtenſum eſt, quod ſit

$a^3 ddy$

$$a^3 ddy-(g+i)a^2 dydx+giaydx^2=\frac{Q dx^2}{e-f}+\frac{R dx^2}{f-e} \text{ et}$$

$$a^3 ddy-(e+g)a^2 dydx+egaydx^2=\frac{V dx^2}{a},$$

vnde ſi poſterior harum aequationum a priori ſubtrahatur, fit

$$a^2 dy-faydx=\frac{Q dx}{(e-f)^2}+\frac{R dx}{(f-e)(e-f)}+\frac{V dx}{a(f-e)},$$

poſito nimirum $f=g=i$, deinceps integrando poſteriorem hanc aequationem, ſecundum praecepta in §. 3. tradita, oritur

$$a^2 dy-eaydx=\frac{V' dx}{a^2},$$

ex qua collata cum antecedenti colligitur:

$$ay=\frac{Q}{(e-f)^3}+\frac{R}{(f-e)^3}-\frac{V}{a(f-e)^2}+\frac{V'}{a^2(f-e)}.$$

Quantitas vero integralis V′ hac ratione indagatur: quia conf. §. 6. $\int N^{\frac{-fx}{a}}.V dx=\int dx(C+x(B+\int N^{\frac{-fx}{a}} X dx)-\int N^{\frac{-fx}{a}} x X dx)=Cx$ $\frac{+x^2(B+\int N^{\frac{-fx}{a}}.Xdx)+\int N^{\frac{-fx}{a}} x^2 X dx}{2}-x\int N^{\frac{-fx}{a}} xXdx$

erit $V'=N^{\frac{fx}{a}}(D+\int N^{\frac{-fx}{a}}.V dx)=N^{\frac{fx}{a}}\Big(D+x(C-\int N^{\frac{-fx}{a}} xX dx)+\frac{x^2(B+\int N^{\frac{-fx}{a}} Xdx)+\int N^{\frac{-fx}{a}} x^2 Xdx}{2}\Big).$

Propoſita iam aequatione differentiali quinti gradus, in qua m quinque valoribus e, f, g, i, k gaudet,

 quorum

quorum $g = i = k$, fit ipſius integrale ſecundum praeſentem § ſequens:

$$ay = \frac{Q}{(e-f)(e-g)^3} + \frac{R}{(f-e)(f-g)^3} + \frac{((g-e)^2 + (g-e)(g-f) + (g-f)^2)S}{(g-e)^3(g-f)^3}$$
$$+ \frac{(e+f-2g)V}{a(g-e)^2(g-f)^2} + \frac{V'}{a^2(g-e)(g-f)}.$$

Si denique proponatur aequatio differentialis ſexti gradus, in qua tres factores aequationis (IV) fiunt aequales et per $m-i=0$ exprimantur, reliqui autem ſint $m-e=0$, $m-f=0$ et $m-g=0$, tum pro integranda hac aequatione reperietur $ay = A'Q + B'R + C'S + D'T + E'V + F'V'$, vbi ſignificatus litterarum Q, R, S, T, V et V′ ex §§. 4. 6. et praeſenti ſatis perſpicitur, coefficientes autem A′, B′ C′, D etc. ita determinantur, vt ſit

$$A'(e-f)(e-g)(e-i)^3 = 1$$
$$B'(f-e)(f-g)(f-i)^3 = 1$$
$$C'(g-e)(g-f)(g-i)^3 = 1$$
$$D'(i-e)^3(i-f)^3(i-g)^3 = (i-e)^2(i-f)^2 + (i-e)^2(i-f)(i-g) + (i-e)^2(i-g)^2$$
$$+ (i-e)(i-f)^2(i-g) + (i-e)(i-f)(i-g)^2 + (i-f)^2(i-g)^2$$
$$-aE'(i-e)^2(i-f)^2(i-g)^2 = (i-e)(i-f) + (i-e)(i-g) + (i-f)(i-g)$$
$$a^2F'(i-e)(i-f)(i-g) = 1.$$

9. Haec itaque exempla oſtendunt, qua ratione, integrationem cuiuscunque aequationis differentialis formae propoſitae, in qua valorum ipſius m quidam ſunt aequales, reliqui vero inaequales, perficere liceat. Etenim eo totum redit negotium, 1mo vt coefficientes A′, B′, C′ etc. determinentur, quorum

quorum ratio ad §§ praecedentes attendenti obſcura eſſe nequit, 2[do] autem, vt inuenta functione quadam $T = N^{\frac{ix}{a}}(D + \int N^{\frac{-ix}{a}}. X dx)$ reliquae inſequentes V, V′, V″ etc. detegantur. Gaudent vero hae functiones ea proprietate, quod vnaquaeque earum, ab antecedente ſimili modo determinetur, ac V dependet a T, adeo vt quemadmodum ſit $V = N^{\frac{ix}{a}}(E + \int N^{\frac{-ix}{a}}. T dx)$, etiam erit $V' = N^{\frac{ix}{a}}(F + \int N^{\frac{-ix}{a}} V dx)$ et ſic in caeteris. Vt tamen generalem expreſſionem, pro his functionibus V, V′ eruamus, ſit Z inter easdem ordine ea, quae per numerum r indicatur, eritque

$$Z = N^{\frac{ix}{a}}.\left(\frac{x^r \int N^{\frac{-ix}{a}}. X dx}{1.2.3\ldots r} - \frac{x^{r-1}\int N^{\frac{-ix}{a}} x X dx}{1.2.3\ldots r-1}\right.$$

$$+ \frac{x^{r-2}\int N^{\frac{-ix}{a}} x^2 X dx}{1.2.3\ldots r-2.1.2} - \frac{x^{r-3}\int N^{\frac{-ix}{a}} x^3 X dx}{1.2.3\ldots r-3.1.2.3} + \ldots$$

$$\left.\pm \frac{\int N^{\frac{-ix}{a}} x^r X dx}{1.2.3\ldots r} + A x^r + B x^{r-1} + \ldots F x + G\right)$$

circa quam formulam obſeruandum eſt, quod $\int N^{\frac{-ix}{a}} x^r X dx$ ſigno + afficiatur quoties r ſit numerus par, contra vero ſi idem ſit impar. Euidenter quoque hinc perſpicitur, ex aequatione differentiali gradus $r + 1$, in qua omnes valores ipſius m fiunt aequales, inueniri $ay = Z$.

10. Poſtquam itaque indicauimus, quomodo aequatio differentialis formae propoſitae ſit integranda, quando valores ipſius m vel omnes ſunt aequales vel omnes inaequales vel etiam nonnulli aequales reliquis inter ſe inaequalibus; ſupereſt adhuc vt inquiramus, quomodo haec integratio debeat inſtitui eo in caſu, quo m habet valores aequales, qui non vnius eiusdemque ſunt generis, exempli cauſſa ſi proponatur aequatio differentialis quinti gradus, in qua ipſi m hi valores reſpondent e, f, g, i, k quorum ſit $f=g$ atque $i=k$. Deſignatis iam per Q, R, S, T iisdem quantitatibus ac in §. 4, iuxta methodum in illa § nec non §. 6 exhibitam, inuenientur hae aequationes differentiales tertii gradus

$$a^4 d^3y-(g+i+k)a^3d^2ydx+(gi+gk+ik)a^2dydx-gikaydx^3 = \frac{Qdx^3}{e-f}+\frac{Rdx^3}{f-e}$$

$$a^4 d^3y-(f+g+k)a^3d^2ydx+(fg+fk+gk)a^2dydx-fgkaydx^3 = \frac{Qdx^3}{e-i}+\frac{Tdx^3}{i-e}$$

$$a^4 d^3y-(e+i+k)a^3d^2ydx+(ei+ek+ik)a^2dydx-eikaydx^3 = \frac{Vdx^3}{a}$$

$$a^4 d^3y-(e+f+g)a^3d^2ydx+(ef+fg+eg)a^2dydx-efgaydx^3 = \frac{Ydx^3}{a} \text{ vbi}$$

$$V=N^{\frac{fx}{a}}(C+\int N^{\frac{-fx}{a}}.Rdx) \text{ et } Y=N^{\frac{ix}{a}}(E+\int N^{\frac{-ix}{a}}.Tdx)$$

Subtractis ex prima earum, ſecunda et tertia, atque ex ſecunda, quarta emergent ſequentes aequationes:

a^3ddy

$$a^3ddy-(g+k)a^2dydx+gkaydx^2=dx^2\left(\frac{Q}{(e-f)(e-i)}+\frac{R}{(f-e)(f-i)}+\frac{T}{(i-e)(i-f)}\right)$$

$$a^3ddy-(i+k)a^2dydx+ikaydx^2=dx^2\left(\frac{Q}{(e-i)^2}+\frac{R}{(f-e)(e-f)}+\frac{V}{a(f-e)}\right)$$

$$a^3ddy-(f+g)a^2dydx+fgaydx^2=dx^2\left(\frac{Q}{(e-i)^2}+\frac{T}{(i-e)(e-i)}+\frac{Y}{a(i-e)}\right)$$

et ſi haec operatio vlterius continuetur, inuenietur denique

$$ay=\frac{Q}{(e-f)(e-i)^2}-\frac{(3f-2e-i)R}{(f-e)^2(f-i)^3}+\frac{V}{a(f-e)(f-i)^2}-\frac{(3i-2e-f)T}{(i-e)^2(i-f)^3}+\frac{Y}{a(i-e)(i-f)^2},$$

ratio autem inueniendi V et Y, patet ex §. §. 6 et 9. Similiter ſi propoſita ſit aequatio differentialis ſexti gradus, in qua ipſi m hi valores competunt, c, e, f, g, i, k et aſſumtum ſit $f=g$, $i=k$ nec non $P=N^{\frac{cx}{a}}(F+\int N^{\frac{-cx}{a}}Xdx)$ erit huius aequationis integrale completum

$$ay=\frac{P}{(c-e)(c-f)^2(c-i)^2}+\frac{Q}{(e-c)(e-f)^2(e-i)^2}-\frac{R(2(f-c)(f-e)+(f-c)(f-i)+(f-e)(f-i))}{(f-c)^2(f-e)(f-i)^3}$$
$$+\frac{V}{a(g-c)(g-e)(g-i)^2}-\frac{T(2(i-c)(i-e)+(i-c)(i-f)+(i-e)(i-f))}{(i-c)^2(i-e)^2(i-f)^3}+\frac{Y}{a(i-c)(i-e)(i-f)^2}.$$

Denique ſi aequatio differentialis cuius quaeritur integrale, ſit ſexti gradus eiusque indolis, vt valores ipſiu m ſint iidem ac in caſu proxime praecedenti, eo tantum cum diſcrimine, quod iam ponatur $i=k=c$, obtinebitur per integrationem $ay=A'Q+B'R+C'T+D'V+E'Y+F'Y'$ in qua aequa-

aequatione functiones Q, R, T, V, Y, Y′ per § praeſentem et §. §. 4. 9 innoteſcunt, coefficientes autem ſecundum §. 8 determinantur, quod hoc pacto fit. Ad inueſtigandum coefficientem B, conſiderare debemus, qualis eſſet coefficiens functionis R, ſi ſolummodo bini valores ipſius m nimirum f et g eſſent aequales reliqui autem quatuor inaequales, in quo coefficiente deinceps ponendo $i = k = c$, orietur verus coefficiens B′, qui pro hoc caſu obtinet. Similiter vt inueniatur C′, primum quaerendus eſt coefficiens quantitatis T pro aequatione ſexti gradus in qua tres valores ipſius m, nimirum i, k, c ponuntur aequales, in quo coefficiente deinceps ponendo $f = g$, habebimus quaeſitum C′, quae Methodus aequali cum ſucceſſu ad reliquos coefficientes inueniendos adhiberi poteſt. Dabit vero eadem in caſu allato hos coefficientium valores:

$$A'(e-f)^2(e-i)^3 = 1$$

$$- \quad B'(f-e)^2(f-i)^4 = 4f-3e-i$$

$$+ \quad C'(i-e)^3(i-f)^4 = 3(i-e)^2+2(i-e)(i-f)+(i-f)^2.$$

$$+a\, D'(f-e)(f-i)^3 = 1$$

$$-a\, E'(i-e)^2(i-f)^3 = 3i-2e-f$$

$$+a^2\, F'(i-e)(i-f)^2 = 1.$$

11. Caſus in § praecedenti commemorati, ſatis illuſtrare videntur, qualis forma ſit tribuenda quantitati y, pro quacunque aequatione differentiali, in qua valores ipſius m aequales non vnius ſunt

generis,

generis, adeoque eo magis ſuperuacaneum duco hiſce diutius immorari, quod generales formulae pro illis caſibus, non videntur tradi poſſe ſatis expeditae. Itaque iam diſpiciendum venit, quam variationem y ſubeat, ea ex ratione, quod aliqui aut omnes valores ipſius m ſint imaginarii. Quoniam vero in hoc caſu, ſit $m - e = m - p\sqrt{-1}$ conf §. 4 adeoque $e = p\sqrt{-1}$ et praeterea ſit cognitum, quod $N^{\frac{px\sqrt{-1}}{a}} = \text{coſ.}\, \frac{px}{a} + \sqrt{-1}.\, \text{ſin.}\, \frac{px}{a}$ nec non $N^{\frac{-px\sqrt{-1}}{a}} = \text{coſ.}\, \frac{px}{a} - \sqrt{-1}.\, \text{Sin.}\, \frac{px}{a}$, erit pro $N^{\frac{ex}{a}}$ ſubſtituendo valorem ipſius, $N^{\frac{px\sqrt{-1}}{a}}$ et pro $N^{\frac{-ex}{a}}$ eum, quem pro $N^{\frac{-px\sqrt{-1}}{a}}$ aſſignauimus, in §. 4, $Q = (\text{coſ.}\frac{px}{a} + \sqrt{-1}.\, \text{Sin.}\frac{px}{a})(A + \int X dx(\text{coſ.}\, \frac{px}{a} - \sqrt{-1}.\, \text{ſin.}\, \frac{px}{a})$, ex quo omnino perſpicitur, quod functio Q, etiamſi m ponatur imaginarium, realis ſit, quod quum ſimili ex ratione de R, S, T in §. 4, nec non de V, V,′ Y, Y′ in §§ 6. 7. 8. 9. 10 valere cenſendum ſit, patet vtique imaginarios quantitatis m valores non impedire, quo minus y per quantitates reales exprimatur.

12. Denique et illi caſus aliquam merentur attentionem, vbi vnus vel plures valores ipſius m euaneſcunt. Ponatur itaque primo in aequatione (IV.) $r = 0$, vnde et ſequitur eſſe $m = 0$, ſit vero iſte valor ipſius m idem, quem in §. 4

per e indigitauimus, erit proinde in eadem §, $Q=A+\int X dx$, et aequatio integralis ibidem tradita, in hanc transformatur

$$ay=-\frac{Q}{fgi}+\frac{R}{f(f-g)(f-i)}+\frac{S}{g(g-f)(g-i)}+\frac{T}{i(i-f)(i-g)}.$$

Vlterius ſi in aequatione (IV.) non ſolum r, ſed etiam $q=0$ atque in §. 6 ſit $m=g=i=0$ mutabitur aequatio integralis, quae in eadem § occurrit in hanc:

$ay=\frac{Q}{e^2(e-f)}+\frac{R}{f^2(f-e)}+\frac{S(e+f)}{e^2f^2}+\frac{V}{aef}$, vbi $S=C+\int X dx$ et $V=x(C+\int X dx)+D-\int xX dx$. Ex §§ autem 8 et 10 liquet, quomodo inueniatur y, dum aut plures quam bini valores ipſius $m=0$, et reliqui ſunt inter ſe inaequales, aut praeter quosdam valores ipſius m euaneſcentes, quidam eorum ſunt finiti et aequales, ponatur exempli cauſſa, quod in § 10, vbi m his quantitatibus c, e, f, g, i, k exprimitur, ſit $i=k=0$ praetereaque $g=f$, erit quaeſita aequatio integralis haec:

$$ay=\frac{P}{c^2(c-e)(c-f)^2}+\frac{Q}{e^2(e-c)(e-f)^2}-\frac{R(2(f-c)(f-e)+f(2f-e-c))}{f^3.(f-c)^2(f-e)^2}$$
$$+\frac{V}{af^2.(f-c)(f-e)}+\frac{T(2ce+f(c+e))}{c^2e^2f^3}+\frac{Y}{cef^2},$$

in qua aequatione P, Q, R, V omnino retinent ſuos valores in § 10 traditos, at T ſit $=D+\int X dx$ et $Y=x(D+\int X dx)+E-\int X x dx$. Denique obſeruo, quod ſi omnes et ſinguli ipſius m valores euaneſcant ſeu ſi integranda ſit aequatio $a^n d^n y = X dx^n$, eſſe ſecundum § 9 ipſius integrale hoc:

$ay=$

$$ay = \frac{x^{n-1}\int X\,dx}{1.2.3..n-1.} - \frac{x^{n-2}\int xX\,dx}{1.2.3..n-2} + \frac{x^{n-3}\int x^2 X\,dx}{1.2.3...n-3.1.2}$$

$$-\frac{x^{n-4}\int x^3 X\,dx}{1.2.3..n-4.1.2.3} + \ldots \frac{\pm\int x^{n-1} X\,dx}{1.2.3...n-1.} + A\,x^{n-1}$$

$$+ B x^{n-2} + C x^{n-3} \ldots + F x + G.$$

13. Quo magis illuſtretur methodus haec integrandi, cuius praecepta in antecedentibus expoſui, aliquot proponam exempla, quae eius vſum et adplicationem commonſtrare valebunt.

Exempl: 1. Sit aequatio differentialis, cuius integrale quaeritur $a^2 ddy + y dx^2 = 0$, erit vi § 3 $m = \pm \sqrt{-1}$ et iuxta formulam in § 4 traditam:

$$ay = \frac{A.N^{\frac{x\sqrt{-1}}{a}}}{2\sqrt{-1}} - \frac{B.N^{\frac{-x\sqrt{-1}}{a}}}{2\sqrt{-1}} = \frac{A+B}{2}.\ \text{Sin.}\ \frac{x}{a} + \frac{A-B}{2\sqrt{-1}}.\ \text{Coſ.}\ \frac{x}{a}$$

conf. § 11, vnde poſitis

$\frac{A+B}{2} = C$ et $\frac{A-B}{2\sqrt{-1}} = D$, fiet $ay = C.\ \text{ſin.}\ \frac{x}{a} + D.\ \text{coſ.}\ \frac{x}{a}$.

2. Sit iterum propoſita aequatio differentialis $a^4 d^4y - y dx^4 = 0$, in qua $m^4 = 1$ atque $m = \pm 1$ vel $= \pm \sqrt{-1}$, vnde per § 4 obtinetur

$$ay = \frac{A.N^{\frac{x}{a}}}{4} - \frac{B.N^{\frac{-x}{a}}}{4} - \frac{C.N^{\frac{x\sqrt{-1}}{a}}}{4} + \frac{D.N^{\frac{-x\sqrt{-1}}{a}}}{4}$$

quae aequatio ponendo $\frac{D+C}{2} = F$ et $\frac{D-C}{2\sqrt{-1}} = E$, migrat in hanc

$$ay = \frac{A.N^{\frac{x}{a}} - B.N^{\frac{-x}{a}}}{4} + \frac{E.\,\text{coſ}.\,\frac{x}{a} - F.\,\text{ſin}.\,\frac{x}{a}.}{2}$$

3. Aequatio differentialis $ddy + \alpha^2 y dx^2 = X dx^2$, quae eſt illa, ad cuius ſolutionem, notiſſimum problema trium corporum reducitur, dum proponitur integranda, fiet id ſecundum praecepta tradita ſequenti ratione: quoniam $a = 1$ et $m^2 + r = m^2 + \alpha^2 = 0$ erit $m = + \alpha\sqrt{-1}$, ex quo deducitur

$$y = \frac{N^{\alpha x\sqrt{-1}}(A + \int N^{-\alpha x\sqrt{-1}}.Xdx) - N^{-\alpha x\sqrt{-1}}(B + \int N^{\alpha x\sqrt{-1}}.Xdx)}{2\alpha\sqrt{-1}}$$

$$= \left(\frac{(A-B)\,\text{Coſ}.\,\alpha x}{\sqrt{-1}} + (A+B).\,\text{Sin}.\,\alpha x + 2\,\text{Sin}.\,\alpha x \int X dx.\text{Coſ}.\,\alpha x - 2\,\text{Coſ}.\,\alpha x \int X dx.\,\text{Sin}.\,\alpha x\right) : 2\alpha$$

inde autem, poſito $A + B = 2C$, $\frac{A-B}{\sqrt{-1}} = 2D$, eruitur
$ay = \text{Sin}.\alpha x(C + \int X dx.\text{Coſ}.\alpha x) - \text{Coſ}.\alpha x(D + \int X dx.\text{Sin}.\alpha x)$.

4. Aequatio differentialis $a^3 d^3 y - a^2 d^2 y dx - a dy dx^2 + y dx^3 = X dx^3$ ad praeſcriptum §. 6, hac ratione integratur. Quoniam bini factores aequationis $m^3 - m^2 - m + 1 = 0$ dent $m = 1$, et reliquus $m = -1$, erit ſubſtituendo in §. citata loco $e, -1$, loco $f, 0$, et ponendo $g = i = 1$, quaeſita aequatio integralis haec:

$$ay = \frac{N^{\frac{-x}{a}}(A + \int N^{\frac{x}{a}}.X dx) - 3N^{\frac{x}{a}}(C + \int N^{\frac{-x}{a}}.X dx)}{4}$$

$$+ \frac{N^{\frac{x}{a}}(D + x(C + \int N^{\frac{-x}{a}}.X dx) - \int N^{\frac{-x}{a}} x X dx).}{2a}$$

5. Sit

5. Sit iterum propoſita aequatio differentialis: $a^5 d^5 y - 2a^4 d^4 y dx - 2a^3 d^3 y dx^2 + 4a^2 d^2 y dx^3 + a dy dx^4 - 2y dx^5 = X dx^5$, perficietur eius integratio ſecundum §. 10, quum enim m quinque habeat valores, quorum duo $=1$ vnus $=2$ et duo reliqui $=-1$, ſi loco citato, pro e ſubſtituatur 2, et ponatur $f=g=1$ nec non $i=k=-1$, deriuetur inde hoc integrale:

$$ay = \frac{N^{\frac{2x}{a}}(A+\int N^{\frac{-2x}{a}}.Xdx)}{9} - \frac{N^{\frac{x}{a}}(C+x(B+\int N^{\frac{-x}{a}}.Xdx)-\int N^{\frac{-x}{a}} xXdx)}{4}$$

$$-\frac{N^{\frac{-x}{a}}(E+(4+3x)(D+\int N^{\frac{x}{a}}.Xdx)-\int N^{\frac{x}{a}} xXdx).}{36}$$

6. Si denique quaeratur integrale huius aequationis $a^4 d^4 y + a^2 d^2 y dx^2 = X dx^2$, in qua ex quatuor valoribus ipſi m reſpondentibus, duo euaneſcunt, reliquorum autem vnus ſit $=\sqrt{-1}$ alterque $=-\sqrt{-1}$, habebit id ſecundum §§. 8 et 12 huiusmodi formam:

$$ay = -\frac{N^{\frac{x\sqrt{-1}}{a}}(A+\int N^{\frac{-x\sqrt{-1}}{a}}.Xdx)}{2\sqrt{-1}} + \frac{N^{\frac{-x\sqrt{-1}}{a}}(B+\int N^{\frac{x\sqrt{-1}}{a}}.Xdx)}{2\sqrt{-1}}$$

$$+\frac{x(C+\int Xdx)+D-\int xXdx}{a} = \text{Coſ.}\tfrac{x}{a}(E+\int Xdx.\text{Sin.}\tfrac{x}{a})$$

$$-\text{Sin.}\tfrac{x}{a}(F+\int Xdx.\text{Coſ.}\tfrac{x}{a}) + \frac{x(C+\int Xdx)}{a} + \frac{D-\int xXdx}{a},$$

poſito nimirum quod $A+B=2E$ et $\frac{B-A}{\sqrt{-1}}=2F$.

METHODVS INTEGRANDI,

NONNVLLIS AEQVATIONVM DIFFERENTIALIVM EXEMPLIS ILLVSTRATA.

Auctore

AND. I. LEXELL.

§. 1.

Conſtat iam inter omnes fere, qui ad calculum integralem excolendum, animum adplicuere, quod vnaquaeque aequatio differentialis reducatur per integrationem ad tot aequationes differentiales gradus proxime inferioris, quot vnitates continet iſte numerus, quo exprimitur, cuius ſit gradus aequatio illa propoſita. Dum igitur talis adhibetur integrandi methodus, quae ad ſingulas haſce aequationes differentiales inueniendas, ſimul et vno negotio perducit, haud mediocre inde oritur ſubſidium ad detegendam aequationem finitam, qua completum integrale aequationis differentialis primum allatae abſoluitur. Quoties nimirum omnes hae quaeſitae aequationes inter ſe differunt, toties per earundem comparationem, vltimum iſtud integrale ſtatim inuenitur; ſin vero aliquot earum inter ſe plane congruant, tum non vnica quidem operatione, totam integrationem perficere licet, id tamen lucri accipitur, vt aequatio differentialis, ad aliam, quae

quae inferioris eſt gradus deprimi queat. Haec omnia, quae ex diſſertatione, quam cum Illuſtriſſima Academia nuper communicaui, egregie comprobantur, praeſenti occaſione, nonnullis aequationibus differentialibus in exemplum vocatis, vlterius confirmare conſtitui.

§. 2. Proponatur itaque ad integrandum, primum haec aequatio differentialis ſecundi gradus: $a^2 y\,ddy + b\,a^2\,dy^2 = y^2\,dx^2$. Huius vero integrale vt inueniri poſſit, ponatur idem ſequentis eſſe formae: $ay^p\,dy + ny^r\,dx = A.\,N^{\frac{mx}{a}}\,dx$, in qua aequatione p, n, r, m denotant conſtantes ſed incognitas quantitates, quibus detectis, tota determinatur aequatio. Differentietur igitur aſſumtum hoc integrale, atque eruetur inde: $ay^p\,ddy + pay^{p-1}\,dy^2 + nry^{r-1}\,dy\,dx = \frac{mA}{a}.\,N^{\frac{mx}{a}}\,dx^2 = my^p\,dy\,dx + \frac{mn}{a}\,y^r\,dx^2$, proinde ſi tota haec aequatio, ducatur in ay^{1-p}, transmutabitur in iſtam:

$a^2 y\,ddy + p\,a^2\,dy^2 + nray^{r-p}\,dy\,dx - amy\,dy\,dx = mny^{r-p+1}\,dx^2$, qua demum cum aequatione differentiali propoſita, collata, inuenitur $p = b$, $r = p + 1 = b + 1$, $nr = m$ et $mn = 1$ vnde deducitur $m^2 = b + 1$ atque $m = \pm \surd(b+1)$, nec non $n = \pm \frac{1}{(\surd b+1)}$. Dum itaque bini hi valores ipſorum m et n adhibentur, emergent duae aequationes differentiales primi gradus, ſcilicet $ay^b\,dy + \frac{1}{\surd(b+1)}\,y^{b+1}\,dx = A.\,N^{\frac{+x\surd(b+1)}{a}}\,dx$ et $ay^b dy - \frac{1}{\surd(b+1)}\,y^{b+1}\,dx = B.\,N^{\frac{-x\surd(b+1)}{a}}\,dx$

quam

quam ob rem, ſubtracta hac ab illa habetur $y^{b+1} = \frac{\sqrt{(b+1)}}{2}\left(A.\,N^{\frac{x\sqrt{(b+1)}}{a}} - B.\,N^{\frac{-x\sqrt{(b+1)}}{a}}\right)$ vel $y^{b+1} = C.\,N^{\frac{x\sqrt{(b+1)}}{a}} - D.\,N^{\frac{-x\sqrt{(b+1)}}{a}}$, ſi in locum quantitatum $\frac{A\sqrt{(b+1)}}{2}$ et $\frac{B\sqrt{(b+1)}}{2}$ ſubſtituantur C et D.

Quando b negatiuum accipit valorem, adeoque fit $= -(c+1)$ tum erit quaeſitum integrale hoc $y^{-c} = C(\mathrm{Cof.}\frac{x\sqrt{c}}{a} + \sqrt{-1}.\,\mathrm{Sin.}\frac{x\sqrt{c}}{a}) - D(\mathrm{Cof.}\frac{x\sqrt{c}}{a} - \sqrt{-1}.\,\mathrm{Sin.}\frac{x\sqrt{c}}{a})$, adeoque poſitis $C-D = E$ et $(C+D).\sqrt{-1} = F$, $y^{-c} = E.\,\mathrm{Cof.}\frac{x\sqrt{c}}{a} + F.\,\mathrm{Sin.}\frac{x\sqrt{c}}{a}$. Solutio aequationis iam propoſitae vtut generalis videtur, vnicam tamen admittit exceptionem, pro iſto nimirum caſu, quo $b = -1$ adeoque $\frac{1}{\sqrt{(b+1)}} = \infty$, cum vero hoc accidit, erit $\frac{dy}{y} = \frac{(x+e)dx}{a^2}$, ſignificante e conſtantem arbitrariam, atque hinc iterum integrando detegitur $cy = N^{\frac{x^2+2ex}{2a^2}}$, ſi videlicet N ſit numerus cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$.

§. 3. Egregium deinceps vſum, praeſtat methodus haec commemorata ad integrandam aequationem:

$$yx^2 ddy + bx^2 dy^2 + cyx\,dx\,dy = ay^2 dx^2,$$

cuius caſum particularem conſiderauit Cel. Prof. *Krafft* in Tom. V. Nou. Comment. Acad. Huius vero integrale, ſi aſſumatur eſſe $y^p dy + ny^q x^r dx = Ax^s dx$, idem facili negotio determinabitur, inventis valoribus incognitarum p, n, q, r, s. Hae itaque

itaque quantitates vt indagentur, capiendum eſt differentiale aſſumtae aequationis, quo fiet:

$$y^p ddy + py^{p-1} dy^2 + nqy^{q-1} x^r dydx + nry^q x^{r-1} dx^2$$
$$= sA. x^{s-1} dx^2 = \frac{sy^p dydx}{x} + nsy^q x^{r-1} dx^2,$$

atque ducta hac aequatione in $y^{1-p} x^{1-r}$ et ordinatis terminis reperietur:

$$yx^{1-r} ddy + px^{1-r} dy^2 + nqy^{q-p} x dydx - syx^{-r} dydx$$
$$= (s-r).\, ny^{q-p+1} dx^2.$$

Si iam vltima haec aequatio, conferatur cum iſta, cuius integrale quaerimus, determinantur incognitae hunc in modum, vt ſit $r = -1$, $p = b$, $q - p = 1$ vel $q = b + 1$, $nq - s = c$ et $n(b+1) = c + s$, eſt vero quoque $n(s-r) = ns + n = a$, proinde $(s+1).(s+c) = a.(b+1)$ ex quo eruitur $s = -\frac{(c+1)}{2} \pm \sqrt{(\frac{(c-1)^2}{4} + a.(b+1))}$ et $n = \frac{c - 1 \pm 2\sqrt{(\frac{(c-1)^2}{4} + a.(b+1))}}{2(b+1)}$ vel ſi ponatur $f = 2\sqrt{(\frac{(c-1)^2}{4} + a.(b+1))}$, erit $s = -\frac{(c+1) \pm f}{2}$ et $n = \frac{c-1 \pm f}{2.(b+1)}$. Subſtitutis itaque pro p, n, q, r, s ipſorum valoribus, deprehenduntur binae aequationes primi gradus, ſcilicet

$$y^b dy + \frac{c-1+f}{2(b+1)} y^{b+1} x^{-1} dx = A.\, x^{\frac{-(c+1)+f}{2}} dx \text{ et}$$
$$y^b dy + \frac{c-1-f}{2(b+1)} y^{b+1} x^{-1} dx = B.\, x^{\frac{-(c+1)-f}{2}} dx,$$

ideoque dum ſubtrahatur poſterior a priori $\frac{f}{b+1}.\frac{y^{b+1}}{x}$

 $= x$

$= x^{\frac{-(c+1)}{2}}(Ax^{\frac{f}{2}} - Bx^{\frac{-f}{2}})$ vel $y^{b+1} = x^{\frac{1-c}{2}}(Cx^{\sqrt{(\frac{(c-1)^2}{4}+a.(b+1))}} - Dx^{-\sqrt{(\frac{(c-1)^2}{4}+a(b+1))}})$, poſito nempe quod $C = \frac{a.(b+1)}{f}$ et $D = \frac{B.(b+1)}{f}$.

In eo caſu, quo f euaneſcit, ſeu $(c-1)^2 = -4a.(b+1)$, fiunt hae aequationes primi gradus coincidentes, quapropter tum denuo ſuſcipienda eſt integratio, per quam obtinetur $y^{b+1}x^{\frac{c-1}{2}} = (b+1)Ax + B$ vel $y^{b+1} = x^{\frac{1-c}{2}}(Cx + B)$, ſi in locum quantitatis $(b+1)A$ ſufficiatur C. Quod ſi vero contingat, vt f ſit quantitas imaginaria et $= h\sqrt{-1}$, ſequenti ratione procedendum eſt, ad detegendam genuinam integralis formam. Ponatur $x = N^z$ deſignante vt antea N numerum cuius logarithmus naturalis $= 1$, erit itaque $y^{b+1} = x^{\frac{1-c}{2}}(CN^{hz\sqrt{-1}} - D.N^{-hz\sqrt{-1}})$, quae aequatio in hanc mutatur $y^{b+1}x^{\frac{c-1}{2}} = C(\text{Coſ}.hz + \sqrt{-1}.\text{Sin}.hz) - D(\text{Coſ}.hz - \sqrt{-1}\text{Sin}.hz)$, vnde poſito $C - D = E$ et $(C+D).\sqrt{-1} = F$, fit $y^{b+1}x^{\frac{c-1}{2}} = E.\text{Coſ}.hz + F.\text{Sin}.hz = E.\text{Coſ}.hLx + F.\text{Sin}.h.Lx$ denotante L logarithmum.

§. 4. Sit iam aequatio cuius detegenda eſt integratio, haec: $ddy - \frac{dydX}{X} = yX^2dx^2$, in qua dx ponitur conſtans et X functio quaecunque ipſius x. Huius aequationis quaeſita integralis aſſumatur:

$$dy + nX^p y dx = AX^q.N^{m\int X dx}dx,$$

vt

vt itaque incognitae quantitates n, p, q, m inueniantur differentietur vltima haec aequatio, vnde orietur:

$$ddy + nX^p dydx + npX^{p-1} ydXdx = A(qX^{q-1}N^{m\int X dx} dX dx + mX^{q+1}. N^{m\int X dx} dx^2 = \frac{q\,1Xdy}{X} + qnX^{p-1} ydXdx + mXdxdy + mnX^{p+1} ydx^2, \text{ vel } ddy + nX^p dydx - mXdxdy + n(p-q) X^{p-1} y\,dX\,dx - \frac{q\,dX\,dy}{X} = mn\,X^{p+1} y\,dx^2,$$

atque quum haec aequatio, congruere debeat cum illa, quae ad integrandum proponitur, fiet per terminorum homologorum comparationem, $p = q = 1$ $n = m$ et $mn = 1$, atque ideo $m = \pm 1$. Hinc duae proueniunt aequationes differentiales primi gradus, nimirum:

$$dy + yXdx = AX.\, N^{\int X dx} dx \text{ et } dy - yXdx = BX.\, N^{-\int X dx} dx$$

quo ipſo habetur

$$2y = A.\, N^{\int X dx} - B.\, N^{-\int X dx}.$$

Continetur aequatio differentialis in hac § propoſita, ſub iſta generaliori $ddy + \frac{a\,dy\,dX}{X} = y\,X^2 a x^2$, cuius integratio, ſi in poteſtate eſſet, generaliter quoque integrari poſſet haec aequatio primi gradus $dz + z^2 dx = X^2 dx$.

§. 5. Vt vero methodi noſtrae vſus et applicatio, ad perficiendam integrationem aequationum altiorum, eo magis conſteſt, adferre etiam placet exemplum aequationis tertii gradus, ope illius ſolutae. Sit iſta aequatio

 d^3y+

$$d^3y + a\,dy\,ddy = b\,dy^3.$$

Iam more conſueto, ponatur eius integrale eſſe ſequens:

$$N^{my}(ddy + q\,dy^2) = A\,dx^2$$

atque ſumatur huius differentiale, quo facto poſtquam omnes termini per N^{my} diuiſi fuerint, oritur:

$$d^3y + (2q + m)dy\,ddy + mq\,dy^3 = 0,$$

vnde debita inſtituta comparatione huiuſce aequationis cum primum propoſita, fiet $a = 2q + m$ et $-mq = b$, ideoque $m^2 - ma = 2b$, ex quo iterum deducitur $m = \frac{a \pm \sqrt{(a^2 + 8b)}}{2} = \frac{a \pm c}{2}$, ſi breuitatis cauſſa loco $\sqrt{(a^2 + 8b)}$ ſubſtituatur c, atque $q = \frac{a \mp c}{4}$. Hiſce determinatis, inueniuntur hae aequationes differentiales ſecundi gradus:

$$ddy + \frac{a + c}{4}dy^2 = A.\,N^{\frac{c - a}{2}.y}\,dx^2 \text{ et}$$

$$ddy + \frac{a - c}{4}.\,dy^2 = B.\,N^{\frac{-(c + a)}{2}.y}\,dx^2$$

vnde per ſubtractionem poſterioris a priori deducitur $\frac{c\,dy^2}{2} = N^{\frac{-ay}{2}}dx^2.(A.\,N^{\frac{cy}{2}} - B.\,N^{\frac{-cy}{2}})$, quae ad aequationem primi gradus facile deprimitur. Si fuerit $c = 0$, quod accidit cum $a^2 = -8b$ ex. gr. ſi $a = 4$ et $b = -2$, tum denuo integranda eſt alterutra aequationum ſecundi gradus, multiplicetur igitur ea per $2dy$, eritque $N^{\frac{ay}{2}}(2dy\,ddy + \frac{a}{2}dy^2) = 2A\,dy\,dx^2$,

cuius

cuius integrale eſt $N^{\frac{ay}{2}} dy^2 = (2Ay + B)dx^2$. Denique dum c in imaginariam tranſit quantitatem, haec obſeruanda veniunt. Ponatur $c = m\sqrt{-1}$, fiet ſubſtituto hoc valore pro c,

$$N^{\frac{ay}{2}} dy^2 = \frac{2dx^2}{m\sqrt{-1}} \left(A\left(\text{coſ.}\frac{my}{2} + \sqrt{-1}.\text{ſin.}\frac{my}{2}\right) \right.$$
$$\left. - B\left(\text{coſ.}\frac{my}{2} - \sqrt{-1}.\text{ſin.}\frac{my}{2}\right)\right) = dx^2\left(E.\text{coſ.}\frac{my}{2} + F.\text{ſin.}\frac{my}{2}\right),$$

aſſumtis ſcilicet $E = \frac{2(A-B)}{m\sqrt{-1}}$ et $F = \frac{2(A+B)}{m}$.

§. 6. Ea, quae in praecedenti § allata ſunt valent quoque circa integrationem huius aequationis: $y^2 d^3y + aydyddy = bdy^3$. Si enim ſumatur $y = N^z$, erit $dy = N^z dz$, $ddy = N^z(ddz + dz^2)$, $d^3y = N^z(d^3z + 3dzddz + dz^3)$, quibus valoribus in aequatione allata ſubſtitutis, omnibusque terminis aequationis emergentis per N^z diuiſis, oritur:
$d^3z + (a+3)dzddz = (b-a-1)dz^3$, cuius aequationis integrale in § antecedenti exhibuimus.

§. 7. Denique et haec methodus cum vſu adhiberi poteſt, ad detegendas conditiones, ſub quibus aequationes differentiales altiorum graduum ſaltem vna vice integrabiles euadant, quod vnico exemplo comprobaſſe ſufficiat. Sit nimirum propoſita haec aequatio:

$$d^4y + ad^3ydy + b.ddy^2 + cddydy^2 = edy^4,$$

quaeritur conditio, qua poſita integrationem admittat. Ponatur itaque eius integrale fore:

$$N^{my}(d^3y + pdyddy + qdy^3) = Adx^3,$$

 quod

quod perfecte cognoſcetur, inuentis valoribus incognitarum m, p, q. Sumto igitur differentiali aſſumti huius integralis, et diuiſis omnibus terminis per N^{my}, eruitur:

$$d^4y+(m+p)d^3ydy+pddy^2+(mp+3q)dy^2ddy=-mqdy^3.$$

Quae aequatio collata, cum ipſa cuius integrale quaeritur dabit $a=m+p$, $b=p$, $c=3q+mp$ et $e=-mq$, vnde duae deducuntur aequationes, ipſi m inueniendo inſeruientes, ſcilicet $m=a-b$ et $m^2b=mc+3e$, adeoque fiet $(a-b)^2.b=a-b).c+3e$. Sub hac itaque conditione liquet aequationem fore integrabilem et reduci poſſe, ad aequationem hanc tertii gradus:

$$N^{(a-b)y}(d^3y+bdyddy+\frac{e}{b-a}dy^3)=A\,dx^3.$$

Conſiderata aequatione $(a-b)^2b=(a-b)c+3e$, patet quod datis tribus coefficientium a, b, c, e, reliquus facile determinetur, et quidem c vnica ratione, ſi dati fuerint a, b, e, itemque e vnico modo datis a, b, c, a vero duplici ratione, datis b, c, e et b triplici datis a, c, e.

PHYSICO-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

COM-

COMMENTATIONES PHYSICO-MECHANICAE DE FRICTIONIBVS VARIIS ILLVSTRATAE EXEMPLIS.

Auctore

DANIELE BERNOVLLI.

§. 1.

Non raro accidit, cum nouas de argumento nondum ſatis explorato disquiſitiones aggredimur, vt ea quae facillima videbantur in ipſo limine aliquam haud expectatam difficultatem manifeſtent. Id nuper mihi euenit cum ad leues aliquas quaeſtiunculas mechanicas de frictionibus deducerer nimium vt videbatur ſimplices, quam quae vllo modo ſolutionem morari poſſent; motum cogitabam virgae plano aſpero incumbentis, cuius extremitati potentia oblique eſſet applicata, quae virgam lentiſſimo motu protraheret; huiusmodi Problematibus incertitudo directionis, ſub qua frictiones partium translationi reſiſtunt, inopinata ſuperaddit impedimenta. Conſtitui itaque id argumenti aliquibus explanare praeceptis atque exemplis.

§. 2. Quum de ſolis ſuperandis frictionibus ſermo eſt, potentiae haud maiores ſtatuendae ſunt, quam quae ad hunc finem requiruntur, ne ſimul inertiae ratio ſit habenda. Hinc eſt quod motum in ſingulis partibus lentiſſime fieri ſuppono: nec loquor de corpore ſimplici, cuius ſingula elementa communi quaſi motu protracta cenſeri ſolent, ſed de ſyſtemate plurium huiusmodi corporum ſimplicium nexu aliquo inter ſe cohaerentium. In iis quae pertractabo exemplis a ſimplici potentia plerumque duplex oritur motus, alter progreſſiuus alter rotatorius circa centrum aliquod peculiari modo determinandum; nec tamen licet principio alias ſolenni, compoſitionis et reſolutionis *motus* indiscriminatim vti; compoſitio autem et reſolutio *potentiarum* hic eodem modo adhiberi poterit ſicuti in mechanica, quae dicitur pura; adhibendae cautelae ex ſequentibus elucefcent.

§. 3. Fingamus ſuper plano horizontali corpus, quod voco ſimplex, cuius frictio ſit $= f$; corpori applicetur potentia, qua vniformiter lentoque motu moueatur ſub directione conſtanter eadem; erit vtique iſta potentia $= f$; ſi minor ſit, corpus non mouebitur, ſi maior, motus fiet acceleratus, quod vtrumque ab hypotheſi noſtra recedit: haec dum ita fiunt, ſuperuenire putetur noua potentia Φ, cuius directio ſit ad alteram perpendicularis; ſi minor fuerit potentia Φ quam altera f, erunt forſan

taſſe

taſſe qui dubitent, an non omnia ſint in ſtatu priſtino permanſura, ideo quod nouus motus ad priorem perpendicularis videatur fieri non poſſe, quin de nouo frictio f ſuperetur. Verum quaeſtione paullo accuratius perpenſa perſpicitur, vtcunque paruula ſit potentia Φ, motum oriturum inter vtramque directionem medium; id cum paradoxum videretur amico cuidam, cui quaeſtionem propoſueram, rerum phyſicarum probe gnaro, vt omnem ipſi ſcrupulum eximerem, in mentem venit faciliimum experimentum; praeſto erat tabula ardeacea (*d'ardoiſe*) cui nummum imponebamus; huic pauxillo cerae tenue agglutinabamus filum; deinde tabulam tantillum inclinabamus ac denique filum lentiſſime trahebamus ſub directione quae conſtanter et exacte eſſet parallela cum interſectione tabulae et plani horizontalis; vidimus autem nummum continue propius ad hanc interſectionem accedere, ſemitamque a directione fili declinare, tantoque magis declinare, quanto magis tabula inclinaretur. Ergo potentia Φ, quae in hoc exemplo ab ipſa corporis grauitate oritur, ſuum habet effectum, vtcunque fuerit exigua etiamſi ad alteram potentiam fuerit perpendicularis, et ſi ſola agat omni effectu careat. Notandum porro potentiam priorem, quanta ad mouendum corpus requiritur, diminui ſtatim ac altera ſuperueniat; ſit iſta potentia diminuta $= F$ atque angulus interceptus inter directionem potentiae F et directionem motus orituri $= z$

 habe-

habebitur pro motu ſuper plano horizontali $\sqrt{}(FF + \Phi\Phi) = f$; ſimulque tangens $z = \frac{\Phi}{F}$ quia potentia ſimplex ex duabus potentiis compoſita ſemper eſſe debet $= f$ ſimulque directio potentiae ſimplicis coincidere cum directione motus. Igitur inter quantitates arbitrarias F, Φ et z, ſi vnica proponatur ceu data, ambae reliquae inde ſimul determinabuntur.

Tab. IV. §. 4. Sit nunc (fig. 1.) planum inclinatum F H L G denotetque F G interſectionem huius plani cum horizonte; ſit porro horizontalis F M ad F G perpendicularis, ita vt angulus M F H indicet inclinationem plani atque huic plano ſuperincumbat corpus ſimplex A; quaeritur directio A C ſub qua corpus A protrahendum ſit, vt ſua ſponte moueatur ſub directione A D ipſi F G parallela et quanta futura ſit iſta potentia.

Sit pondus corporis $= P$, frictio ſuper plano pro ſitu eius horizontali $= f$ et angulus inclinationis plani ſiue M H F $= A$; conſiderabimus hic alium inſuper angulum quem vocabo C et qui indicat maximam plani inclinationem, ſub qua pondus ſola ſua grauitate ſuper plano defluere incipit: notum autem eſt ſic fieri $P\,\text{ſin.}\,C = f\,\text{coſ.}\,C$, vnde $f = P\,\text{tang.}\,C$. Exprimat nunc linea A C potentiam quaeſitam eiusque directionem fiatque parallelogrammum rectangulum A D C E, cuius latus A D ſit parallelum cum horizontali F G atque latus A E ad A D perpendiculare; ſit angulus $CAD = z$, atque

que potentia A C $= \pi$; denique ducatur A B quae exprimat conatum corporis ſuper plano defluendi ab actione grauitatis oriundum; patet fore potentiam A B perpendicularem ad A D et $=$ P ſin. A; iam vero ſi potentia A C reſoluatur in A E et A D, erit potentia A E $= \pi$ ſin. z et potentia A D $= \pi$ coſ. z; oportet autem vt ſit A E $=$ A B ſiue π ſin. $z =$ P ſin. A et π coſ $z = f$ coſ. A; poſterior haec aequatio ex eo petitur quod frictio, dum planum inclinatur, diminuatur in ratione coſinus inclinationis, quia nimirum in hac ratione appreſſio corporis contra planum diminuitur. Ex iſtis duabus aequationibus deducitur $\frac{\text{ſin.}\, z}{\text{coſ.}\, z} = \frac{P\, \text{ſin.}\, A}{f\, \text{coſ.}\, A}$ ſiue tang. $z = \frac{P}{f}$ tang. A $=$ tang. A $\times$ cotang. C, determinato angulo z, obtinetur ipſa potentia $\pi = \frac{P\, \text{ſin.}\, A}{\text{ſin.}\, z}$ ſiue etiam $\pi = \frac{f\, \text{coſ.}\, A}{\text{coſ.}\, z}$; quod ſi vero omnia per quantitates immediate datas determinare velimus habebimus $\pi = f$ coſ. A $\times$ $\sqrt{(1 + (\text{tang. A cotang. C})^2)}$ ſiue etiam $\pi =$ coſ. A $\times \sqrt{(ff + PP \square \text{tang. A})}$; huiusmodi exempla ſatis indicant cautelas, quibus pro corporibus ſimplicibus vtendum ſit; iam igitur ad alia progredior.

§. 5. Sint duo corpora ſimplicia A et B (fig. 2.) in plano horizontali poſita et filo tenui atque extenſo aut virgula intermedia ponderis experte connexa; putetur porro corpori anteriori B potentiam B E ad datum angulum applicari, quae praeciſe tanta ſit, vt corpus B vel ambo corpora A et B mouere poſſit; quaeritur relatio inter fri- Tab. IV.

ctiones et potentiam mouentem. Reſoluatur potentia B E in B C ſecundum directionem A B et in B D perpendicularem; ſitque frictio corporis B $= f$ alteriusque corporis A $= \Phi$; potentia B E $= \pi$ et angulus E B D $=$ A; vt nunc relatio inter praefatas obtineatur quantitates, duo erunt ab inuicem caſus diſtinguendi; vel enim corpus B ſolum mouebitur motu circulari circa alterum corpus A quieſcens, vel mouebuntur ambo corpora pro magnitudine anguli A vel intenſitate frictionis corporis A.

Caſus primus contingit, cum potentia B D eſt aequalis frictioni f, dum altera potentia B C corpus A de loco mouere non valet, ita vt plane fiat inutilis; eſt autem potentia B D $= \pi$ coſ. A vnde habetur π coſ. A $= f$ vel $\pi = \frac{f}{\text{coſ. A}}$;

Caſus ſecundus oritur, cum aucto angulo A potentia B C ſeu π ſin. A ita increſcit, vt ſuperet frictionem corporis A indicatam litera Φ; limes autem eſt inter vtrumque caſum cum fit π ſin. A $= \Phi$ vel $\frac{f\,\text{ſin. A}}{\text{coſ. A}} = \Phi$ vel tang. A $= \frac{\Phi}{f}$; ſuperato hoc limite protinus incerta fit directio ſecundum quam corpus B moueri incipiat, ipſaque potentia mouens B E alium valorem, quam qui aequatione $\pi = \frac{}{\text{coſ. A}}$ antea expreſſus fuerat, ſumit: cum etiam alterum corpus motum obtinet, qui inſuper erit determinandus. Haec ſingula ſequentem in modum erunt definienda.

§. 6.

§ 6. Retentis denominationibus quibus vſi ſumus, ponamus (fig. 3.) tangentem anguli D B E Tab. IV. maiorem quam $\frac{\Phi}{f}$, tunc calculus ita erit ponendus. Diuidatur potentia lateralis B C in duas partes B F et F C, ſitque $FC = \Phi$ adeoque $BF = \pi\,\text{ſin.}\,A - \Phi$; inſeruiet autem potentia F C ad ſuperandam frictionem corporis A, cuius motus neceſſario habebit directionem A B: hoc modo duae vires B F et B D vnice impenduntur in mouendum corpus B: compleatur rectangulum B F G D ducaturque diagonalis B G; ſic perſpicuum fit corpus motum iri ſecundum directionem B G, atque fore ſingulis momentis (ſi modo angulus A conſtanter idem retineatur) motum corporis A ad motum corporis B vt B F ad B G; ipſa denique diagonalis B G vsque facienda eſt aequalis frictioni f. His praemiſſis, quae reliqua ſunt, nullam facient haeſitationem, quandoquidem nihil aliud porro requiritur quam vt determinetur potentia B E ſeu π talis, vt praefatis ſatisfiat conditionibus. Eſt autem $BD = \pi\,\text{coſ.}\,A$ et vi conſtructionis $BF = \pi\,\text{ſin.}\,A - \Phi$; hinc $BG = \sqrt{((\pi\,\text{coſ.}\,A)^2 + (\pi\,\text{ſin.}\,A - \Phi)^2)} = f$ vnde deducitur $\pi = \Phi\,\text{ſin.}\,A + \sqrt{(ff - \Phi\Phi\,\square\,\text{coſ.}\,A)}$; vt nunc etiam determinemus directionem B G ſecundum quam corpus B mouebitur, ponemus angulum quaeſitum $DBG = z$ atque ſic facile ex praemiſſis deducitur fore $\frac{DG}{DE}$ ſiue

$$\frac{\text{tang.}\,z}{\text{tang.}\,A} = 1 - \frac{\Phi}{\Phi\,\square\,\text{ſin.}\,A + \text{ſin.}\,A\,\sqrt{(ff - \Phi\Phi\,\square\,\text{coſ.}\,A)}}.$$

§. 7.

§. 7. Liceat nunc aliqua ex praemiſſa theoria deducere corollaria.

(*a*) Si ponatur $z = o$, habetur iterum limes, inter motum corporis A eiusque quietem; tunc autem ſi debitae fiant ſubſtitutiones, prodit tang. A $= \frac{\Phi}{f}$ et $\pi = \frac{f}{cof. A}$, plane vt in quinto paragrapho inuenimus. Si angulus A minor acciperetur, protinus falſae forent aequationes praecedentis paragraphi, quamuis quantitas radicalis nondum ſit imaginaria; tranſitus ſit a vero ad falſum, non ab reali ad imaginarium, nec enim ambo caſus vlla lege continuitatis inter ſe cohaerent.

(*b*) Si fuerit $f = \Phi$ id eſt, ſi frictiones amborum corporum fuerit inter ſe aequales, fit $\pi = 2 f$ ſin. A et $\frac{tang.\, z}{tang.\, A} = 1 - \frac{1}{2 \square\, ſin.\, A}$.

(*c*) Si $\Phi = o$ prodit $\pi = f$ atque tang. $z =$ tang. A, quod ipſa rei natura per ſe indicat, verum ſi e contrario ponatur $f = o$ oportebit vtique vt ſimul ponatur coſ. A $= o$, ne in quantitatem imaginariam incidamus; ſicque prodibit $\pi = \Phi$ atque tang. $z = o \times \infty$ ratio huius ambiguitatis iterum per ſe eſt manifeſta.

(*d*) Si pro quibuscunque frictionibus ponatur coſ. A $= o$, fiet ſemper $\pi = \Phi + f$ et tang. $z = \frac{f}{\Phi + f}$ tang. A $= \infty$, quod rurſus per ſe manifeſtum erat.

§. 8. Quae dicta ſunt multis aliis problematibus anſam darent, ſi ad ſyſtemata multifila progredi

gredi vellemus; expoſitis autem principiis noſtris phyſico-mechanicis quod reliquum eſt, id ſere omne ad Geometriam puram pertinet, nimiumque nos ab inſtituto deduceret. Ad alia propero ſcopo noſtro minus aliena; dicam primo de centro rotationis ſpontaneae quod frictioni conueniat. Ante hos triginta et quod excurrit annos argumentum iſtud tunc temporis nouum examini ſubieci, quatenus ſolam materiae inertiam reſpicit et ab eo tempore haec theoria eximio vſui eſſe coepit; prima eius elementa ſtabiliui et expoſui in diſſertatione de *percuſſione excentrica* commentariis noſtris Academicis eius temporis inſerta; demonſtraui autem, centrum rotationis ſpontaneae inertiae debitum poſitum eſſe in ipſo centro oſcillationis, ſi punctum cui potentia applicatur pro puncto ſuſpenſionis accipiatur.

§. 9. Sit nunc A B (fig. 4.) linea vniformiter grauis plano horizontali incumbens eidemque in ſingulis punctis vniformiter appreſſa; putetur porro vectis B C grauitatis expers, ad A B in directum poſitus eidemque firmiter applicatus, cuius extremitati C potentia C E perpendiculariter adhaereat, quanta requiritur vt rotatio fiat circa punctum D poſitione datum et axiculo firmatum; tum quaeritur relatio inter omnes has quantitates huc facientes, quod quidem ex primis elementis mechanicis de vecte et ex indole frictionum, quatenus hae ab velocitatibus independentes ponantur, deducitur, ſed Tab. IV.

 quod

quod hic ob nexum, quem habebit cum ſequentibus, indicandum cenſui; ſit nempe $AB = l$, $BC = a$; $DC = \lambda$; intelligatur per f frictio directa totius lineae A B; ſi ab axiculo libera ſecundum longitudinem ſuam protrahatur; ſit denique potentia $CE = \pi$; erit ſumma omnium momentorum, quae a frictione partis D B formantur $= (\lambda - a)^2 \times \frac{f}{2l}$, ſimilisque ſumma pro altera parte A D eodem ſenſu accipienda $= (l + a - \lambda)^2 \times \frac{f}{2l}$: ambae hae quantitates ſimul ſumtae erunt aequales momento potentiae π pro eodem rotationis centro in D ſiue aequalis quantitati $\lambda\pi$. Exinde deducitur $\pi = \frac{2\lambda\lambda - 4a\lambda + 2aa + ll + 2al - 2l\lambda}{2l\lambda} f$; notetur autem numeratorem nihil aliud eſſe quam aggregatum ex quadrato A D et quadrato D B id eſt, ex partium quadratis. Sic igitur erit alio modo $\frac{\pi}{f} = \frac{AD^2 + DB^2}{2AB \times DC}$.

§. 10. Nunc vero lineam A B ab axe ſuo liberari ponamus, atque potentiam in C applicatam ſenſim intendi, donec motus oriatur; ſic manifeſtum eſt, etiamnum motum rotatorium oriturum eſſe circa punctum aliquod quod rurſus in D poſitum putetur; huiusmodi punctum centrum *rotationis ſpontaneae* nunc vocari ſolet, idque ſic determinabitur ſit $BD = x$; $AD = l - x$ atque $CD = \lambda = a + x$; his acceptis denominationibus fit $\frac{\pi}{f} = \frac{ll - 2lx + 2xx}{2l(a + x)}$, quia vero potentia π minima ponitur, quae virgam ſiue lineam A B quocunque modo

modo mouere poſſit, oportet vt punctum D ita ſit locatum, vt quantitas $\frac{ll - 2lx + 2xx}{2l(a+x)}$ ſit minima; vnde ſequitur fore $x = -a + \sqrt{\frac{(ll + 2al + 2aa)}{2}}$ tuncque erit potentia, ad rotationem virgae liberae requiſita, aequalis $\frac{\sqrt{(2ll + 4al + 4aa)} - 2a - l}{l} f$.

§. 11. Nouum cum ſit iſtud de centro gyrationis ſpontaneae argumentum, quamuis triuiali calculo exploratum, non detrectabo generaliorem eius commentationem phyſicam.

Si fuerit B C vel a veluti infinita, poterit pro quantitate radicali $\sqrt{\frac{(ll + 2al + 2aa)}{2}}$ ſimpliciter poni $a + \frac{1}{2} l$ adeoque $x = \frac{1}{2} l$; ergo tunc punctum D cadit in medium lineae A B; quod ſi deinceps diminui ponatur diſtantia a, accedet centrum conuerſionis ſeu punctum D ad extremitatem A; tum ſi potentia in ipſo puncto B ſit applicata, fiet B D ſeu $x = l\sqrt{\frac{1}{2}}$ deinde ſi potentia citra punctum B ipſi lineae A B applicata fuerit, etiam tunc punctum conuerſionis ad extremitatem A magis accedet, donec potentia poſita fuerit in medio lineae A B; tunc autem erit $a = -\frac{1}{2} l$ et $x = l$, ſic vt linea A B circa ipſam extremitatem A rotetur. Paradoxa admodum videtur haec poſtrema proprietas; quis enim dubitet virgam vniformem A B, cuius puncto medio potentia applicata fuerit, dum mouetur, parallelismum conſtanter eſſe ſeruaturam? En igitur quod res eſt. Si potentia omni accura-

tione mathematica virgam biſecet, in duas partes aequales, mouebitur virga motu parallelo, at ſi, vel infinite parum, punctum cui potentia applicatur, diſtet a medio, protinus eueniet vt gyratio fiat vel circa extremitatem A vel circa alteram B; circa priorem ſi paullo propior ſit extremitati B, circa poſteriorem ſi propior fuerit extremitati A. Id ipſum indicat theoria; quod vt tanto clarius fiat, notabimus quantitatem radicalem $\sqrt{\frac{(ll+2al+2aa)}{2}}$ vi noſtrae figurae ab initio poſitiue eſſe accipiendam; variante autem diſtantia *a*, eandem quantitatem radicalem negatiue ſumendam eſſe, ſi C propius ad A quam ad B ſitum ſit; in ipſiſſimo autem medio, cum ambiguum ſit ſignum, habebitur $x = \frac{1}{2}l \pm \frac{1}{2}l$; ergo B D eſt vel $= l$ vel $= 0$ atque ſic centrum rotationis ſpontaneae D cadet vel in punctum A, ſi punctum C nondum accurate attigerit medium lineae A B, vel in punctum B, ſi tantillum fuerit transgreſſum, atque in biſectionis puncto, motus virgae ad vtrumque ſtatum aequaliter inclinabit, quod fit cum ſibimet parallelus eſt; ſic igitur centrum rotationis a puncto A ſubito tranſilit in punctum B et nunquam extra lineam propoſitam A B cadit. Denique ſi potentia ad alteram virgae medietatem transpoſita putetur, omnia inuerſo ordine recurrent.

Poſt determinatum centrum rotationis ſpontaneae, indicat formula in fine paragraphi 10^mi^ expoſita

poſita ipſam potentiam requiſitam ad rotandam virgam. Sic ſi potentia applicatur extremitati B, erit haec potentia $= f(\sqrt{2}-1)$ ſeu propemodum $= \frac{2}{5}f$; ſi ipſi medio inferatur, poſito $a = -\frac{1}{2}l$, fiet $\pi = f$ vel potius $\pi = \pm f$, quia nimirum paullo poſt hanc inſertionem potentia protinus ad oppoſitam partem agere debet, vt rotatio ad eandem qua coepit plagam pergat.

§. 12. Quamuis centrum liberae rotationis nunquam vltra extremitates A et B euagetur, nihil tamen obſtat, quo minus ponatur, rotationem coactu fieri circa punctum extra virgam A B aſſumtum; hoc poſito potentia π directe foret ex principiis mechanicis determinanda; ſi ſcilicet punctum conuerſionis D ad alteram partem extremitatis A putetur atque diſtantia inter vtrumque punctum vocetur b, reperitur, retentis caeteris ſingulis, $\pi = \frac{b+\frac{1}{2}l}{b+l+a}f$ ſiue $\pi = \frac{b+\frac{1}{2}l}{\lambda}f$; iſte autem valor minime cohaeret cum eo, quem in fine paragraphi noni expoſuimus, niſi cum ſit $b = 0$; ratio huius rei eſt, quod ambo caſus lege continuitatis non cohaereant; idem dicendum de caſu, quo punctum conuerſionis D ad alteram partem extremitatis B poſitum aſſumitur.

§. 13. His praemiſſis praeliminaribus aggredior denique quaeſtionem cuius ſtatim ab initio in paragrapho 1° mentionem feci, non ſine peculiari cir-

cumſpectione pertractandam; ſcilicet nunc inquiram, quid futurum ſit, ſi potentia puncto C applicata, obliqua fuerit ad vectem BC ſub angulo ACE conſtanter eodem. Erunt fortaſſe qui putent, potentiam obliquam ſimpliciter in duas laterales eſſe reſoluendam, alteram perpendicularem ad BC, alteram in directum poſitam cum BC, tuncque fore priorem, vi paragraphi 10^{mi} $= \frac{\sqrt{(2ll + 4al + 4aa)} - 2a - l}{l} f$ atque alteram potentiam $= f$. Legitima haec foret Problematis ſolutio, ſi in aeſtimanda frictione liceret principio compoſitionis et reſolutionis motus vti, id autem cum minime liceat, dico ante omnia pro ſingulis virgae AB elementis motum definiendum eſſe abſolutum eiusque directionem, inde enim habebitur directio, ſecundum quam elementum propoſitum frictionem patitur; erit vtique illa directio alia pro ſingulis elementis. Sic pro quouis elemento innoteſcit frictionis potentiola elemento applicata; Haec demum potentiola erit reſoluenda in duas laterales, alteram in ipſa directione AB alteram ad AB perpendicularem; ſumma primae claſſis indicabit potentiam quae in directione AB agit et ſumma omnium momentorum ſecundae claſis, ſi referantur ad punctum D erit aequalis momento potentiae quae perpendiculariter ad AC cagit; Haeque tandum duae aequationes indicabunt relationem omnium quantitatum quaeſtionem noſtram determinantium, ſi modo punctum conuerſionis D legitime definitum fuerit.

Patet

Patet iam ex iſta ſolutionis adumbratione, problema noſtrum, plura quam quae a geometria communi expectari poſſint, requirere ſubſidia, quamvis inter ſimpliciſſima numerandum ſtatim videatur; Igitur operae pretium me facturum puto, ſi ſolutionem accuratius exponam praeſertim cum intactum adhuc ſit hoc argumenti genus, plurimisque amplificari poſſit modis, qui Geometrarum vel maxime exercitatorum contemplationem allicere queant.

§. 14. Fuerit AB (fig. 5) virga vel veluti linea grauis, vniformiter ad planum, cui incumbit appreſſa; huic in directum affixus putetur vectis BC omnis quaſi expers grauitatis, extremitati C applicata nunc ſit potentia CE ſub angulo permanente GCE vel *gce*, quae lentiſſimo motu virgam protrahat; tum quaeritur huius motus plena determinatio vna cum potentiae magnitudine. Sit ſitus proximus ſyſtematis *abc*, ponaturque centrum rotationis ſpontaneae virge in D idque mox tranſlatum in *d*; centro D ducantur arculi circulares infinite parui BL, NO, M*a*, vna cum lineolis B*b*, N*n*, A*a*, eſt autem locus puncti N vel *n* indeterminatus et vbiuis ſumendus: in figura ad vtramque conuerſionis partem ſiſtitur.

Solutionis cardo in hoc potiſſimum vertitur, vt proportio conſideretur inter L*b* et BL quae relationem indicant inter motum progreſſiuum ſiue longitudinalem et motum rotatorium ſit igitur Tab. IV.

L*b* =

$Lb = \alpha$, $BL = \beta$, $Bb = \sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}$; patet motum longitudinalem in ſingulis virgae punctis eſſe eundem, dum rotatorius tanto minor eſt, quantum vicinior puncto D; Ex vtroque motu componitur motus abſolutus Nn pro quouis puncto N; ergo directio motus fit ſecundum Nn atque ſecundum eandem directionem in contrarium agit reſiſtentia frictioni debita; reſiſtentia haec conſtanter quidem pro quouis elemento manet eadem, directionem autem ſuam, variato puncto N, variat; Retentis denominationibus in §. 9° adhibitis, ponemus DN vel $dn = s$, eiusque elementum NN′ vel $nn' = ds$, erit frictio huius elementi $= \frac{fds}{l}$: Quod ſi nunc praeſatam frictionem vel reſiſtentiam exprimamus per ipſam lineolam Nn licebit reſpectu potentiae principio decompoſitionis vti, quod non licebat cum Nn motum abſolutum puncti N exprimeret; igitur iam potentiolam nN reſoluemus in longitudinalem nO eidemque perpendicularem ON; ſic duas obtinebimus potentiolarum claſſes, quarum prior tota ad motum longitudinalem poſterior ad motum rotatorium pertinet: Vtramque partem ſeorſim exponam.

Pars prima ſolutionis. Ponatur DB $=$ A; ſic erit $NO = \frac{s}{A}\beta$; $On = \alpha$; $Nn = \sqrt{(\alpha\alpha + \frac{ss}{AA}\beta\beta)}$; potentiola nO a frictione elementi NN′ oriunda $= \frac{nO}{nN} \times \frac{fds}{l} = \frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha\alpha + \frac{ss}{AA}\beta\beta)}} \times \frac{fds}{l} = \frac{fds}{l\sqrt{(1 + \frac{\beta\beta ss}{\alpha\alpha AA})}}$; Ponatur

$s =$

$s = \frac{\alpha A(1 - qq)}{2 \beta q}$ mutabitur poſtrema iſta quantitas in $-\frac{f \alpha A d q}{l \beta q}$ cuius integralis eſt $\frac{f \alpha A}{l \beta}$ log. $\frac{1}{q}$, quae ſi valor s reſtituatur, dat $\frac{f \alpha A}{\beta l}$ log. $\frac{1}{\sqrt{(1 + \frac{\beta \beta s s}{\alpha \alpha A A})} - \frac{\beta s}{\alpha A}}$ nec enim vlla requirebatur conſtans addenda, quandoquidem euaneſcente s, tota ſimul quantitas euaneſcit: Haec poſtrema formula integram exprimit potentiam a frictione virgae oriundam, longitudinalem, quae partem virgae DN vel *dn* retrahit, atque ſi ponatur $s = DB = A$ obtinebitur haec potentia pro integra longitudine DB vel *db*, quae proin erit $= \frac{f \alpha A}{\beta l}$ log. $\frac{1}{\sqrt{(1 + \frac{\beta \beta}{\alpha \alpha})} - \frac{\beta}{\alpha}}$. Similiter potentia pro parte altera virgae DA vel *da*, habebitur, ſi ſimpliciter ponatur $l - A$ loco longitudinis A: tum ſi priori addatur, obtinebitur potentia longitudinalis frictioni debita, pro integra virga, quae ſic fit $\frac{f \alpha}{\beta}$ log. $\frac{1}{\sqrt{(1 + \frac{\beta \beta}{\alpha \alpha})} - \frac{\beta}{\alpha}}$. Hinc potentiae vel reſiſtentiae opponitur potentia CG, poſtquam potentia CE reſoluta fuit in CG in directum poſitam cum vecte BC et in CF perpendicularem; hinc ſi ponatur potentia incognita $CE = \pi$ et angulus $GCE = Q$, erit potentia $CG = \pi$ coſ. Q vnde denique deducitur aequatio

$$1.\ \pi \text{ coſin. } Q = \frac{f \alpha}{\beta} \log . \frac{1}{\sqrt{(1 + \frac{\beta \beta}{\alpha \alpha})} - \frac{\beta}{\alpha}} \text{ vel } = \frac{f \alpha}{\beta} \log . (\sqrt{(1 + \frac{\beta \beta}{\alpha \alpha})} + \frac{\beta}{\alpha})$$

Pars ſecunda ſolutionis; Ex iis quae modo dicta ſunt patet potentiolam a frictione elementi NN′ oriundam, perpendiculariter ad virgam ſumtam eſſe $= \frac{NO}{Nn} \cdot \frac{f\,ds}{l} = \frac{\beta s}{A\sqrt{(\alpha\alpha + \frac{ss}{AA}\beta\beta)}} \cdot \frac{f\,ds}{l}$, quae multiplicata per DN ſiue per s dat momentum potentiolae pro puncto rotationis D: Erit adeoque momentum iſtud $= \frac{f\beta ssds}{lA\sqrt{(\alpha\alpha + \frac{ss\beta\beta}{AA})}}$ ſiue $= \frac{f\beta ssds}{lA\alpha\sqrt{(1 + \frac{\beta\beta ss}{\alpha\alpha AA})}}$, cuius integratio paſſim apud authores reperitur: eſt nempe

$$\int \frac{f\beta ssds}{lA\alpha\sqrt{(1+\frac{\beta\beta ss}{\alpha\alpha AA})}} = \frac{fA\alpha s}{2\beta l}\sqrt{(1+\frac{\beta\beta ss}{\alpha\alpha AA})} + \frac{\alpha\alpha AAf}{2\beta\beta l}\log.(\sqrt{(1+\frac{\beta\beta ss}{\alpha\alpha AA})} - \frac{\beta s}{\alpha A})$$

fiat nunc $s = A$, vt ſic habeatur ſumma momentorum pro integra DB, atque habebitur $\frac{f\alpha AA}{2\beta l}\sqrt{(1 + \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha})} + \frac{f\alpha\alpha AA}{2\beta\beta l}\log.(\sqrt{(1 + \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha})} - \frac{\beta}{\alpha})$; huic frictionum momento addatur momentum pro altera parte DA, rurſus affirmatiue ſumendum, quod reperitur, ſi in praecedente formula loco quantitatis A ſumatur quantitas $l - A$: ſic erit momentum integrum pro ambabus partibus $= (ll - 2lA + AA)(\frac{f}{2l}\sqrt{(\frac{\alpha\alpha+\beta\beta}{\beta\beta})} + \frac{f\alpha\alpha}{2l\beta\beta}\log.(\sqrt{(\frac{\alpha\alpha+\beta\beta}{\alpha\alpha})} - \frac{\beta}{\alpha})$; Poſtremum iſtud momentum erit aequale momento Potentiae CF in vectem CD ſiue aequale producto ex π ſin. Q et $a + A$; inde obtinetur altera aequatio $ll - 2Al + 2AA)(\frac{f}{2l}\sqrt{(\frac{\alpha\alpha+\beta\beta}{\beta\beta})} + \frac{f\alpha\alpha}{2.\beta\beta}\log.(\sqrt{(\frac{\alpha\alpha+\beta\beta}{\alpha\alpha})} - \frac{\beta}{\alpha})) = (a+A)$ π ſin. Q ſiue.

II.

$$\text{II. } \pi \sin Q = \frac{ll - 2Al + 2AA}{a + A}\left(\frac{f}{2l}\sqrt{\frac{(\alpha\alpha + \beta\beta)}{\beta\beta}} + \frac{f\alpha\alpha}{2l\beta\beta}\log.\left(\sqrt{\frac{(\alpha\alpha + \beta\beta)}{\alpha\alpha}} - \frac{\beta}{\alpha}\right)\right).$$

§. 15. Diuidatur nunc aequatio ſecunda praecedentis paragraphi per aequationem pimam, et habebitur Tang. Q

$$= \frac{ll - 2Al + 2AA}{2l(a + A)}\left(\sqrt{\frac{(\alpha\alpha + \beta\beta)}{\beta\beta}} + \frac{\alpha\alpha}{\beta\beta}\log.\left(\sqrt{\frac{(\alpha\alpha + \beta\beta)}{\alpha\alpha}} - \frac{\beta}{\alpha}\right)\right) : \frac{\alpha}{\beta}\log.\left(\sqrt{\frac{(\alpha\alpha + \beta\beta)}{\alpha\alpha}} + \frac{\beta}{\alpha}\right)$$

Docet haec aequatio relationem inter directionem potentiae CE et directionem viae Bb quam extremitas virgae deſcribit; apparet autem quanto compendioſius ſit priorem definire ex poſteriori quam viciſſim poſteriorem ex priori; prius ſolo tabularum vſu conficitur, alterum taedioſam approximationum methodum poſtulat

Determinato angulo Q, dabit aequatio prima potentiam CG, aequatio ſecunda potentiam CF, indeque cognoſcitur potentia abſoluta CE. Necdum problema noſtrum confectum erit, niſi punctum conuerſionis D probe fuerit determinatum; Id equidem fecimus in fine § 10^{mi}, vbi demonſtrauimus eſſe BD ſiue nunc $A = -a + \sqrt{\frac{ll + 2al + 2aa)}{2}}$. An vero idem valor ad noſtrum praeſentem caſum applicari poterit? Id nondum liquet; etenim longe aliter frictiones in elementa virgae hic diſtribuuntur, quam antea in § 10mo, vbi ſingula elementa aequalem frictionem patiebantur. Hoc dubium ſoluemus, ſi conſideremus potentiam CG plane nihil conferre ad rotationem

virgae, alteram vero CF totam vnice in illam impendi; Eſt vero potentia CF $= \pi$ ſin. Q, atque punctum conuerſionis D ſua ſponte ſe ita locabit, vt potentia haec in rotationem requiſita minima fiat erit itaque valor quantitatis π ſin. Q. in fine praec: §. expoſitus inter omnes minimus, qui diuerſis longitudinibus BD reſpondeant. Licebit autem directionem Bb, ab qua ratio inter α et $\mathfrak{E}$ vnice pendet, pro data accipere, quaecunque fuerit poſitio puncti D; hoc modo quantitas $\frac{\alpha}{\mathfrak{E}}$ pro conſtanti erit accipienda, dum quantitates A, π et Q ſimul variantur, et quia π ſin. Q minima eſſe debet, erit quoque quantitas $\frac{ll - 2Al + 2AA}{a + A}$ minima aſſumenda vnde $A = -a + \sqrt{\frac{ll + 2al + 2aa}{2}}$, quem valorem pro diſtantia BD etiam ſupra § 10ma innenimus. Caeterum vbique logarithmi hyperbolici erunt accipiendi.

§. 16. Fuerit $Lb = \alpha = 4$; $LB = \mathfrak{E} = 3$; $BC = a = 0$; fiet angulus CBb fere 37°. dum angulus GCE tantillo maior inuenitur 11°; ergo paruula obliquitas potentiae notabilem in motu puncti B obliquitatem producit; ipſa vero potentia CE ſeu π ab iſta obliquitate non multum admodum decreſcit, eſt enim paulul um maior quam $\frac{54}{100}f$; Prouidebam equidem haud difficulter aliquid emolumenti hac in re ab obliquitate potentiae, ſi modo in dextram modo in ſiniſtram partem detorqueretur, ſperari poſſe, atque vt verum fatear, potiſſima haec fuit ratio,

ratio, quae me ad iſtas diſquiſitiones ſuſcipiendas impulit; nunc autem video, exiguam eſſe potentiae motricis diminutionem, nec ad iſtiusmodi obliquitatem recurrendum eſſe, niſi cum paruuli requiruntur motus, et vires vix ſufficiunt ad reſiſtentiam directe ſuperandam: saepe autem obſeruaui equos aliquo inſtinctu, ad momentum temporis opportunum, ſibimet hoc modo auxiliari, cum longis alligati trabibus viam offenderent difficiliorem.

SECTIO SECVNDA DE PRINCIPIIS MOTVS FLVIDORVM.

Auctore

L. EVLERO.

CAPVT I.
CONSIDERATIO MOTVS FLVIDORVM IN GENERE.

Problema 17.

1.

Si maſſa fluida in motu quocunque verſetur, elementa exponere, ex quibus eius ſtatum et motum ad quoduis tempus commodiſſime cognoſcere et ad calculum reuocare liceat.

Solutio.

Tab. V. Fig. 22. Referantur ſingula fluidi elementa ad ternos axes fixos inter ſe normales O A, O B et O C, ita

vt cuiusque elementi in Z ſiti locus per ternas coordinatas illis axibus parallelas determinetur, quae ſint $OX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$: et cum fluidum in motu ſit conſtitutum, id elementum conſideremus, quod nunc, poſtquam datum tempus $= t$ a certa epocha effluxerit, in puncto Z verſetur, quandoquidem labente tempore alia atque alia fluidi elementa per idem punctum Z tranſeunt. Iam ad ſtatum fluidi praeſentem cognoſcendum, ſi eius denſitas variationis ſit capax, primo denſitas fluidi in puncto Z eſt definienda, quam littera q deſignemus, quae cum non ſolum pro diuerſo ſitu puncti Z, ſed etiam pro diuerſo tempore, diuerſa eſſe poſſit, hanc quantitatem q tanquam functionem quatuor variabilium x, y, z et t ſpectari oportet, in qua ſi pro t tempus propoſitum ſcribatur, loco x, y et z vero eae tres coordinatae OX, XY, YZ, quae puncto Z conueniunt, ipſa denſitas fluidi in Z ad tempus propoſitum obtinetur. Sin autem denſitas fluidi vbique et perpetuo ſit eadem, littera q denotabit quantitatem conſtantem.

Secundo loco etiam preſſionem in loco Z cognitam eſſe oportet, quae exprimatur altitudine $= p$, quae ſcilicet tribui debet columnae ex materia homogenea, cuius denſitas $= 1$. conſtanti, vt eius pondus preſſioni aequali baſi innitenti fiat aequale, ac pro ratione huius denſitatis vnitate expreſſae perpetuo illa denſitas q ſit menſuranda. Cum igitur

et

et haec altitudo pro varietate loci ac temporis diuerſa eſſe poſſit, etiam p vt functio quatuor variabilium x, y, z et t tractari debet.

Tertio ſi fluidum actioni virium veluti grauitatis aliarumque ſimilium, ſit ſubiectum, eas ſemper in ternas ſecundum directiones coordinatarum reſoluere licet. Sint ergo hae vires acceleratrices elementum in Z ſitum ſollicitantes, ſec. dir. $Zx = P$, ſec. dir. $Zy = Q$ et ſec. dir. $Zz = R$, poſita vi grauitatis naturalis $= 1$. Hae vires ſi ſint variabiles tantum ab loco puncti Z non vero a tempore t pendere ſolent.

Quarto pro motus cognitione imprimis neceſſe eſt motum cuiusque elementi ad quodvis tempus noſſe, qui motus conuenientiſſime ſecundum directiones trium axium reſoluitur. Sit ergo pro tempore $= t$ elementi in Z verſantis celeritas ſecundum directionem $Zx = u$, ſecundum directionem $Zy = v$ et ſecundum $Zz = w$, quae ergo ternae celeritates tanquam functiones quatuor variabilium x, y, z et t ſpectari debent. Vbi facile patet calculum ita inſtrui poſſe, vt tempus t in minutis ſecundis, celeritates autem u, v, w per ſpatia vno minuto ſecundo percurrenda exprimantur.

Coroll. 1.

2. Cognitio ergo perfecta ſtatus et motus fluidorum his quatuor capitibus, quae expoſuimus, continetur, denſitate ſcilicet preſſione, viribus ſollicitanti-

tantibus et ternis cuiusque elementi celeritatibus quae ſi ad quoduis tempus aſſignare valeamus, perfectam totius motus cognitionem habebimus.

Coroll. 2.

3. Vires quidem, quibus fluidum ſollicitatur ſemper vltro dantur, neque ipſae a motu pendent: ita etiamſi motus ſit incognitus vires P, Q, R quibus ſingula elementa incitantur, inter quantitates cognitas ſunt referendae, atque ex iis potiſſimum reliqua capita determinationem nanciſcuntur.

Coroll. 3.

4. Quando fluidum eſt homogeneum, eiusque denſitas nulli variationi obnoxia, etiam quantitas q erit data, ſin autem ſit ſiue heterogeneum, ſiue quaelibet particula denſitatem habeat variabilem, omnino neceſſarium eſt, vt durante motu pro quouis puncto Z particulae ibi verſantis denſitas inveſtigetur.

Coroll. 4.

5. Tota ergo theoria motus fluidorum huc redit, vt pro data fluidi natura et viribus ſollicitantibus, quantitates q, p, u, v, w definiantur, ac per quatuor variabiles x, y, z et t ita exprimantur vt earum valores tam pro quouis puncto Z quam quouis tempore t aſſignari queant.

Scholion I.

6. Cum hae quantitates q, p, u, v, w vt functiones harum quatuor variabilium x, y, z et t tractari debeant, cuiusque differentiale in genere ſumtum ita exprimetur:

$$dq = dx\left(\frac{dq}{dx}\right) + dy\left(\frac{dq}{dy}\right) + dz\left(\frac{dq}{dz}\right) + dt\left(\frac{dq}{dt}\right)$$

cuius formae tres partes priores incrementum denſitatis, quae nunc in Z ſtatuitur $= q$, exhibent, dum manente tempore t eodem ad aliud punctum ipſi Z proximum tranſimus, cuius locus his ternis coordinatis $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ determinatur, ſicque intelligitur quomodo tempore t conſtanti asſumto pro quouis inſtanti per totam fluidi maſſam in ſingulis punctis denſitas ſe ſit habitura, quod ſimili modo de preſſione et ternis celeritatibus ſingulorum elementorum eſt intelligendum, atque hoc quidem ex natura differentialium per ſe eſt manifeſtum. At ſi manentibus coordinatis x, y et z iisdem tempus t differentiali ſuo dt augetur, denſitas iam fiet $q + dt\left(\frac{dq}{dt}\right)$ quae autem neutiquam eius elementi fluidi, quod in Z haeſerat denſitatem tempuſculo dt variatam praebet, quemadmodum non ſatis attendenti videri poſſet, ſed ea formula potius alius elementi quod demum elapſo tempusculo dt per punctum Z tranſibit denſitatem declarabit. Quando autem eiusdem elementi fluidi quod in Z verſabatur et cuius denſitas erat $= q$ denſitatem tempusculo dt variatam definire velimus ante

omnia

omnia ad locum vbi hoc elementum poſt tempuſculum dt haerebit reſpicere debemus, qui ſi his coordinatis variatis $x + dx$, $y + dy$, $z + d$ indicetur, verum denſitatis incrementum erit

$$dx\left(\frac{dq}{dx}\right) + dy\left(\frac{dq}{dy}\right) + dz\left(\frac{dq}{dz}\right) + dt\left(\frac{dq}{dt}\right).$$

Haecque eadem cautio adhibenda eſt, ſi eiusdem fluidi elementi quod nunc in Z verſatur, elapſo tempuſculo dt ſiue preſſionem ſiue motum ternis celeritatibus u, v, w determinatum aſſignare debemus. Quae cautio eo magis eſt neceſſaria et omni cura inculcanda, quod ea ob attentionis defectum neglecta in grauiſſimos errores incidere poſſemus.

Scholion 2.

7. Ad motum porro fluidi cognoſcendum omnino neceſſe eſt eius elementorum motus noſſe, minimeque ſufficit, vti in corporibus ſolidis vſu venire ſolet, aliquot tantum punctorum motum inveſtigaſſe. In motu ſcilicet corporum ſolidorum rigidorum, ſtatim ac trium punctorum non in directum ſitorum motus innotuerit, inde ſimul omnium reliquorum punctorum totius corporis motus definitur, ac ſi corpus flexuris ſit praeditum plurium quidem punctorum motus ad totius corporis motum definiendum requiritur, eorum tamen numerus ſemper eſt finitus. In fluidis autem ſingula elementa motu peculiari ferri poſſunt, ita vt etiamſi mille particularum motum exploratum haberemus,

totus tamen motus iis nondum ſit determinatus. Neque tamen omnium elementorum motus ideo neutiquam a ſe mutuo pendere ſunt cenſendi, quodſi enim denſitas fluidi nullam mutationem patiatur, euidens eſt ſingulas particulas non ita temere profluere poſſe, vt vel in maius ſpatium diſpergantur, vel in minus compellantur, vnde certa quaedam conditio inter ſingularum particularum motus ſtabilitur. At etiamſi fluidum condenſationis et rarefactionis ſit capax, tamen talis mutatio non ſine reſpectu ad preſſionem habito euenire nequit, ex quo ob preſſionem omnes omnium particularum motus certa quadam lege limitantur. Haec autem ipſa limitatio in theoria motus fluidorum praecipuum caput conſtituit quod eo reduci facile perſpicitur, vt motu omnium elementorum, vt cognito ſpectato, variatio cum denſitatis tum motus cuiusque puncti inveſtigetur.

Scholion 3.

8. Quatuor illa capita quibus perfectam notitiam motus fluidorum contineri diximus, fortaſſe huic ſcopo nondum ſufficere videbuntur, quoniam plerumque ad plures alias circumſtantias attendi neceſſe eſt, veluti ſi fluidum vaſi ſit incluſum, per quod vel transfluat, vel ex quo effluat ad quoduis tempus quoque noſſe oportet, quousque fluidum in vaſe porrigatur, ſimulque vaſis figuram probe perſpectam eſſe oportet: tum ſi qua in parte fluidum

fluidum ſit apertum, vbi ſcilicét preſſio fuerit nulla, etiam haec circumſtantia ad motum vlteriorem determinandum omnino neceſſaria videtur. Verum hic in genere tantum eſt tenendum, quatuor expoſita capita omnino ſufficere ad motum aequationibus differentialibus includendum, in quo principiorum motus vis potiſſimum conſiſtit. His autem aequationibus inuentis, quando eas integrari oportet, tum demum omnes illae circumſtantiae in computum ingrediuntur, atque analyſis ſemper ita ad omnes caſus accommodata deprehendetur, vt omnibus illis conditionibus, quascunque circumſtantiae, praeſcribunt, ſemper perfecte ſatisfieri poſſit.

Problema 18.

9. Datis celeritatibus, u, v et w quibus ſingula fluidi elementa mouentur, inueſtigare translationem cuiuscunque moleculae fluidi tempusculo infinite paruo, dt factam.

Solutio.

Moleculae, cuius translationem quaerimus, tribuamus figuram pyramidis triangularis Z L M N, pro cuius quatuor angulis ſint ternae coordinatae.

Pro Z, $OX = x$, $XY = y$, $YZ = z$

Pro L, $OR = x + dx$, $RP = y$, $PL = z$

Pro M, $OX = x$, $XQ = y + dy$, $QM = z$

Pro N, $OX = x$, $XY = y$, $YN = z + dz$.

 Cum

Cum nunc pro puncto Z ſint celeritates ſecundum directiones ternis axibus parallelas u, v, w, functiones quatuor variabilium x, y, z et t hinc pro ſingulis angulis hae celeritates ita ſe habebunt

celeritas celeritas celeritas

Pro Z ſecundum $OA = u$, ſec. $OB = v$, ſec. $OC = w$

Pro L ſec. $OA = u + dx\left(\frac{du}{dx}\right)$, ſec. $OB = v + dx\left(\frac{dv}{dx}\right)$

ſec. $OC = w + dx\left(\frac{dw}{dx}\right)$

Pro M ſec. $OA = u + dy\left(\frac{du}{dy}\right)$, ſec. $OB = v + dy\left(\frac{dv}{dy}\right)$

ſec. $OC = w + dy\left(\frac{dw}{dy}\right)$

Pro N ſec. $OA = u + dz\left(\frac{du}{dz}\right)$, ſec. $OB = v + dz\left(\frac{dv}{dz}\right)$

ſec. $OC = w + dz\left(\frac{dw}{dz}\right)$.

His ergo celeritatibus tempuſculo dt haec quatuor puncta Z, L, M, N transferentur in z, l, m, n quae ſequentibus ternis coordinatis determinabuntur:

$Ox = x + udt$ $\qquad xy = y + vdt$

$yz = z + wdt$

$Or = x + dx + udt + dtdx\left(\frac{du}{dx}\right)$, $\qquad rp = y + vdt + dtdx\left(\frac{dv}{dx}\right)$

$pl = z + wdt + dtdx\left(\frac{dw}{dx}\right)$

$Os = x + udt + dtdy\left(\frac{du}{dy}\right)$, $\qquad sq = y + dy + vdt + dtdy\left(\frac{dv}{dy}\right)$

$qm = z + wdt + dtdy\left(\frac{dw}{dy}\right)$

$Ot = x + udt + dtdz\left(\frac{du}{dz}\right)$, $\qquad to = y + vdt + dtdz\left(\frac{dv}{dz}\right)$

$on = z + dz + wdt + dtdz\left(\frac{dw}{dz}\right)$.

Fluidi

Fluidi ergo materia in pyramide Z L M N contenta ita moueatur vt elapſo tempuſculo dt pyramidem $zlmn$ occupet et impleat. Quoniam enim pyramis Z L M N eſt infinite parua vtcunque motus fuerit irregularis, omnia puncta in ſingulis hedris pyramidis Z L M N contenta ita moueri neceſſe eſt, vt perpetuo ſecundum hedras planas maneant diſpoſita, ſicque hedra Z L M in zlm peruenire eſt cenſenda, ſimilique modo de reliquis.

Coroll. 1.

10. Etiamſi ergo forte figura moleculae pyramidis Z L M N mutatur, tamen figuram pyramidis triangularis retinet, vnde cum quaelibet molecula in huiusmodi pyramides reſolui queat, eius quoque figura, quae ipſi ob motum inducitur, hinc colligi poterit.

Coroll. 2.

11. Cum latera pyramidis Z L M N principalia ſint $ZL = dx$, $ZM = dy$ et $ZN = dz$ quae inter ſe ſunt normalia, reliqua erunt $LM = \surd(dx^2 + dy^2)$, $LN = \surd(dx^2 + dz^2)$ et $MN = \surd(dy^2 + dz^2)$ atque ſoliditas iſtius pyramidis erit $= \frac{1}{6} dx\,dy\,dz$, cum baſis Z L M area ſit $= \frac{1}{2} dx\,dy$ et altitudo $ZN = dz$.

Scholion 1.

12. Nunc ergo quoque ſingula latera pyramitis translatae $zlmn$ definire poterimus. Primo enim ob

Or–

$Or - Ox = dx + dtdx(\frac{du}{dx})$, $rp - xy = dtdx(\frac{dv}{dx})$, $pl - yz = dt\,dx(\frac{dw}{dt})$
erit $zl = \sqrt{(dx^2 + 2\,dt\,dx^2(\frac{du}{dx}))} = dx + dt\,dx(\frac{du}{dx})$, quia particulas poſt ſignum radicale, vbi differentialia ad quatuor dimenſiones aſſurgunt, reiicere licet, ſimili modo erit

$$zm = dy + dt\,dy(\frac{dv}{dy}) \text{ et } zn = dz + dt\,dz(\frac{dw}{dz})$$

deinde pro latere lm ob

$$Or - Os = dx + dt\,dx(\frac{du}{dx}) - dt\,dy(\frac{du}{dy})$$

$$sq - rp = dy - dt\,dx(\frac{dv}{dx}) + dt\,dy(\frac{dv}{dy})$$

$$qm - pl = -dt\,dx(\frac{dw}{dx}) + dt\,dy(\frac{dw}{dy})$$

fiet $lm = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + 2\,dt\,dx^2(\frac{du}{dx}) - 2dtdxdy(\frac{du}{dy}) - 2dtdxdy(\frac{dv}{dx}) + 2\,dt\,dy^2(\frac{dv}{dy}))}$

ſeu $lm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} + \frac{dtdx^2(\frac{du}{dx}) - dtdxdy(\frac{du}{dy}) - dtdxdy(\frac{dv}{dx}) + dtdy^2(\frac{dv}{dy})}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$

Hinc autem commodius angulus lzm definitur, cum enim ſit coſ. $lzm = \frac{zl^2 + zm^2 - lm^2}{2zl.zm}$ reperitur

$$\text{coſ.}\,lzm = \frac{2\,dtdxdy((\frac{du}{dy}) + (\frac{dv}{dx}))}{2\,dxdy} = dt(\frac{du}{dy}) + dt(\frac{dv}{dx})$$

qui ergo angulus infinite parum a recto diſcrepat, ſimili autem modo inuenitur

coſ. $lzn = dt(\frac{du}{dz}) + dt(\frac{dw}{dx})$ et coſ. $mzn = dt(\frac{dv}{dz}) + dt(\frac{dw}{dy})$

vnde patet ſinus horum angulorum tam prope ad ſinum totum accedere, vt defectus formulis differentialibus ſecundi gradus exprimatur. Scho-

Scholion 2.

13. Si quaeſtio eſſet de motu corporum ſolidorum, quorum elementa ita ſunt comparata, vt neque in quantitate ſua neque in figura vllam mutationem admittant, pyramis $zlmn$ omnino ſimilis et aequalis eſſe deberet pyramidi $ZLMN$, vnde laterum principalium aequalitas has ſuppeditaret aequationes

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = 0;\ \left(\frac{dv}{dy}\right) = 0;\ \left(\frac{dw}{dz}\right) = 0$$

reliquorum vero laterum aequalitas has

$$\left(\frac{du}{dy}\right)+\left(\frac{dv}{dx}\right)=0;\ \left(\frac{du}{dz}\right)+\left(\frac{dw}{dx}\right)=0;\ \left(\frac{dv}{dz}\right)+\left(\frac{dw}{dy}\right)=0$$

Quocirca pro corporibus ſolidis hae tres celeritates u, v, w cuiusque puncti neceſſario tales functiones quatuor variabilium x, y, z et t eſſe debent, vt ſex iſtae conditiones locum habeant. Ex ternis prioribus quidem ſequitur, celeritatem u ab x pendere non poſſe, neque v ab y, neque w a z. Deinde cum ſit $\left(\frac{du}{dy}\right) = -\left(\frac{dv}{dx}\right)$ hinc ſequitur formulam $udx - vdy$ integrabilem eſſe debere, ſiquidem ſolae x et y vt variabiles ſpectentur, tum vero eodem modo has formulas differentiales $udx - wdz$ et $vdy - wdz$ integrabiles eſſe oportebit, ex quibus conditionibus motus corporum ſolidorum eodem modo determinari reperitur, quo is ex aliis principiis determinari ſolet. Ex hoc autem caſu intelligitur etiam pro fluidis has ternas celeritates certis conditionibus cir-

cumſcribi debere, ſi enim fluidum ſit eius indolis, vt eius denſitas nullam mutationem admittat, tum omnino neceſſe eſt, vt pyramidis $zlmn$ volumen aequale ſit volumini pyramidis ZLMN, ac ſi denſitas variationem patiatur, ex ipſa hac variatione volumen pyramidis $zlmn$ determinatur, viciſſim autem ex hoc volumine variatio denſitatis colligi poterit, vnde ſequens problema naſcitur.

Problema 19.

14. Datis ternis celeritatibus u, v, w quibus ſingula fluidi elementa mouentur, inueſtigare variationem denſitatis, quam ſingula elementa dum tempuſculo infinite paruo dt proferuntur, accipiunt.

Solutio.

Tab. V. Fig. 23. Conſideretur vt ante fluidi elementum ZLMN cuius figura ſit pyramidalis, et denſitas in hoc ſtatu $= q$: cum igitur volumen huius pyramidis, poſitis ternis coordinatis $OX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$ ſit $= \frac{1}{6} dxdydz$, maſſa huius elementi erit $= \frac{1}{6} qdxdydz$ quae etiam in motu eadem perpetuo manet, quomodocunque interea volumen ſiue augeatur ſiue minuatur. Ob motum autem, quem huic elemento tribuimus, id tempuſculo dt promouetur in $zlmn$, cuius figura itidem pyramidalis, vidimusque eius latera principalia eſſe.

$$zl = dx + dt\,dx\left(\frac{du}{dx}\right);\; zm = dy + dt\,dy\left(\frac{dv}{dy}\right);\; zn = dz + dt\,dz\left(\frac{dw}{dz}\right)$$

angu-

angulos autem ad z ita eſſe comparatos, vt ſit

$$\text{coſ. } lzm = dt\left(\frac{du}{dy}\right) + dt\left(\frac{dv}{dx}\right), \text{ coſ. } lzn = dt\left(\frac{du}{dz}\right) + dt\left(\frac{dw}{dx}\right),$$
$$\text{coſ. } mzn = dt\left(\frac{dv}{dz}\right) + dt\left(\frac{dw}{dy}\right)$$

vnde volumen huius pyramidis definiri oportet. Quod ſi autem breuitatis gratia ponamus

$$\text{coſ. } lzm = \nu, \text{ coſ. } lzn = \mu, \text{ et coſ. } mzn = \lambda$$

ex geometria volumen iſtius pyramidis ita reperitur expreſſum

$$= \tfrac{1}{6} zl.\, zm.\, zn \sqrt{(1 - \lambda\lambda - \mu\mu - \nu\nu + 2\lambda\mu\nu)}$$

Quoniam vero λ, μ, ν ſunt differentialia primi ordinis eorum quadrata ad ordinem ſecundum aſcendunt, vnde ſine errore hoc volumen ſtatuitur $= \frac{1}{6} zl.zm.zn$ ſicque erit $= \frac{1}{6} dx\, dy\, dz \left(1 + dt\, \frac{du}{dx}\right)\left(1 + dt\left(\frac{dv}{dy}\right)\right)\left(1 + dt\left(\frac{dw}{dz}\right)\right)$ et facta euolutione reiectisque differentialibus altioribus prodit pyramidis $zlmn$ volumen $= \frac{1}{6} dx\, dy\, dz\left(1 + dt\left(\frac{du}{dx}\right) + dt\left(\frac{dv}{dy}\right) + dt\left(\frac{dw}{dz}\right)\right)$ ſtatuatur iam denſitas iſtius pyramidis $= q'$, quae cum per volumen eius multiplicata maſſam pyramidis ZLMN producere debeat, habebimus hanc aequationem per $\frac{1}{6} dx\, dy\, dz$ vtrinque diuidendo:

$$q = q' + q'dt\left(\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dw}{dz}\right)\right)$$

Incrementum ergo denſitatis $q' - q$ ita exprimitur, vt ſit

$$\frac{q'-q}{q'dt} = \frac{q'-q}{q\,dt} = -\left(\frac{du}{dx}\right) - \left(\frac{dv}{dy}\right) - \left(\frac{dw}{dz}\right).$$

 Coroll.

Coroll. 1.

15. Si ergo ſingula fluidi elementa nullam mutationem in denſitate ſua durante motu patiuntur, ternae celeritates u, v et w eiusmodi debent eſſe functiones ipſarum x, y, z et t, vt ſit $(\frac{du}{dx}) + (\frac{dv}{dy}) + (\frac{dw}{dz}) = 0$.

Coroll. 2.

16. Viciſſim igitur etiam quoties fuerit $(\frac{du}{dx}) + (\frac{dv}{dy}) + (\frac{dw}{dz}) = 0$ per motum ſingulorum elementorum fluidi denſitas non mutatur. Hoc ergo inter alios innumeros caſus euenit, ſi neque u ab x, neque v ab y neque w a z pendeat.

Coroll. 3.

17. Quoties autem in motu denſitas particularum fluidi mutatur, eius variatio ex valore formulae $(\frac{du}{dx}) + (\frac{dv}{dy}) + (\frac{dw}{dz})$ cognoſcitur, qui vbi fuerit poſitiuus, denſitas decreſcit, vbi autem negatiuus ibi denſitas augetur.

Scholion.

18. Methodus hic adhibita volumen pyramidis $zlmn$ inueſtigandi, multo eſt concinnior ac facilior ea, qua olim ſum vſus in Vol. XI. Mem. Acad. Reg. Boruſſ: vbi per multas demum ambages eandem formulam pro iſto volumine elicui, dum eius inuentionem ad priſmata triangularia reduxi.

reduxi. Compendium autem calculi hic inde eſt ortum, quod tres anguli lzm, lzn, mzn infinite parum ab angulo recto diſcrepent ac diſcrimen adeo per quadrata differentialium exprimatur quod niſi commode vſu veniſſet altera methodus anteferenda fuiſſet Cum ſcilicet pyramis $zlmn$ aequetur ſummae horum trium prismatum $ypozln + yqozmn + poqlmn$ demto quarto $ypqzlm$, erit ea

$$= \tfrac{1}{3}\Delta ypo(yz+pl+on) + \tfrac{1}{3}\Delta yqo(yz+qm+on) + \tfrac{1}{3}\Delta poq(pl+qm+on)$$
$$- \tfrac{1}{3}\Delta ypq(yz+pl+qm)$$

quae reducitur ad hanc formam

$$\tfrac{1}{3}(\Delta ypo + \Delta yqo + \Delta poq)(yz+pl+qm+on)$$
$$- \tfrac{1}{3}\Delta ypo.\, qm - \tfrac{1}{3}\Delta yqo.\, pl - \tfrac{1}{3}\Delta poq.\, yz$$
$$- \tfrac{1}{3}\Delta ypq(yz+pl+qm+on) + \tfrac{1}{3}\Delta ypq.\, on$$

vnde ob $\Delta ypq = \Delta ypo + \Delta yqo + \Delta poq$ fit pyramis $zlmn = \tfrac{1}{3}on.\, \Delta ypq - \tfrac{1}{3}qm.\, \Delta ypo - \tfrac{1}{3}pl.\, \Delta yqo - \tfrac{1}{3}yz.\, \Delta poq.$

Iam haec triangula porro ita repraeſentantur:

$$\Delta ypq = \tfrac{1}{2}xs(xy+sq) + \tfrac{1}{2}sr(rp+sq) - \tfrac{1}{2}xr(xy+rp)$$
$$= \tfrac{1}{2}(xs+rs)(xy+rp+sq) - \tfrac{1}{2}xs.\, rp - \tfrac{1}{2}sr.\, xy - \tfrac{1}{2}xr(xy+rp+sq) + \tfrac{1}{2}xr.\, sq$$

ideoque $\Delta ypq = \tfrac{1}{2}xr.\, sq - \tfrac{1}{2}xs.\, rp - \tfrac{1}{2}sr.\, xy$ et ſimili modo

$$\Delta ypo = \tfrac{1}{2}xr.\, to - \tfrac{1}{2}xt.\, rp - \tfrac{1}{2}tr.\, xy$$
$$\Delta yqo = \tfrac{1}{2}xt.\, sq - \tfrac{1}{2}xs.\, to - \tfrac{1}{2}st.\, xy$$
$$\Delta poq = \tfrac{1}{2}rt.\, sq - \tfrac{1}{2}st.\, rp - \tfrac{1}{2}sr.\, to$$

ex quibus tandem colligitur

$$\begin{aligned}6zlmn = & \; on.xr.sq - on.xs.rp - on.sr.xy \\ & - qm.xr.to + qm.xt.rp + qm.tr.xy \\ & - pl.xt.sq + pl.xs.to + pl.st.xy \\ & - yz.rt.sq + yz.st.rp + yz.sr.to.\end{aligned}$$

Quoniam nunc omnes hae lineae ſupra ſunt definitae, hinc volumen iſtius pyramidis rationaliter exprimetur, facta autem ſubſtitutione haec forma in expreſſionem ſuccinctam modo inuentam contrahitur.

Problema 20.

18. Datis ternis celeritatibus u, v et w quibus ſingula fluidi elementa mouentur, inueſtigare accelerationem quam quoduis elementum tempuſculo infinite paruo dt capit.

Solutio.

Tab. V. Fig. 24. Concipiamus fluidi elementum iam tranſiens per punctum Z coordinatis $OX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$ determinatum, quod celeritatibus u, v et w latum elapſo tempore dt in punctum z perueniat. Hoc ergo punctum iſtis tribus coordinatis $Ox = x + udt$, $xy = y + vdt$, et $yz = z + wdt$ determinabitur. His poſitis quaeritur, quantum ternae celeritates, quas iam elementum in z habebit, et quae ſint u', v', w' ſint ſuperaturae, illas ternas celeritates u, v, w quas in Z habuerat? quandoquidem ex his incrementis acceleratio eſt aeſtimanda.

da. Cum iam u, v et w ſint functiones quatuor variabilium x, y, z et t celeritates quaeſitae in z elapſo tempuſculo dt hinc colligentur, ſi variabiles x, y, z et t his incrementis udt, vdt, wdt et dt augeantur: quamobrem colligemus

$$u' = u + udt\left(\frac{du}{dx}\right) + vdt\left(\frac{du}{dy}\right) + wdt\left(\frac{du}{dz}\right) + dt\left(\frac{du}{dt}\right)$$
$$v' = v + udt\left(\frac{dv}{dx}\right) + vdt\left(\frac{dv}{dy}\right) + wdt\left(\frac{dv}{dz}\right) + dt\left(\frac{dv}{dt}\right)$$
$$w' = w + udt\left(\frac{dw}{dx}\right) + vdt\left(\frac{dw}{dy}\right) + wdt\left(\frac{dw}{dz}\right) + dt\left(\frac{dw}{dt}\right).$$

Quia igitur in motus inueſtigatione celeritatis incrementum per tempuſculum diuiſum dat accelerationem, ternae accelerationes quaeſitae ita ſe habebunt:

$$\frac{u'-u}{dt} = u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right)$$
$$\frac{v'-v}{dt} = u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dv}{dz}\right) + \left(\frac{dv}{dt}\right)$$
$$\frac{w'-w}{dt} = u\left(\frac{dw}{dx}\right) + v\left(\frac{dw}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right) + \left(\frac{dw}{dt}\right).$$

Coroll. 1.

20. Eaedem ergo accelerationes reſultare debent ex viribus, quibus idem fluidi elementum ſollicitatur, vbi quidem opus eſt, vt vires ſollicitantes ſecundum easdem ternas directiones reſoluantur.

Coroll. 2.

21. Singularum ergo celeritatum incrementa etiam a binis reliquis celeritatibus pendent; neque hic

hic vulgari regula in mechanicis vſitata vti licet, qua celeritatis u acceleratio per $\frac{du}{dt}$ exprimi ſolet.

Scholion.

22. Ratio quod hic ab iſta regula vulgari recedere cogimur, ex praecedentibus, vbi ſignificationem celeritatum u, v, w expoſuimus ſatis eſt perſpicua. Hae enim celeritates non ita ſunt comparatae, vt perpetuo ad idem fluidi elementum referantur, quemadmodum in motu ſolidorum fieri ſolet, ſed eae hic potius ad idem ſpatii punctum referuntur, ita vt manentibus coordinatis x, y, z, ſi ſolum tempus t variabile ſtatuatur eae ſint praebiturae motum eius elementi, quod elapſo tempusculo dt per punctum Z tranſit. Quare cum hic accelerationes eiusdem elementi, quod nunc in Z, poſt tempusculum dt vero in z reperitur, deſiderentur functiones illas u, v, et w, non ſolum per tempusculum dt, ſed etiam a puncto Z in punctum z transferri debent, quarum tum exceſſus ſuper illas incrementa celeritatum eiusdem elementi fluidi indicabit. In errorem ergo inſignem fuiſſemus prolapſi, ſi regula illa vulgari decepti has accelerationes ſimpliciter formulis $(\frac{du}{dt})$, $(\frac{dv}{dt})$, $(\frac{dw}{dt})$ expreſſiſſemus, quae vt nunc videmus tantum partem aliquam verarum accelerationum conſtituunt.

Problema 21.

23. Si praeter ternas celeritates u, v, w quae ſingulis ſpatii punctis, per quod fluidum mouetur,

conue-

conueniunt, etiam denſitas q in quolibet puncto datur, relationem quae inter celeritates et denſitatem intercedit, inueſtigare.

Solutio.

In probl. 19. inuenimus, ſi fluidi particula his celeritatibus u, v, w ex Z in z tempuſculo dt proferatur, eiusque denſitas in Z ponatur $= q$, in z vero $= q'$ tum fore

$$\frac{q'-q}{q\,dt} = -\left(\frac{du}{dx}\right) - \left(\frac{dv}{dy}\right) - \left(\frac{dw}{dz}\right).$$

Nunc autem quia denſitas q vt functio data quatuor variabilium x, y, z et t ſpectatur, et nunc quidem particulae in puncto Z verſantis denſitatem denotat, ex ea colligetur denſitas q' ſi elapſo tempuſculo dt in punctum z transferatur, ſicque quatuor variabilibus x, y, z et t haec incrementa $u\,dt$, $v\,dt$, $w\,dt$ et dt tribui oportet. Quocirca haec denſitas q' eidem particulae ex Z in z translatae conueniens ita exprimetur:

$$q' = q + u\,dt\left(\frac{dq}{dx}\right) + v\,dt\left(\frac{dq}{dy}\right) + w\,dt\left(\frac{dq}{dz}\right) + dt\left(\frac{dq}{dt}\right)$$

vnde fit

$$\frac{q'-q}{dt} = u\left(\frac{dq}{dx}\right) + v\left(\frac{dq}{dy}\right) + w\left(\frac{dq}{dz}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right)$$

qui valor ſi in ſuperiori aequatione ſubſtituatur, relatio quaeſita inter celeritates et denſitatem hac aequatione continebitur

$$\left.\begin{matrix} q\left(\frac{du}{dx}\right) + q\left(\frac{dv}{dy}\right) + q\left(\frac{dw}{dz}\right) \\ + u\left(\frac{dq}{dx}\right) + v\left(\frac{dq}{dy}\right) + w\left(\frac{dq}{dz}\right) \end{matrix}\right\} + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0$$

 quae

quae cum ſit $q\left(\frac{du}{dx}\right)+u\left(\frac{dq}{dx}\right)=\left(\frac{d.qu}{dx}\right)$ in hanc contrahitur:

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)+\left(\frac{d.qu}{dx}\right)+\left(\frac{d.qv}{dy}\right)+\left(\frac{d.qw}{dz}\right)=0$$

hic ſcilicet in differentiatione ipſius qu ſola x, ipſius qv ſola y et ipſius qw ſola z vt variabilis tractari debet.

Coroll. 1.

23. Si ergo u, v et w fuerint functiones quatuor variabilium x, y, z et t datae, aequatio inventa indolem functionis q indicabit; quae autem quemadmodum inde definiri debeat, haud patet.

Coroll. 2.

24. Sin autem detur denſitas q cum duabus celeritatibus u et v, quantitas $\left(\frac{dq}{dt}\right)+\left(\frac{d.qu}{dx}\right)+\left(\frac{d.qv}{dy}\right)$ vtpote certa functio ipſarum x, y, z et t erit cognita, qua poſita $=Q$ erit $\left(\frac{d.qw}{dz}\right)+Q=0$. Spectetur ſola quantitas z variabilis, ac prodibit integrando $qw+\int Qdz=$ Conſt. ergo $w=\frac{Conſt.-\int Qdz}{q}$.

Scholion 1.

25. Cum reſolutio aequationis inuentae:

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)+\left(\frac{d.qu}{dx}\right)+\left(\frac{d.qv}{dy}\right)+\left(\frac{d.qw}{dz}\right)=0,$$

ſit maximi momenti, obſeruo primo ei ſatisfieri, ſi ſit

$q=\Gamma:$

$q = \Gamma : (x, y, z)$; $qu = \Delta : (t, y, z)$; $qv = \Sigma : (t, x, z)$;
$qw = \Pi : (t, x, y)$

tum enim ſingula membra ſeorſim euaneſcunt, quae eſt ſolutio iam latiſſime patens, cum quatuor habeantur functiones arbitrariae trium variabilium. Adhuc autem generalior ſolutio exhiberi poteſt ope functionis cuiuscunque omnium quatuor variabilium x, y, z et t; ſit enim T huiusmodi functio pro lubitu aſſumta, praebeatque differentiata:

$$dT = F\,dx + G\,dy + H\,dz + I\,dt$$

quoniam nunc nouimus ex natura differentialium eſſe:

$$\left(\frac{dF}{dt}\right) - \left(\frac{dI}{dx}\right) = 0;\quad \left(\frac{dG}{dt}\right) - \left(\frac{dI}{dy}\right) = 0;\quad \left(\frac{dH}{dt}\right) - \left(\frac{dI}{dz}\right) = 0$$

$$\left(\frac{dF}{dy}\right) - \left(\frac{dG}{dx}\right) = 0;\quad \left(\frac{dF}{dz}\right) - \left(\frac{dH}{dx}\right) = 0;\quad \left(\frac{dG}{dz}\right) - \left(\frac{dH}{dy}\right) = 0$$

introducendis ſex conſtantibus α, β, γ, δ, ε, ζ etiam ſequentes valores ſatisfacere deprehenduntur:

$$q = \alpha F + \beta G + \gamma H + \Gamma : (x, y, z)$$
$$qu = -\alpha I - \delta G - \varepsilon H + \Delta : (t, y, z)$$
$$qv = -\beta I + \delta F - \zeta H + \Sigma : (t, x, z)$$
$$qw = -\gamma I + \varepsilon F + \zeta G + \Pi : (t, x, y)$$

neque tamen aſſeuerare licet, hanc ſolutionem ita eſſe generalem, vt omnes caſus poſſibiles in ea contineantur.

 Scho-

Scholion 2.

26. Si fluidum ita ſit homogeneum, vt eius denſitas ſit ſemper et vbique eadem, relatio inter ternas celeritates u, v et w ita determinatur vt eſſe debeat:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dw}{dz}\right)=0$$

cui ſtatim ſatisfaciunt hi quoque valores:

$$u=\Delta:(t,y,z);\ v=\Sigma:(t,x,z);\ w=\Pi:(t,x,y).$$

Deinde vero etiam generalius introducta functione T vt ſit $dT=F\,dx+G\,dy+H\,dz+I\,dt$, erit

$$u=-\delta G-\varepsilon H+\Delta:(t,y,z)$$
$$v=+\delta F-\zeta H+\Sigma:(t,x,z)$$
$$w=+\varepsilon F+\zeta G+\Pi:(t,x,y)$$

in ſuperiori ſcilicet ſolutione ponendo $\alpha=0$, $\beta=0$ $\gamma=0$. Hic autem obſeruo non opus eſſe, vt quantitates δ, ε et ζ ſint conſtantes, ſed etiam variabiles ſumi poſſe, dum ſit $\left(\frac{d\delta}{dx}\right)-\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)=0$, $\left(\frac{d\delta}{dy}\right)+\left(\frac{d\varepsilon}{dz}\right)=0$ et $\left(\frac{d\varepsilon}{dx}\right)+\left(\frac{d\zeta}{dy}\right)=0$, hoc eſt dum haec formula $\zeta\,dx-\varepsilon\,dy+\delta\,dz$ ſit integrabilis. Hinc praeter functionem arbitrariam T adhuc aliam introducere licet, V vt ſit $dV=K\,dx+L\,dy+M\,dz+N\,dt$, atque ſatisfacient hi valores multo generaliores:

$$u=HL-GM+\Delta:(t,y,z)$$
$$v=FM-HK+\Sigma:(t,x,z)$$
$$w=GK-FL+\Pi:(t,x,y).$$

Scho-

Scholion 3.

27. Eodem modo etiam in genere pro denſitate variabili q ſolutionem magis vniuerſalem reddere licet, introducendis duabus functionibus arbitrariis T et V quatuor variabilium x, y, z et t. Poſitis enim earum differentialibus:

$$dT = F\,dx + G\,dy + H\,dz + I\,dt \text{ et}$$
$$dV = K\,dx + L\,dy + M\,dz + N\,dt$$

conditioni requiſitae ſequentes ſatisfacient valores:

$$q = (G+H)K + (H-F)L - (F+G)M + \Gamma:(x, y, z)$$
$$q\,u = (H+I)L + (I-G)M - (G+H)N + \Delta:(t, y, z)$$
$$q\,v = (I+F)M + (F-H)N - (H+I)K + \Sigma:(t, x, z)$$
$$qw = (F+G)N + (G-I)K - (I+F)L + \text{И}:(t, x, y).$$

Tum vero etiam duae pluresue huiusmodi formae inuicem coniungi poſſunt, at hoc modo ſolutio non generalior fieri eſt cenſenda; quia ſi alia functio pro T ſumta veluti T′ cum eadem V coniungatur, et valores inde oriundi ad hos reſpectiue addantur, eadem prodit ſolutio, ac ſi ſtatim pro T ſumta fuiſſet functio T+T′, quod idem de altera V eſt intelligendum, quoniam commutationem admittunt.

CAPVT II.

PRINCIPIA MOTVS FLVIDORVM A VIRIBVS QVIBVSCVNQVE SOLLICITATORVM.

Problema 22.

28. Si fluidum a viribus quibuscunque ſollicitetur, et preſſio in ſingulis punctis vt cognita ſpectetur, inueſtigare vires acceleratrices, quibus ſingula elementa ad motum impelluntur.

Solutio.

Tab. V. Fig. 25. Poſitis pro puncto Z coordinatis orthogonalibus $OX = x$, $XY = y$, $XZ = z$ elemento fluidi iam circa Z verſanti tribuatur figura parallelepipedi rectanguli ZLMN $zlmn$ differentialibus coordinatarum $ZL = dx$, $ZM = dy$ et $Zz = dz$ contenti cuius ergo volumen erit $= dxdydz$, ac ſi q denotet denſitatem in Z, eius maſſa fit $= qdxdydz$. Nunc primo conſideremus vires grauitati ſimiles in punctum Z agentes, quas cum ſemper ſecundum directiones axium OA, OB, OC reſoluere liceat, ſint iſtae vires acceleratrices ſec OA ſeu $ZL = P$, ſec. OB ſeu $ZM = Q$, ſec. OC ſeu $Zz = R$ a quibus ergo elemento fluidi accelerationes ſecundum easdem directiones inducentur, ad quod quidem non erat

erat neceſſe elemento certam figuram tribuiſſe. Verum haec figura maxime eſt idonea ad vires acceleratrices ex preſſionibus natas eliciendas. Sit igitur pro hoc tempore altitudo preſſioni in Z debita $= p$ quae vt functio quatuor variabilium x, y, z et t ſpectari debet: ex cuius indole preſſiones in ſingulis angulis parallelepipedi definiri poterunt vt ſequitur

In puncto	preſſio	In puncto	preſſio
Z	p	z	$p+dz(\frac{dp}{dz})$
L	$p+dx(\frac{dp}{dx})$	l	$p+dx(\frac{dp}{dx})+dz(\frac{dp}{dz})$
M	$p+dy(\frac{dp}{dy})$	m	$p+dy(\frac{dp}{dy})+dz(\frac{dp}{dz})$
N	$p+dx(\frac{dp}{dx})+dy(\frac{dp}{dy})$	n	$p+dx(\frac{dp}{dx})+dy(\frac{dp}{dy})+dz(\frac{dp}{dz})$

quae preſſiones in ſingulas hedras normaliter agunt. Conſideremus binas hedras oppoſitas Z M z m et L N l n atque manifeſtum eſt preſſiones, quas hedra L N l n in ſingulis punctis ſuſtinet, ſuperare preſſiones hedrae Z M z m in punctis oppoſitis eadem preſſione elementari $dx(\frac{dp}{dx})$, qui exceſſus ſolus in computum venit. Suſtinet ergo hedra L N l n preſſionem altitudini $dx(\frac{dp}{dx})$ debitam; vnde cum huius hedrae area ſit $= dydz$, tota preſſio aequatur ponderi voluminis $= dxdydz(\frac{dp}{dx})$, ſi ſcilicet materia homogenea, cuius denſitas $= 1$, repletum concipiatur: et huius vis directio, quia in hedram eſt normalis, erit parallela axi AO. Quare noſtrum parallelepipedum cuius maſſa $= qdxdydz$ vrgetur ſecundum directionem AO vi motrice $= dxdydz(\frac{dp}{dx})$,

quae

quae ergo per maſſam diuiſa praebet vim accelera- tricem $=\frac{1}{q}(\frac{dp}{dx})$, ſimili ratiocinio colligetur vis acceleratrix, qua noſtrum parallelepipedum ſecundum directionem, BO vrgetur $=\frac{1}{q}(\frac{dp}{dy})$, et ſecundum directionem $CO=\frac{1}{q}(\frac{dp}{dz})$. Cum igitur hae vires ſint contrariae iis, quibus fluidum ſollicitari aſſumſimus, elementum fluidi in Z verſans ſequentes tres ſuſtinet vires acceleratrices

ſecundum directionem $OA = P-\frac{1}{q}(\frac{dp}{dx})$

ſecundum directionem $OB = Q-\frac{1}{q}(\frac{dp}{dy})$

ſecundum directionem $OC = R-\frac{1}{q}(\frac{dp}{dz})$

In quibus vtique omnes vires, quibus fluidi elementa vrgeri poſſunt, comprehenduntur; Etiamſi enim vsquam fluidum extrinſecus ope piſtilli trudatur, hinc alia vis in elementa non propagatur niſi per preſſionem p, cuius hic iam rationem habuimus.

Coroll. 1.

29. Quarumcunque ergo virium actioni fluidum fuerit expoſitum, ſi modo preſſio in ſingulis eius elementis vt cognita ſpectetur facile hinc vires acceleratrices, quas ſingula fluidi elementa ſuſtinent, aſſignantur.

Coroll. 2.

30. Altitudo autem p preſſionem indicans ita in calculum ingreditur, quatenus eſt functio ternarum

rum coordinatarum x, y et z: ſiquidem in hac virium determinatione tempus t conſtans aſſumitur.

Coroll 3.

30. In viribus acceleratricibus ex preſſione natis etiam denſitas elementi fluidi q in computum ducitur, cuius, in ſollicitationibus P, Q, R nulla habetur ratio. quia hae vires elementa ſiue denſiora ſiue rariora perinde accelerant.

Scholion 1.

31. Quia vidimus hedram L N ln in ſingulis punctis eandem preſſionem $dx(\frac{dp}{dx})$ ſuſtinere omnium harum virium media directio per centrum inertiae parallelepipedi tranſibit, propterea quod eius maſſa vtpote infinite parua tanquam homogenea ſpectari poteſt. Quod cum etiam de binis reliquis preſſionibus ſit intelligendum, et vires P, Q, R grauitati ſimiles per ſe centro inertiae applicatae ſunt cenſendae ab his viribus iunctim ſumtis parallelipipedo nullus motus gyratorius imprimetur, interim tamen quia ob fluiditatem eius figura eſt mutabilis, fieri poteſt vt in motu eius dimenſiones varientur, quemadmodum etiam eius volumen, niſi denſitas fuerit inuariabilis, mutationi eſt obnoxium. Neque tamen omnis motus gyratorius hinc penitus excluditur: eatenus enim tantum omnes preſſiones $dx(\frac{dp}{dx})$, quas hedra L N ln ſuſtinet, ſunt aequales

quatenus variationes differentiales ſecundi ordinis hic negligimus quippe a quibus vtique tandem quaedam conuerſio parallelepipedi oriri poteſt. Colligere hoc licet ex eo, vbi ſupra translationem elementi pyramidalis ZLMN (fig. 23.) definiuimus: quod cum tempusculo infinite paruo *dt* in ſitum *zlmn* profeſratur, tam in quantitate quam ſitu laterum quaedam mutatio eſt facta, quae tempore finito etiam finita euadere poteſt. Verum quicunque hic ſit motus, eius natura per principia hic ſtabilienda determinabitur, neque verendum eſt hic vllam circumſtantiam eſſe praetermiſſam, qua motus affici queat.

Scholion 2.

32. Mirum quoque videri poteſt, quod hic fluidi elemento figuram parallelepipedi rectanguli tribuimus; cum ſi alia figura fuiſſet aſſumta, calculus multo difficilior extitiſſet, hincque dubitare liceat, an ex preſſionibus eaedem vires acceleratrices erutae fuiſſent? Verum ſupra iam oſtendimus effectum preſſionis non a figura corporis, quod eam ſuſtinet, pendere ſed a ſolo eius volumine: ſiquidem corpus aquae ſubmerſum ab eius preſſione ſemper pro ratione voluminis ſurſum vrgetur, quaecunque fuerit eius figura. Obiici quidem poteſt hoc phaenomenon ideo euenire, quod tam aquae denſitas quam grauitas vbique ſit eadem; dum contra vbi denſitas cum viribus ſollicitantibus fuerit variabilis, vtique figura corporis ſubmerſi in com-

putum

putum eſt ducenda. Hoc autem dubium prorſus euaneſcit, ſtatim ac volumen preſſiones ſuſtinens infinite paruum concipitur, vti hic fecimus quoniam in ſpatiolo infinite paruo omnis diuerſitas tam in denſitate quam viribus ſollicitantibus excluditur. Quam ob cauſam iam tuto affirmare licet, quamcunque fluidi elementum in Z conſideratum habuerit figuram inde nullum diſcrimen in vires acceleratrices, quas ſuſtinet, influere; ideoque eas, quas ex figura parallelepipedi elicuimus recte ſe habere, ſimulque ad omnes alias figuras aeque pertinere: ideo autem hac figura ſum vſus, quia ea ad calculum expediendum maxime eſt accommodata. Quin etiam ratio figurae ex concluſionibus inde deductis prorſus exceſſit manifeſto documento eas a figura nequaquam pendere.

Problema 23.

33. Si fluidum cuiuscunque naturae a viribus quibuscunque ſollicitetur, principia ſtabilire, ex quibus eius motum determinare liceat. Tab. V. Fig. 22.

Solutio.

Conſideremus ſtatum fluidi, in quo tempore quocunque $= t$ elapſo verſabitur, et conſtitutis ternis axibus fixis OA, OB, OC inter ſe normalibus, contemplemur fluidi particulam quamcunque in puncto Z cuius ſitus ternis coordinatis $OX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ determinatur: et quae ſollicitetur

a viribus acceleratricibus P, Q, R ſecundum directiones Zx, Zy, Zz axibus illis et coordinatis parallelas. Iam ad motum fluidi inueſtigandum ſtatuatur primo denſitas particulae nunc in Z verſantis $= q$, quae ergo ſpectanda eſt vt functio quatuor variabilium x, y, z et t. Deinde ſit nunc preſſio in Z debita altitudini $= p$, quae perpetuo ad materiam vniformem grauem cuius denſitas $= 1$ eſt referenda erit ergo quoque p functio quatuor variabilium x, y, z et t. Tertio quocunque motu nunc particula in Z verſans feratur, is reſoluatur ſecundum easdem ternas directiones Zx, Zy, Zz, ſitque celeritas ſecundum $Zx = u$; $Zy = v$ et $Zz = w$ quas celeritates ſpatiis vno minuto ſecundo percurrendis exhibeamus, dum etiam tempus t in minutis ſecundis exprimatur. His poſitis iam vidimus inter has celeritates et denſitatem q hanc relationem determinari vt ſit:

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{d.qu}{dx}\right) + \left(\frac{d.qv}{dy}\right) + \left(\frac{d.qw}{dz}\right) = 0.$$

Deinde in praecedente problemate inuenimus elementum fluidi in Z nunc his viribus acceleratricibus vrgeri

$$\text{ſec. } Zx = P - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right); \ \text{ſec. } Zy = Q - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dy}\right); \text{ſec. } Zz = R - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dz}\right).$$

Ex ipſo autem motu huic elemento tributo in problemat. 20 eius accelerationes ſecundum easdem directiones ita inuenimus expreſſas:

ſecun-

ſecundum $Zx = u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right)$

ſecundum $Zy = u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dv}{dz}\right) + \left(\frac{dv}{dt}\right)$

ſecundum $Zz = u\left(\frac{dw}{dx}\right) + v\left(\frac{dw}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right) + \left(\frac{dw}{dt}\right)$.

Quodſi iam altitudinem, per quam corpus graue vno minuto ſecundo delabitur, ponamus $= g$, vt tempus et celeritates ſecundum praeſcriptam menſuram exprimantur, quaelibet acceleratio vi acceleratrici in $2g$ ductae eſt aequanda vnde nanciſcimur tres aequationes ſequentes:

$$2gP - \frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right) = u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right)$$
$$2gQ - \frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{dy}\right) = u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dv}{dz}\right) + \left(\frac{dv}{dt}\right)$$
$$2gR - \frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{dz}\right) = u\left(\frac{dw}{dx}\right) + v\left(\frac{dw}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right) + \left(\frac{dw}{dt}\right)$$

quae cum illa ex conſideratione denſitatis nata coniunctae vniuerſam motus determinationem continent.

Coroll. 1.

34. Totum ergo negotium huc redit vt pro quantitatibus p, q, u, v, w eiusmodi functiones quatuor variabilium x, y, z et t inueniantur, quae his quatuor aequationibus ſatisfaciant, quod infinitis modis fieri poſſe cum per ſe eſt perſpicuum, tum natura rei maxime poſtulat.

Coroll. 2.

35. Cum autem denſitas q ſit vel conſtans, vel a preſſione p ſola vel inſuper a calore pendeat,

 hinc

hinc noua oritur conditio aequationibus inuentis adiungenda; eaque propterea quaeſtio magis reſtringitur.

Coroll. 3.

36. Cum igitur denſitas q aliunde detur pro quatuor reliquis incognitis p, u, v, w quatuor adepti ſumus aequationes, ex quo manifeſtum eſt ſolutionem hic datam eſſe completam, nullamque conditionem eſſe praetermiſſam, cuius inſuper ratio foret habenda.

Scholion.

37. In his ergo aequationibus inuentis vniverſa Theoria motus fluidorum ita continetur, vt non ſolum ad omnis generis fluida ſed etiam ad omnes prorſus vires, quibus fluida ſollicitari poſſunt, extendatur. Verum tota haec Theoria ad calculi genus plane nouum, et adhuc vix libatum deuoluitur, cum per integrationem functiones quatuor variabilium x, y, z et t a ſe inuicem non pendentium erui oporteat Cuiusmodi calculus, quantopere ſit inuſitatus et abſconditus hinc colligere licet, quod vniuerſus calculus integralis, quatenus adhuc eſt excultus, tantum functionum vnicae variabilis inueſtigatione conſummatur; parumque etiamnunc ea eius pars, quae circa functiones duarum variabilium verſatur, ſit elaborata, quorſum eſt referendum problema de cordis vibrantibus maximis diffi-

difficultatibus inuolutum. Cum igitur hic adeo functiones quatuor variabilium debeant indagari, facile perſpicitur, quanta adhuc calculi ſubſidia in hoc negotio deſiderentur. Imprimis ergo in id eſt incumbendum, vt aequationes inuentas ſiue ad maiorem ſimplicitatem, ſiue ad minorem numerum redigamus, quo deinceps earum euolutio facilius ſuſcipi queat. Ac ternae quidem poſtremae aequationes ita ſunt comparatae, vt in vnam compingi queant, quae autem vim ſingularum in ſe complectatur, quemadmodum in ſequenti problemate explicabimus.

Problema 24.

38. Si praeter vires ſollicitantes P, Q, R etiam ternae cuiusque puncti celeritates u, v et w cum denſitates q vt datae ſpectentur, preſſionem p per vnicam aequationem determinare.

Solutio.

Trium aequationum, quas in praecedente problemate elicuimus, prima exhibet valorem ipſius $(\frac{dp}{dx})$, ſecunda ipſius $(\frac{dp}{dy})$ et tertia ipſius $(\frac{dp}{dz})$. Cum igitur p ſit functio quatuor variabilium x, y, z et t, ſi tempus t pro conſtante habeamus; erit vtique:

$$dp = dx\left(\frac{dp}{dx}\right) + dy\left(\frac{dp}{dy}\right) + dz\left(\frac{dp}{dz}\right)$$

vnde

vnde totam rem ad differentiale abſolutum dp perducere poterimus. In hunc finem ſtatuamus breuitatis gratia

$$u\left(\frac{du}{dx}\right)+v\left(\frac{du}{dy}\right)+w\left(\frac{du}{dz}\right)+\left(\frac{du}{dt}\right)=U$$

$$u\left(\frac{dv}{dx}\right)+v\left(\frac{dv}{dy}\right)+w\left(\frac{dv}{dz}\right)+\left(\frac{dv}{dt}\right)=V$$

$$u\left(\frac{dw}{dx}\right)+v\left(\frac{dw}{dy}\right)+w\left(\frac{dw}{dz}\right)+\left(\frac{dw}{dt}\right)=W$$

vt tres aequationes ante inuentae fiant:

$$\frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right)=2gP-U;\ \frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{dy}\right)=2gQ-V;\ \frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{dz}\right)=2gR-W$$

quarum ſi prima in dx, ſecunda in dy, et tertia in dz ducatur, ob $dx\left(\frac{dp}{dx}\right)+dy\left(\frac{dp}{dy}\right)+dz\left(\frac{dp}{dz}\right)=dp$, denotante dp differentiali preſſionis p dum tempus t conſtans habetur, obtinebimus eas addendo hanc aequationem:

$$\frac{2g\,dp}{q}=2g(P\,dx+Q\,dy+R\,dz)-U\,dx-V\,dy-W\,dz$$

ex qua nunc per integrationem inueſtigari oportet preſſionem p. Obſeruandum autem eſt hanc ſolam aequationem aeque late patere, ac tres praecedentes iunctim ſumtas, easque ſingulas ita in ſe complecti, vt ea ſine vlla cuiusquam determinationis praetermiſſione in locum trium illarum aequationum ſubſtitui poſſit. Quodſi enim in genere fuerit $dp=L\,dx+M\,dy+N\,dz$ haec ſola aequatio iſtas tres in ſe complectitur $\left(\frac{dp}{dx}\right)=L$, $\left(\frac{dp}{dy}\right)=M$, et $\left(\frac{dp}{dz}\right)=N$, neque his tribus aequationibus plus determinatur, quam illa vnica.

Coroll.

Coroll. 1.

39. Nunc igitur vniuerſa motus fluidorum Theoria in his duabus aequationibus continetur:

$$\text{I.}\quad \left(\frac{d\,q}{d\,t}\right)+\left(\frac{d.\,q\,u}{d\,x}\right)+\left(\frac{d.\,q\,v}{d\,y}\right)+\left(\frac{d.\,q\,w}{d\,z}\right)=0$$

$$\text{II.}\quad \frac{2\,g\,d\,p}{q}=2g(Pdx+Qdy+Rdz)-Udx-Vdy-Wdz$$

quibus autem inſuper relatio inter denſitatem q et preſſionem p, quam natura fluidi poſtulat adiungi debet.

Coroll. 2.

40. In poſteriori harum aequationum tempus t conſtans aſſumitur, vnde abſoluta integratione in valorem ipſius p loco conſtantis ingredietur functio quaecunque arbitraria temporis t: quemadmodum rei natura poſtulat, quia per vires externas pro lubitu quouis momento preſſiones internae p mutari poſſunt.

Coroll. 3.

41. Si in poſteriori aequatione quantitates U, V et W vt functiones datae ipſarum x, y et z ſpectentur, eas ita comparatas eſſe oportet, vt aequatio integrationem admittat; niſi enim hoc eueniat, eiusmodi motus plane pro impoſſibili eſt habendus.

Scholion 1.

42. Iam ſaepius obſeruauimus vires acceleratrices P, Q, R, quae quidem in mundo reperiun-

tur, ſemper ita eſſe comparatas vt formula differentialis $Pdx + Qdy + Rdz$ integrationem admittat; cuius integrale eſt id; quod actionis quantitatem vocare licet. Quodſi ergo haec actio littera S indicetur, ſecunda aequatio hanc induet formam:

$$\frac{2g\,dp}{q} = 2g\,dS - U\,dx - V\,dy - W\,dz.$$

Quare ſi et forma $U\,dx + V\,dy + W\,dz$ admittat integrationem eiusque integrale vocetur T, vt ſit

$$\frac{2g\,dp}{q} = 2g\,dS - dT$$

vbi iam conditiones integrabilitatis ſatis ſunt manifeſtae. Scilicet ſi q ſit quantitas vel conſtans vel a ſola preſſione p pendens integrale eſt $2g\int\frac{dp}{q} = 2gS - T - \Gamma : t$, tum vero ſi q fuerit quantitas a p et $(2gS - T)$ vtcunque pendens aequatio pariter pro poſſibili eſt habenda, vtpote duas tantum variabiles p et $2gS - T$ inuoluens; inde vero tam p quam q ſeorſim certis functionibus quantitatis $2gS - T$ aequabuntur in quas quidem t inſtar conſtantis vtcunque ingredi poteſt. Atque ex hoc caſu facile intelligitur, ad id, vt noſtra ſecunda aequatio integrationem admittat, abſolute requiri, vt eam ope ſubſtitutionis cuiuscunque in formam binas tantum variabiles inuoluentem transmutare liceat. Quaecunque enim aequationes differentiales inter tres pluresue variabiles ſunt poſſibiles, quod quibus caſibus vſu veniat, certa criteria in Analyſi tradi ſolent, haec criteria ſemper eo redeunt, vt ope certae ſubſtitutionis

tionis eae aequationes ad duas tantum variabiles reduci queant; quemadmodum in caſu ante euoluto fieri videmus.

Scholion 2.

43. Hac autem hypotheſi, qua formulam $U dx + V dy + W dz$ integrabilem aſſumſimus formulae noſtrae generali inſignem reſtrictionem attulimus. Videtur quidem adeo triplex determinatio hac conditione inuehi, cum ea requiratur vt ſit

$$\left(\frac{dU}{dy}\right) = \left(\frac{dV}{dx}\right);\ \left(\frac{dU}{dz}\right) = \left(\frac{dW}{dx}\right) \text{ et } \left(\frac{dV}{dz}\right) = \left(\frac{dW}{dy}\right)$$

ſed obſeruandum eſt, dum binis harum trium formularum fuerit ſatisfactum, eo ipſo etiam tertiae ſatisfieri. Ponamus enim relationem inter U, V, et W ita eſſe limitatam, vt binae priores formulae impleantur, ex iisque vlteriori differentiatione elicietur:

$$\left(\frac{ddU}{dydz}\right) = \left(\frac{ddV}{dxdz}\right) = \left(\frac{ddW}{dxdy}\right).$$

Cum igitur hinc ſit $\left(\frac{ddV}{dxdz}\right) = \left(\frac{ddW}{dxdy}\right)$, haec aequatio vtique iam tertiam illam formulam $\left(\frac{dV}{dz}\right) = \left(\frac{dW}{dy}\right)$ in ſe complectitur. Ex quo ſaltem noſtram aequationem generalem duplici determinatione reſtrinximus. Tum vero etiam perpendendum eſt has quantitates U, V, et W ob primam aequationem generalem etiam a denſitate q pendere, ita vt nobis non amplius liberum ſit eiusmodi conditiones fingere, ſiquidem quantitas q etiam ſeorſim in alteram aequationem ingreditur.

ditur. Interim tamen hoc certum eſt, quoscunque valores pro quantitatibus p, q, u, v, w excogitare licuerit quibus vtrique aequationi generali ſatisfiat, iis motum quendam poſſibilem exhiberi, ſi modo eiusmodi fluidum exiſtat, cuius denſitas ratione preſſionis fictioni illi conueniat. Primam autem aequationem generalem, in quam neque vires P, Q, R ingrediuntur neque preſſio, ſine reſpectu ad alteram tractare licet: eius autem integrationem adeo completam reperire contigit, quam in ſequenti problemate ſum expoſiturus.

Problema 25.

44. Aequationis primae pro motu fluidorum inuentae:

$$\left(\frac{d.qu}{dx}\right)+\left(\frac{d.qv}{dy}\right)+\left(\frac{d.qw}{dz}\right)+\left(\frac{dq}{dt}\right)=0$$

integrale completum inueſtigare.

Solutio.

Quaeſtio ergo huc redit, vt huiusmodi aequatio generaliſſime reſoluatur.

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)+\left(\frac{dQ}{dy}\right)+\left(\frac{dR}{dz}\right)+\left(\frac{dS}{dt}\right)=0$$

ſeu vt pro quatuor quantitatibus P, Q, R, S in genere eiusmodi functiones quatuor variabilium x, y, z et t aſſignentur, quae non ſolum huic aequationi ſatisfaciant, ſed etiam omnes omnino ſolutiones in ſe complectantur. Quem ſcopum quo tutius ac certius

certius attingamus a caſibus ſimplicioribus incipiendo ſucceſſiue ad hunc propoſitum aſcendamus. Ac primo quidem ſi vnica habeatur variabilis x, et aequatio vnico conſtet termino $(\frac{dP}{dx}) = 0$ integrale completum vtique eſt $P = \text{Conſt.}$

Nunc duae admittantur variabiles x et y, et integranda ſit haec aequatio $(\frac{dP}{dx}) + (\frac{dQ}{dy}) = 0$. Hoc ingenere praeſtabitur ſumendo pro arbitrio functionem quamcunque binarum variabilium x et y, quae ſit O, qua differentiata fiat $dO = K dx + L dy$: ac manifeſtum eſt illam aequationem complete integrari his functionibus:

$$P = L + \Gamma : y \text{ et } Q = -K + \Delta : x.$$

Statuantur tertio tres variabiles x, y, z, vt integrari debeat haec aequatio $(\frac{dP}{dx}) + (\frac{dQ}{dy}) + (\frac{dR}{dz}) = 0$: ac ſupra (§. 25) vidimus ad hoc praeſtandum pro lubitu duas functiones trium variabilium x, y et z aſſumi poſſe, quae ſi fuerit O et o, ex earumque differentiatione prodeat.

$$dO = K dx + L dy + M dz \text{ et } do = k dx + l dy + m dz$$

ſolutio generalis erit:

$$\left.\begin{aligned} P &= Lm - Ml + \Gamma : (y, z) \\ Q &= Mk - Km + \Delta : (x, z) \end{aligned}\right\} \text{ et } R = Kl - Lk + \Sigma : (x, y)$$

Quae ſolutio cum praeter functiones duas O et o pro lubitu aſſumtas, inſuper tres complectatur fun-

 ctiones

ctiones arbitrarias binarum variabilium, vtique pro completa eſt habenda.

Hinc igitur ratio reſoluendi ipſam aequationem propoſitam concluditur, in qua quatuor variabiles continentur:

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)+\left(\frac{dQ}{dy}\right)+\left(\frac{dR}{dz}\right)+\left(\frac{dS}{dt}\right)=0.$$

Hic ſcilicet tres functiones pro lubitu quatuor variabilium aſſumantur, O, o, ω, quarum differentialia ſint:

$$dO=K\,dx+L\,dy+M\,dz+N\,dt$$
$$do=k\,dx+l\,dy+m\,dz+n\,dt$$
$$d\omega=\varkappa\,dx+\lambda\,dy+\mu\,dz+\nu\,dt$$

atque hinc functiones quaeſitae P, Q, R, S ita definiantur vt ſit

$$P=+Lm\nu+Mn\lambda+Nl\mu-Ln\mu-Ml\nu-Nm\lambda + \Gamma:(y,z,t)$$

$$Q=-Mn\varkappa-Nk\mu-Km\nu+Mk\nu+Nm\varkappa+Kn\mu + \Delta:(x,z,t)$$

$$R=+Nk\lambda+Kl\nu+Ln\varkappa-Nl\varkappa-Kn\lambda-Lk\nu + \Sigma:(x,y,t)$$

$$S=-Kl\mu-Ln\varkappa-Mk\lambda+Km\lambda+Lk\mu+Ml\varkappa + И:(x,y,z)$$

qui valores cum ſatisfaciant, ac praeterea ſecundum progreſſionis legem tres functiones arbitrarias quatuor variabilium vna cum quatuor functionibus ternarum

narum variabilium ibidem pro arbitrio accipiendas inuoluant, ſine dubio integrationem completam conſtituere ſunt cenſendae.

Coroll. 1.

45. Ne multitudo litterarum mentem obruat, loco functionum Θ, o, ω ſcribamus litteras F, G, H, et ex harum formulis differentialibus ſolutio problematis noſtri ita ſe habebit:

$$qu = \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right)\left(\frac{dH}{dt}\right) + \left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dG}{dt}\right)\left(\frac{dH}{dy}\right) + \left(\frac{dF}{dt}\right)\left(\frac{dG}{dy}\right)\left(\frac{dH}{dz}\right) - \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dt}\right)\left(\frac{dH}{dz}\right)$$
$$- \left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dG}{dy}\right)\left(\frac{dH}{dt}\right) - \left(\frac{dF}{dt}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right)\left(\frac{dH}{dy}\right) + \Gamma : (y, z, t)$$

$$qv = -\left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dG}{dt}\right)\left(\frac{dH}{dx}\right) - \left(\frac{dF}{dt}\right)\left(\frac{dG}{dx}\right)\left(\frac{dH}{dz}\right) - \left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right)\left(\frac{dH}{dt}\right) + \left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dG}{dx}\right)\left(\frac{dH}{dt}\right)$$
$$+ \left(\frac{dF}{dt}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right)\left(\frac{dH}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dG}{dt}\right)\left(\frac{dH}{dz}\right) + \Delta : (x, z, t)$$

$$qw = +\left(\frac{dF}{dt}\right)\left(\frac{dG}{dx}\right)\left(\frac{dH}{dy}\right) + \left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dG}{dy}\right)\left(\frac{dH}{dt}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dt}\right)\left(\frac{dH}{dx}\right) - \left(\frac{dF}{dt}\right)\left(\frac{dG}{dy}\right)\left(\frac{dH}{dx}\right)$$
$$- \left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dG}{dt}\right)\left(\frac{dH}{dy}\right) - \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dx}\right)\left(\frac{dH}{dt}\right) + \Sigma : (x, y, t)$$

$$q = -\left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dG}{dy}\right)\left(\frac{dH}{dz}\right) - \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right)\left(\frac{dH}{dx}\right) - \left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dG}{dx}\right)\left(\frac{dH}{dy}\right) + \left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right)\left(\frac{dH}{dy}\right)$$
$$+ \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dx}\right)\left(\frac{dH}{dz}\right) + \left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dG}{dy}\right)\left(\frac{dH}{dx}\right) + \Pi : (x, y, z)$$

Coroll 2.

46. Hic non obſtante terminorum multitudine facile eſt legem obſeruare, qua pro ſingulis valoribus partes combinantur, in prima nempe expreſſione nusquam occurrit elementum dx in ſecunda omittitur dy in tertia dz et in quarta dt. Tum vero ſi in prima loco dy ſcribitur dx, ſignaque mutentur

tur oritur ſecunda, ſin vero in prima loco dz ſcribatur dx oritur tertia: ſicque ex quauis data reliquas elicere licet.

Coroll 3.

47. Tum vero etiam in qualibet expreſſione ea tria membra eodem ſigno ſunt affecta, quae nullum habent factorem communem quae autem factorem habent communem diuerſis ſignis afficiuntur. Denique in diuerſis expreſſionibus, quae membra nullum factorem habent communem, ea diuerſis ſignis; quae vnicum factorem habent communem, eodem ſigno, et quae duos factores habent communes iterum diuerſis ſignis ſunt affecta.

Scholion 1.

48. Cuiuis autem membro cuiusque expreſſionis in reliquis expreſſionibus nonniſi vnicum reſpondet, quod cum eo duos factores datos habet communes, quod cum imprimis notari mereatur, quoniam ei tota demonſtratio iſtius ſolutionis innititur, id ſequenti modo oſtenditur. Sumatur ex forma qu membrum $(\frac{dF}{dy})(\frac{dG}{dz})(\frac{dH}{dt})$, pro quo in reliquis quaeri debeat membrum; quod cum eo hos duos factores $(\frac{dF}{dy})(\frac{dG}{dz})$ habeat communes. Euidens autem eſt tale membrum neque in forma qv, (quia hic dy excluditur), neque in forma qw (quia hic dz excluditur) occurrere poſſe: in forma autem q certe reperiri debet, idque vnicum ſigno

contra-

contrario affectum ſcilicet $-(\frac{dF}{dy})(\frac{dG}{dz})(\frac{dH}{dx})$, quod ſimul de quibusuis aliis membris eſt tenendum. Hoc iam euicto demonſtratio noſtrae ſolutionis ita ſe habet: conſiderentur tantum duo huiusmodi membra binos factores datos communes habentia, quae pro factoribus communibus $(\frac{dF}{dy})(\frac{dG}{dz})$ in his formis reperiuntur;

$$qu = +(\frac{dF}{dy})(\frac{dG}{dz})(\frac{dH}{dt}) + \text{etc.} \quad q = -(\frac{dF}{dy})(\frac{dG}{dz})(\frac{dH}{dt}) \text{ etc.}$$

vnde pro aequatione propoſita integranda:

$$(\frac{d.qu}{dx}) + (\frac{d.qv}{dy}) + (\frac{d.qw}{dz}) + (\frac{dq}{dt}) = 0$$

elicimus ſolos factores diuerſos differentiando:

$$(\frac{d.qu}{dx}) = +(\frac{dF}{dy})(\frac{dG}{dz})(\frac{ddH}{dt\,dx}) \text{ etc.}$$

$$(\frac{dq}{dt}) = -(\frac{dF}{dy})(\frac{dG}{dz})(\frac{ddH}{dt\,dx}) \text{ etc.}$$

vbi haec duo membra ſe mutuo tollunt. Ex quo intelligitur ſi pro qu, qv, qw, et q totae expreſſiones inuentae ſubſtituantur, et ſingula membra debite differentientur, quo pacto ſingula membra in tres partes euoluuntur, omnes has partes ſe mutuo deſtruere debere. Siquidem dum ſingula membra differentiantur, inde pro ternis factoribus in differentialibus terna noua membra reſultant, in quibus vnicus tantum factor differentiatur binis reliquis manentibus vnde quod hic de deſtructione membri differentiati $(\frac{dF}{dy})(\frac{dG}{dz})(\frac{ddH}{dt\,dx})$ eſt oſtenſum idem de omnibus plane valere eſt iudicandum.

Scholion 2.

49. Ex ſolutione problematis, dum per gradus ad aequationem propoſitam ſumus progreſſi, caſum, quo fluidi denſitas q eſt conſtans, et prima aequatio ita ſe habet

$$\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dw}{dz}\right)=0$$

reſoluere poterimus, quod eo magis eſt notandum, quod huius ſolutionem ex generali, quam dedimus, deriuare non licet. Quamquam autem hic tres tantum variabiles x, y et z conſiderantur tamen nihil impedit, quominus in ſolutione ibi data, etiam quartum t introducamus, eam quaſi conſtantem ſpectando. Sumtis ergo pro lubitu duabus functionibus F, G quatuor variabilium x, y, z et t, ex iis ternae celeritates u, v, et w ita determinabuntur vt ſit

$$u=\left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right)-\left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dG}{dy}\right)+\Gamma:(y,z,t)$$

$$v=\left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dG}{dx}\right)-\left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right)+\Delta:(x,z,t)$$

$$w=\left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dG}{dy}\right)-\left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dx}\right)+\Sigma:(x,y,t)$$

vbi totum momentum iterum in eo eſt ſitum, quod cuiuis membro cuiusque formae in reliquis reſpondeat aliquod quod cum eo datum factorem habeat communem, et ſigno contrario ſit affectum. Totus autem hic caſus, quo denſitas fluidi eſt quantitas conſtans, meretur vt ſeorſim diligentius euoluatur, cui negotio ſequens caput eſt deſtinatum. Cete-

Ceterum in vſum analyſeos hic notaſſe iuuabit, hac methodo etiam ſimiles aequationes, vbi plures variabiles quam quatuor occurrerent, generaliter reſolui poſſe; membrorum autem numerus ita increſcit, vt nimis prolixum foret ſaltem caſum quinque variabilium euoluere.

CAPVT III.

APPLICATIO HORVM PRINCIPIORVM AD FLVIDA EIVSDEM VBIQVE DENSITATIS.

Problema 26.

50. Si fluidi denſitas vbique et ſemper ſit eadem idque a viribus quibuscunque ſollicitetur, eius motum per formulas analyticas determinare.

Solutio.

Quae in capite praecedente de motu fluidorum cuiuscunque indolis ſunt tradita, ea ad hunc caſum referentur, denſitatem, quae ibi vtcunque variabilis erat poſita, conſtantem ponendo, quae ſit $= b$, ita vt habeamus $q = b$. Hinc prima ſtatim aequatio in hanc formam contrahitur

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dw}{dz}\right) = 0$$

 quam

quam ſumendis duabus functionibus quibuscunque F et G, quatuor variabilium x, y, z et t, ita complete integrari vidimus, vt ſit

$$u = \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right) - \left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dG}{dy}\right) + \Gamma : (y, z, t)$$

$$v = \left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dG}{dx}\right) - \left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right) + \Delta : (x, z, t)$$

$$w = \left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dG}{dy}\right) - \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dx}\right) + \Sigma : (x, y, t)$$

vbi $\Gamma : \Delta : \Sigma$ eiusmodi denotant functiones, vt ſit
$\left(\frac{d\Gamma}{dx}\right) = 0$, $\left(\frac{d\Delta}{dy}\right) = 0$, et $\left(\frac{d\Sigma}{dz}\right) = 0$

Pro altera aequatione ponamus primo breuitatis gratia.

$$u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right) = U$$

$$u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dv}{dz}\right) + \left(\frac{dv}{dt}\right) = V$$

$$u\left(\frac{dw}{dx}\right) + v\left(\frac{dw}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right) + \left(\frac{dw}{dt}\right) = W$$

et iſta aequatio hanc habebit formam:

$$\frac{2g\,dp}{b} = 2g(P\,dx + Q\,dy + R\,dz) - U\,dx - V\,dy - W\,dz$$

vbi cum formula $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ ſemper per ſe ſit integrabilis, eius integrali poſito $= S$, erit

$$\frac{2g\,dp}{b} = 2g\,dS - U\,dx - V\,dy - W\,dz$$

in qua aequatione differentiali notetur tempus t conſtans eſſe aſſumtum. Cum igitur ex priori aequatione celeritates u, v, w iam per quatuor variabiles ſint expreſſae x, y, z et t, ex hac quoque preſſio p per easdem variabiles exhibetur, dum haec

haec aequatio fuerit poſſibilis, quod fieri nequit niſi formula $Udx + Vdy + Wdz$ per ſe integrationem admittat, qua conditione integratio prioris aequationis non mediocriter reſtringitur. Poſito autem iſto integrali $= T$ erit

$$\frac{2gp}{b} = 2gS - T + f:t$$

loco conſtantis functionem quamcunque ipſius t adiiciendo.

Coroll 1.

51. Ex generaliſſima igitur prioris aequationis integratione ii tantum caſus ſunt admittendi, quibus ſimul formula $Udx + Vdy + Wdz$ integrabilis redditur: quae conditio cum duas determinationes poſtulet functiones illae generales F, G et Γ, Δ, Σ duplicem reſtrictionem exigunt.

Coroll. 2.

52. Pro celeritatibus ergo ternis u, v, w eiusmodi functiones quatuor variabilium x, y, z et t inueſtigari oportet, vt primo ſit $\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dw}{dz}\right) = 0$, tum vero inſuper his formulis eſt ſatisfaciendum

$$\left(\frac{dU}{dy}\right) = \left(\frac{dV}{dx}\right); \left(\frac{dU}{dz}\right) = \left(\frac{dW}{dx}\right) \text{ et } \left(\frac{dV}{dz}\right) = \left(\frac{dW}{dy}\right)$$

quarum quidem trium poſteriorum binae tertiam in ſe inuoluunt, ita vt omnino tres conditiones habeantur.

Scholion.

53. Prior ergo integratio etſi in genere ſucceſſit vix tamen quicquam affert ſubſidii ad problema propoſitum reſoluendum quoniam determinatio earum functionum, quas pro ternis celeritatibus u, v et w inuenimus, vt formula: $Udx+Vdy+Wdz$ integrabilis euadat, ne minimum quidem ſubleuatur. Ac temerarium certe foret, in tam ardua inveſtigatione facilem reſolutionem ſperare, cum adeo determinatio motus corporum ſolidorum maximis ſit difficultatibus ſubiecta. Etſi enim pro his corporibus euolutis caſus, quo nullae adſunt vires ſollicitantes, tandem feliciter eſt effecta, tamen nullum plane eſt dubium, quin motus fluidorum multo magis ſit abſconditus. Ex quo inueſtigationes eo dirigi conueniet, vt ſaltem in plures caſus particulares inquiramus, quibus motus fluidorum definire liceat. Ac primo quidem motus ille ſibi parallelus ſe offert quo fluidum perinde ac corpus ſolidum progeditur quem idcirco accuratius perpendiſſe, et ex noſtris formulis deriuaſſe haud parum iuuabit: Totum vero negotium haud mediocriter illuſtrabitur, ſi ante caſum quo ternae celeritates plane euaneſcunt, examini ſubiiciamus, etſi enim ſic omnis motus tollitur et res ad aequilibrium perducitur, tamen quoniam preſſio variabilis eſſe poteſt, nonnulla hic obſeruanda occurrent, quae in ſequentibus vtilitate non carebunt.

Proble-

Problema 27.

54. Si cuiusque fluidi elementi ternae celeritates u, v, w euaneſcant vires autem quaecunque fluidum ſollicitent litteris P, Q, R indicatae, quoniam fluidum in quiete permanere ſumitur, preſſionem fluidi tam in ſingulis elementis, quam ad quoduis tempus t definire.

Solutio.

Statim apparet hanc hypotheſin $u=0, v=0, w=0$ primae aequationi $(\frac{du}{dx})+(\frac{dv}{dy})+(\frac{dw}{dz})=0$ ſatisfacere. Tum vero ob $U=0$, $V=0$, $W=0$ altera aequatio hanc induit formam:

$$\frac{dp}{b}=Pdx+Qdy+Rdz$$

ex qua perſpicuum eſt hypotheſin quietis ne locum quidem habere poſſe, niſi vires P, Q, R ita ſint comparatae, vt formula $Pdx+Qdy+Rdz$ integrationem admittat. Si ergo eius integrale $=S$, vt ſit $dp=bdS$, et quia tempus t conſtans eſt aſſumtum, integrale completum erit $p=bS+\Gamma:t$ loco ſcilicet conſtantis functionem quamcunque temporis t adiiciendo. Pro eodem ergo momento preſſio per totam fluidi maſſam vnice pendet a quantitate S, ita vt in ſtratis aequilibratis, per quae S eundem vbique habet valorem, preſſio ſit aequalis, quemadmodum in prima ſectione de aequilibrio eſt oſtenſum. Nunc autem inſuper patet, quod ibi non eſt anno-

annotatum, fieri poſſe, vt in eodem puncto Z ſucceſſu temporis preſſio quomodocunque varietur. Quod etiam cum natura quaeſtionis mirifice conſentit: vaſi enim fluidum incluſum eſſe concipiatur, in quo ope emboli vi quacunque vrgeatur, ſicque dum nullam compreſſionem patitur, ſine dubio erit in aequilibrio. Verum hic ſtatus aequilibrii non turbabitur, etiamſi vis embolum adigens continuo immutetur ſiue lege quacunque ſiue etiam ſine vlla lege, at hinc preſſio in fluido continuo quoque immutabitur. Quare cum noſtra ſolutio omnes caſus poſſibiles quietis in ſe complecti debeat, ratio eſt manifeſta, cur in expreſſionem pro p inuentam functio quaecunque temporis ſit ingreſſa.

Coroll 1.

55. Iſta igitur functio temporis t quouis caſu ex variatione virium, quibus embolus impellitur, determinari debet: quae ſi fuerit arbitraria nullique legi adſtricta, haec functio quoque ad genus earum quas diſcontinuas vocaui, eſt referenda: vnde neceſſitas huiusmodi functionum in Analyſi multo clarius elucet.

Coroll 2.

56. Quod ſi ergo ad datum tempus preſſio in puncto quocunque fuerit cognita, pro eodem momento in omnibus aliis punctis preſſio aſſignari poterit, quippe quae a ſola quantitate S pendebit.

Ab

Ab his autem preſſionibus neque praecedentes neque ſequentes vllo modo pendent.

Scholion.

57. Dum hic fluidum vaſi incluſum et ope emboli vi quacunque vrgeri concipitur, per ſe intelligitur, niſi vas in ſuo loco ſit affixum, id quouis momento talibus viribus ſuſtineri debere, quae ei in quiete continendo ſufficiant; alioquin caſus cum hypotheſi aſſumta non conueniret. At vires iſtae externae aeque parum atque ea qua embolus adigitur, in formulas noſtras differentiales ingrediuntur, quoniam directe motum particularum fluidi non afficiunt, dum ſingulae tantum a viribus naturalibus P, Q, R et preſſione ſollicitantur: verum integratione demum peracta functiones illae arbitrariae per integrationes in calculum introductae ad illas vires externas, omnesque alias circumſtantias accommodari debent. Vires externae autem duplicis ſunt generis quarum alterae ſolum vas, tanquam corpus ſolidum vrgent neque ipſum fluidum afficiunt: alterae vero quaſi embolo applicatae ſimul fluidum premunt, et vas ipſum perinde atque illae ſollicitant. Praeterea vero etiam vas ipſum a viribus P, Q, R eandem ſuſtinet vim ac ſi cum fluido vnum corpus ſolidum conſtitueret, earumque actioni eſſet expoſitum; ex quo facile intelligere licet quantis viribus opus ſit ad vas in quiete

continendum ne cum vaſe etiam fluidum de ſtatu quietis deturbetur.

Problema 28.

58. Si cuiusque fluidi puncti Z ternae celeritates u, v, w fuerit conſtantes, ita vt ſingula elementa motu vniformi ſecundum eandem directionem ferantur, dum a viribus acceleratricibus quibuscunque ſollicitantur, preſſiones fluidi vbique et pro omni tempore inueſtigare.

Solutio.

Tota ergo fluidi maſſa perinde mouetur ac corpus ſolidum, ſi ergo vaſi concipiatur incluſum, hoc vas cum fluido vniformiter in directum mouebitur, cuiusmodi motus vtique obtineri poteſt, non obſtantibus viribus P, Q, R fluidum vrgentibus, dum eiusmodi vires vaſi extrinſecus applicantur, quae quouis momento cum illis in aequilibrio conſtituantur. Tum vero ſi inter has vires quaepiam ope piſtilli in ipſum fluidum agat, quoniam ea pro lubitu variari poteſt, etiam quouis momento preſſiones in fluido ad arbitrium mutari poterunt, id quod calculus ex ſolutione deductus declarare debet. Nam ob celeritates ternas conſtantes ponatur $u = \alpha$, $v = \beta$, $w = \gamma$, ac primae quidem aequationi ſponte ſatisfit. Tum vero fiet $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$, ex quo ob $Pdx + Qdy + Rdz = dS$ erit vt ante $dp = bdS$ et $p = bS + f:t$: Quouis ergo momen-

momento per totum vas preſſio erit $p = bS + C$, ſicque ab actione virium S eodem modo pendet, quo in caſu quietis, diuerſis autem temporibus haec preſſio pro lubitu variari poteſt, prorſus vti natura quaeſtionis poſtulat.

Scholion.

59. Hic caſus ex praecedente, quo tota fluidi maſſa in quiete perſeuerabat, deduci potuiſſet ſecundum principium in Mechanica receptum, quod in motu corporum omnia manent eadem, ſi totum eorum ſyſtema inſuper vniformiter in directum proferri concipiatur. Verum hic ob vires ſollicitantes P, Q, R aliquod diſcrimen accedit; in quiete enim quodlibet fluidi elementum perpetuo eandem ſollicitationem ſuſtinet, dum autem fluidi maſſa progreditur, et idem elementum alia atque alia loca percurrit euenire vtique poteſt, vt ſucceſſiue ab aliis atque aliis viribus ſollicitetur, ſiquidem hae vires a loco pendent, vt plerumque fieri ſolet. Cum igitur pro eodem fluidi elemento hic quantitas S ſit variabilis, quae in caſu quietis manebat conſtans peculiari ſolutione erat opus. Probe autem tenendum eſt, niſi vires ſollicitantes ita ſint comparatae, vt formula $Pdx + Qdy + Rdz$ integrationem admittat, tum talem motum aeque parum locum habere poſſe ac quietem, quomodocunque etiam vires extrinſecus agentes attemperentur. Si ſcilicet eiusmodi caſus exiſteret, etiamſi initio motus vniformis

in directum fluido fuiſſet impreſſus, is tamen nullo modo conſeruari poſſet, ſed aequabilitas perpetuo turbaretur; hocque adeo caſu hypotheſis celeritatum conſtantium contradictionem implicare eſt cenſenda. Denique hinc etiam clarius intelligitur, omnes circumſtantias externas veluti vaſis et virium ſiue vas ſolum, ſiue etiam fluidum piſtillorum ope vrgentium in aequationes canonicas motum fluidorum exprimentes non ingredi, ſed demum integratione peracta, functiones arbitrarias in calculum inuectas ad eas accommodari oportere, quae functiones etiam ſemper ita ſunt comparatae, vt omnes plane circumſtantias externas in ſe complectantur.

Problema 29.

60. Si ternae cuiusque puncti celeritates u, v, w per functiones ſolius temporis t exprimantur, explorare vtrum talis motus exiſtere queat et ſub quibus conditionibus, dum fluidi ſingulae particulae a viribus quibuscunque ſollicitantur, tum vero preſſionem per totam fluidi maſſam inueſtigare.

Solutio.

Eodem ergo temporis inſtanti omnia fluidi elementa pari motu in eandem directionem feruntur, et tempore fluente omnibus aequalis mutatio cum celeritatis tum directionis ratione induci ſtatuitur; vnde cum ſingula fluidi elementa easdem perpetuo

petuo inter ſe diſtantias ſeruent, tota maſſa inſtar corporis ſolidi promouebitur, et quia iisdem ſemper terminis circumſcribitur, vaſi incluſa vna cum vaſe motu progreſſiuo proferetur, omni ſcilicet motu gyratorio excluſo. Cum igitur u, v et w ſint functiones temporis t tantum, primae ſtatim aequationi $\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dw}{dz}\right)=0$ ſponte ſatisfit; deinde pro altera aequatione ob $U=\left(\frac{du}{dt}\right)$, $V=\left(\frac{dv}{dt}\right)$, $W=\left(\frac{dw}{dt}\right)$ ideoque et has quantitates functiones ſolius t, habebimus

$$\frac{2g\,dp}{h}=2g\,dS-dx\left(\frac{du}{dt}\right)-dy\left(\frac{dv}{dt}\right)-dz\left(\frac{dw}{dt}\right)$$

in qua tempus t conſtans aſſumitur. Quare dum ſit formula $dS=P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ integrabilis, etiam haec aequatio integrationem admittet, motusque aſſumtus ſubſiſtere poterit: fietque

$$\frac{2gp}{h}=2gS-x\left(\frac{du}{dt}\right)-y\left(\frac{dv}{dt}\right)-z\left(\frac{dw}{dt}\right)+f:t.$$

Dummodo ergo vires extrinſecus tam vas quam fluidum ſollicitantes ita fuerint comparatae, vt talem motum in corpore ſolido producant etiam fluidum eundem motum recipiet; et quoniam illud infinitis modis fieri poteſt, ſiquidem illis viribus ſemper binas ſibi aequales et contrarias inſuper adiungere licet; ſi earum altera ſimul in fluidum ope piſtilli agat, quouis momento preſſio in fluido pro arbitrio immutari poteſt, quae mutatio in functione illa arbitraria $f:t$ continetur. Ex quo manifeſtum eſt euenire vtique poſſe vt maſſa fluida motu

praeſcripto feratur, et quomodocunque vires externae ad hoc requiſitae ſe habeant, ad quoduis tempus preſſionem per totam maſſam aſſignare licet, quae hoc caſu non ſolum ab actione S ſed etiam a coordinatis x, y, z pendebit.

Coroll. 1.

61. Si igitur fluidum vaſi, incluſum concipiatur, vt vas eo motu progreſſiuo feratur, quem celeritates u, v, w deſignant, fluidum reſpectu vaſis quieſcet, et cum eo quaſi corpus ſolidum conſtituere poterit ſpectari.

Coroll. 2.

62. Hoc tamen non obſtante preſſiones in fluido vtcunque poterunt eſſe variabiles, dum primum ab actione virium S, quae vtique a loco pendet, tum vero etiam a ternis variabilibus x, y, z, quae etiam pro eodem fluidi elemento iugiter mutantur, pendent; haecque poſtrema mutatio a defectu vniformitatis motus oriri eſt cenſenda.

Coroll. 3.

63. Praeter has autem mutationes, quae tam ab actione virium quam motus inaequalitate proueniunt, preſſio variationi cuicunque temporis ſucceſſu obnoxia eſſe poteſt. Interim tamen pro quouis tempore, ſi in vno loco preſſio conſtet, in omnibus reliquis aſſignari poterit.

Scho-

Scholion.

64. Dum ergo vires ſollicitantes P, Q, R ita ſint comparatae, vt formula $Pdx + Qdy + Rdz$ integrationem admittat, maſſa fluida omnes motus progreſſiuos recipere poteſt, qui in corpora ſolida cadunt; ſi modo denſitas fluidi fuerit conſtans, nullamque mutationem a viribus ſollicitantibus patiatur. Vtrum vero etiam motu gyratorio perinde ac corpus ſolidum ferri poſſit? hinc nondum patet; hancque inueſtigationem in caput ſequens reſeruamus, vbi quidem hoc argumentum generalius pertractabimus, cum enim in corpore ſolido circa axem fixum gyrante celeritates ſint ipſis diſtantiis ab axe proportionales in fluido aliae quoque proportiones locum habere poſſunt, quia hic nulla neceſſitas vrget, vt ſingula elementa eodem tempore ſuas reuolutiones abſoluant. In hoc autem capite reſtant eiusmodi caſus perpendendi, quibus inter ternas celeritates ratio quaedam conſtans praeſcribitur, dum earum quaelibet vtcunque variabilis aſſumitur cuiusmodi motus, quoniam a motu ſolidorum maxime abhorret noſtro inſtituto imprimis dilucidando inſeruiet.

Problema 30.

65. Si ternae cuiusque puncti celeritates u, v, w vbique et ſemper conſtantem inter ſe ſeruent rationem, conditiones ſcrutari, ſub quibus talis motus exiſtere queat, dum interea ſingula fluidi elemen-

elementa a viribus quibuscunque P, Q, R ſollicitantur.

Solutio.

Quoniam ternae celeritates u, v, w conſtantem inter ſe tenent rationem, ſingula fluidi elementa ſecundum eandem directionem mouebuntur, celeritate vtcunque variabili; qui motus vtrum et ſubquibus conditionibus locum habere poſſet, inueſtigari oportet. Introducta ergo noua variabili ϑ quae ſit functio quaecunque quatuor quantitatum x, y, z et t ſtatuamus

$$u = \alpha\vartheta,\ v = \beta\vartheta \text{ et } w = \gamma\vartheta$$

vt α, β, γ ſint quantitates conſtantes, atque vt primae aequationi ſatisfiat, oportet ſit

$$\alpha\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right) + \beta\left(\frac{d\vartheta}{dy}\right) + \gamma\left(\frac{d\vartheta}{dz}\right) = 0$$

Cum autem ſit $d\vartheta = dx\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right) + dy\left(\frac{d\vartheta}{dy}\right) + dz\left(\frac{d\vartheta}{dz}\right)$ erit

$$\alpha d\vartheta = -\beta dx\left(\frac{d\vartheta}{dy}\right) - \gamma dx\left(\frac{d\vartheta}{dz}\right) + \alpha dy\left(\frac{d\vartheta}{dy}\right) + \alpha dz\left(\frac{d\vartheta}{dz}\right)$$

ſeu $\alpha d\vartheta = (\alpha dy - \beta dx)\left(\frac{d\vartheta}{dy}\right) + (\alpha dz - \gamma dx)\left(\frac{d\vartheta}{dz}\right)$

cui aequationi ſatisfieri intelligitur ſi modo ϑ ſit functio binarum quantitatum variabilium $(\alpha y - \beta x)$ et $(\alpha z - \gamma x)$ vel harum $\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right)$ et $\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{z}{\gamma}\right)$, quibus etiam tertia t adiungi poteſt. Sit enim ϑ functio quaecunque harum trium variabilium

$$\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right);\ \left(\frac{x}{\alpha} - \frac{z}{\gamma}\right) \text{ et } t$$

quae

quae differentiata praebeat:

$$d\vartheta = L\left(\frac{dx}{\alpha} - \frac{dy}{\beta}\right) + M\left(\frac{dx}{\alpha} - \frac{dz}{\gamma}\right) + N\,dt$$

eritque

$$\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right) = \frac{1}{\alpha}L + \frac{1}{\alpha}M;\ \left(\frac{d\vartheta}{dy}\right) = -\frac{1}{\beta}L \text{ et } \left(\frac{d\vartheta}{dz}\right) = -\frac{1}{\gamma}M$$

vnde vtique fit $\alpha\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right) + \beta\left(\frac{d\vartheta}{dy}\right) + \gamma\left(\frac{d\vartheta}{dz}\right) = 0$.

Tali ergo functione pro ϑ ſtabilita colligetur:

$$U = \alpha\alpha\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right) + \alpha\beta\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{dy}\right) + \alpha\gamma\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{dz}\right) + \alpha\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)$$

quae ob $\alpha\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right) + \beta\left(\frac{d\vartheta}{dy}\right) + \gamma\left(\frac{d\vartheta}{dz}\right) = 0$ abit in $U = \alpha\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)$, ſimilique modo erit $V = \beta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)$ et $W = \gamma\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)$

Quocirca altera aequatio pro motu fluidorum inventa ita ſe habebit conſiderando tempus t conſtans

$$\frac{2g\,dp}{b} = 2g\,dS - (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz)\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)$$

quae ſi formula $dS = P\,dx + Q + dy\,R\,dz$ ſit integrabilis abſolute poſtulat vt etiam altera pars $(\alpha dx + \beta dy + \gamma dz)\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)$ integrationem admittat; quod fieri nequit niſi $\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)$ ſit functio harum duarum quantitatum $\alpha x + \beta y + \gamma z$ et t, quod cum ſuperiori conditione ſubſiſtere nequit niſi $\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)$ ſit functio ſolius temporis t. Quamobrem quantitas ϑ ita eſſe debet comparata vt ſit

$$\vartheta = \text{funct:}\left(\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right) \text{ et } \left(\frac{x}{\alpha} - \frac{z}{\gamma}\right)\right) + \Gamma : t$$

vt fiat $\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right) = \Gamma' : t$ tum autem reperietur:

$\frac{2gp}{b} = 2gS - (\alpha x + \beta y + \gamma z)\Gamma' : t + \Delta : t$ exiſtente $\Gamma' : t = \frac{d.\Gamma : t}{dt}$.

Coroll 1.

66. Elementum ergo fluidi in Z mouetur celeritate, quae eſt $= \mho\sqrt{(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)}$, eiusque directio ad axem OA inclinata eſt angulo cuius coſinus $=\frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)}}$, ad axem OB angulo cuius coſinus $=\frac{\beta}{\sqrt{(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)}}$ et ad axem OC angulo cuius coſinus $=\frac{\gamma}{\sqrt{(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)}}$.

Coroll 2.

67. Cum igitur motus directio vbique et ſemper ſit eadem omnia fluidi elementa ſecundum lineas rectas inter ſe parallelas proferuntur. Celeritas autem tam ratione loci quam temporis maxime variabilis eſſe poterit dummodo $\mho$ ſit eiusmodi functio qualem deſcripſimus.

Coroll 3.

68. Summa autem varietas hic locum invenire poteſt cum pro $\mho$ functionem quamcunque harum duarum quantitatum $\frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\beta}$ et $\frac{x}{\alpha}-\frac{z}{\gamma}$ accipere licet, eique inſuper functionem temporis quamcunque adiicere.

Coroll 4.

69. Ex ſuperioribus patet litteras U, V, W exprimere accelerationes motus ſecundum directiones coordinatarum x, y, z, vnde ſi fuerit $\Gamma:t=0$,

ideoque

ideoque $(\frac{d\,u}{d\,t})=0$, hae accelerationes euaneſcent, et quoduis elementum vniformiter in directum progredietur.

Scholion.

70. Hic motus ſatis ſimilis deprehenditur ei, quo flumina progrediuntur; ſi enim grauitas ſola in fluidum agat deorſum ſecundum ZY erit $P=0$, $Q=0$ et $R=-1$, ideoque $S=-z$ ac ſi porro functio a tempore pendens euaneſcat, vt ſit $u=$ funct: $((\frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\beta})$ et $(\frac{x}{\alpha}-\frac{z}{\gamma}))$ et $p=b(a-z)$, ſicque preſſio in plano horizontali ad altitudinem $z=a$ evaneſcit. Neque vero neceſſe eſt, vt fluidi directio ſit horizontalis ſed motus ſubſiſtere poteſt etiamſi fluidum ſiue ſurſum ſiue deorſum feratur, ſiue vtcunque obliquum teneat curſum quod quidem difficulter concipi poteſt, quia fluidum per ſuperficiem ſummam tranſire deberet. Verum hic aliud incommodum occurrit, quod in fluido vltra altitudinem a verſante preſſio euaderet negatiua, ideoque fluidi continuitas diſſolueretur, idque quaſi in guttas diſpergeretur. Initio autem iam monui haec principia, quae ſtabiliui ita continuitati fluidi eſſe innixa, vt vbi ea ceſſauerit illa non amplius locum habere poſſe: ex quo eiusmodi caſus, vbi fluidum continuum cohaerere deſierit, hinc ſunt excludendi. De cetero quando hic motum vt poſſibilem praedicamus, id ſemper ita eſt intelligendum, eiusmodi vires externas dari poſſe, quarum actione ille motus

 obtineri

obtineri queat. Verum problema hic tractatum generalius ſequenti modo proponi ac reſolui poteſt.

Problema 31.

71. Si ternae cuiusque fluidi elementi celeritates u, v, w ita ſint comparatae, vt ſit

$$u = \alpha\vartheta + \Gamma : t;\ v = \beta\vartheta + \Delta : t \text{ et } w = \gamma\vartheta + \Sigma : t$$

denotante ϑ functionem quamcunque conditiones ſcrutari ſub quibus talis motus ſubſiſtere poteſt, dum ſingula fluidi elementa a viribus quibuscunque P, Q, R ſollicitantur.

Solutio.

Hic perinde atque in praecedente problemate, prima aequatio generalis poſtulat, vt ϑ ſit functio harum duarum quantitatum $(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta})$ et $(\frac{x}{\alpha} - \frac{z}{\gamma})$, neque iam opus eſt ad eam quampiam functionem temporis t adiici, cum in hypotheſi iam tales functiones indefinitae ternis celeritatibus ſint adiunctae. Cum igitur hinc fiat $\alpha(\frac{d\vartheta}{dx}) + \beta(\frac{d\vartheta}{dy}) + \gamma(\frac{d\vartheta}{dz}) = 0$ obtinebitur $U = (\frac{du}{dt}) = \Gamma' : t$, $V = \Delta' : t$ et $W = \Sigma' : t$ ideoque poſita virium actione $\int(Pdx + Qdy + Rdz) = S$ aequatio ſtatum preſſionis declarans erit

$$\frac{2gp}{b} = 2gS - x\Gamma' : t - y\Delta' : t - z\Sigma' : t + \text{И} : t$$

Coroll. 1.

72. Hoc problema multo latius patet quam praecedens quod non ſolum labente tempore in eodem

eodem puncto directio motus vehementer variari poſſit ſed etiam eodem tempore in diuerſis fluidi elementis diuerſa ineſſe poſſit motus directio.

Coroll 2.

73. Eodem autem tempore, quo functiones $\Gamma:t$, $\Delta:t$, $\Sigma:t$ per totam fluidi maſſam, eosdem valores ſortiuntur, quoniam $\mathfrak{v}$ pendet a loco Z in diverſis punctis non ſolum celeritas ſed etiam directio motus maxime diſcrepans eſſe poterit: vbique tamen $\frac{u}{\alpha}-\frac{v}{\beta}$ et $\frac{u}{\alpha}-\frac{w}{\gamma}$ eosdem obtinebunt valores.

Scholion.

74. Multum autem hic motus adhuc differt a curſu fluminum; ſi enim formulas inuentas huc accommodare vellemus, primo vt motus in eodem puncto perpetuo prodeat idem, functiones temporis $\Gamma:t$, $\Delta:t$, $\Sigma:t$ quantitates conſtantes denotare deberent tum autem ob $S=-z$ oriretur $p=b(a-z)$, ſicque preſſiones in plano quodam horizontali euaneſcerent. Nullus ergo motus verticalis fluidi particulis tribui poſſet, quia alioquin fluidum ſupra ſuperficiem ſummam eſſet admittendum, foret ergo $w=0$, ideoque et $\gamma=0$ et $\Sigma:t=0$ vnde ſingula fluidi elementa in planis horizontalibus mouerentur neque propterea vlla hic decliuitas locum inueniret quae tamen fluminum proprietas eſſentialis. Ex quo inueſtigatio motus fluuiorum eſt res multo altioris

 indaginis

indaginis iudicanda. Interim tamen hic exemplum eiusmodi fluuii cernimus, cuius ſingulae particulae motu horizontali proferuntur, quarum autem directio aeque ac celeritas vtcunque ſint variabiles. Hoc tamen non obſtante preſſio vbique a ſola pendebit profunditate eodem plane modo, ac ſi fluidum ſtagnaret. Cum autem hoc caſu ſit $\gamma = 0$ fiet ϑ functio quaecunque harum duarum quantitatum $(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta})$ et z, ſicque in eodem plano horizontali quocunque eadem reperietur in omnibus punctis vbi $\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}$ eiusdem erit valoris, hoc eſt in omnibus lineis rectis ad axem OA inclinatis angulo cuius tangens $= \frac{\beta}{\alpha}$ quae ergo inter ſe erunt parallelae: et omnes fluidi particulae in tali recta ſitae pari motu ferentur: neque vero ſecundum hanc ipſam rectam progredientur, cum poſito $\Gamma : t = m$ et $\Delta : t = n$ eius celeritates ſint futurae $u = \alpha\vartheta + m$ et $v = \beta\vartheta + m$ vnde quidem celeritates erunt aequales, ſed directiones ab illa recta vtcunque declinabunt, niſi ſit $m:n = \alpha:\beta$. Dum igitur hoc modo ab iſta recta in aliam ſibi parallelam transferantur, vbi alia dabitur tam celeritas quam directio, euidens eſt fieri poſſe, vt ſingula fluidi elementa in lineis curuis motu maxime inaequabili deferantur. Vnde ſi via cuiusque particulae in plano horizontali ſit definienda ope aequationis inter binas coordinatas x et y, ob $dx = dt(\alpha\vartheta + m)$ et $dy = dt(\beta\vartheta + n)$ eliminando dt fit $\vartheta(\beta dx - \alpha dy) + ndx - mdy = 0$. Quia vero hic profunditas z eadem manet erit ϑ functio ipſius $\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}$

ſeu

ſeu $\beta x-\alpha y$, pro qua ſcribendo $\Theta':(\beta x-\alpha y)$ fit $nx-my+\Theta(\beta x-\alpha y)=$ Conſt. Functio ergo Θ ita accipi poteſt, vt data curua prodeat, quae ad externas particulas in hoc plano relatas figuram ripae flumen terminantis repraeſentabit ſicque ad ſingulas profunditates ad arbitrium figura ripae ideoque totius aluei cauitas formari poterit.

CAPVT IV.

DE FLVIDORVM HOMOGENEORVM NVLLIVS COMPRESSIONIS CAPACIVM MOTV GYRATORIO.

Problema 32.

75. Si fluidum ita circa axem fixum OC gyretur, vt ſingulorum elementorum motus ſit vniformis, celeritas vero functioni cuicunque diſtantiae ab eodem axe proportionalis, inueſtigare vtrum talis motus ſubſiſtere poſſit? Tab. V. Fig. 26.

Solutio.

Conſideretur fluidi elementum in Z, coordinatis $OX=x$, $XY=y$ et $YZ=z$ definitum, cuius ergo ab axe OC diſtantia eſt $ZV=\surd(xx+yy)$,

quae

quae ergo in motu non mutatur. Quoniam ergo elementum Z in plano ad axem A C normali gyratur circa punctum V, eius celeritas w euaneſcet, celeritates vero u et v ita ſunt comparatae, vt dum coordinatae x et y tempuſculo dt incrementa capiunt udt et vdt diſtantia $\sqrt{(xx+yy)}$ non varietur ex quo colligitur fore $ux+vy=0$. Statuatur ergo $u=Ty$ et $v=-Tx$, erit tota celeritas $=T\sqrt{(xx+yy)}$, ideoque per hypotheſin T functio ipſius $\sqrt{(xx+yy)}$; quare ponamus $T=\Gamma:\frac{xx+yy}{2}$ vt ſit $(\frac{dT}{dx})=x\Gamma':\frac{xx+yy}{2}$ et $(\frac{dT}{dy})=y\Gamma':\frac{xx+yy}{2}$ tum vero $(\frac{dT}{dz})=0$ et $(\frac{dT}{dt})=0$. His circa motum ſtabilitis videndum eſt, num is cum principiis motus fluidorum conſiſtere poſſit. Ac prima quidem aequatio ob $w=0$ poſtulat vt ſit $(\frac{du}{dx})+(\frac{dv}{dy})=0$; quod egregie euenit, cum ſit

$$(\frac{du}{dx})=y(\frac{dT}{dx})=xy\Gamma':\frac{xx+yy}{2} \text{ et } (\frac{dv}{dy})=-x(\frac{dT}{dy})=-xy\Gamma':\frac{xx+yy}{2}.$$

Porro autem pro altera aequatione habebimus pro $\Gamma':\frac{xx+yy}{2}$ breuitatis gratia ſcribendo L vt ſit $dT=Lxdx+Lydy$ fit

$$(\frac{du}{dx})=Lxy;\ (\frac{du}{dy})=T+Lyy;\ (\frac{dv}{dx})=-T-Lxx;\ (\frac{dv}{dy})=-Lxy$$

vnde concludimus:

$$U=TyLxy-Tx.(T+Ly)=-TTx$$
$$V=-Ty(T+Lxx)+Tx.Lxy=-TTy$$

et $W=0$. Quare cum formula $Udx+Vdy=-TT(xdx+ydy)$ vtique integrationem admittat, quia

quia T eſt functio ipſius $xx+yy$ altera aequatio pro motu inuenta integrabilis euadit, quemadmodum motus poſſibilitas poſtulat, et poſita virium actione $\int(Pdx+Qdy+Rdz)=S$ preſſio ita definitur vt ſit

$$\frac{2gp}{b}=2gS+\int TT(xdx+ydy)+f:t.$$

Omnino ergo motus deſcriptus in fluido ineſſe poteſt: quem ergo accuratius ſcrutari operae erit pretium. Sit diſtantia ab axe $ZV=\sqrt{(xx+yy)}=s$, ac ponatur integrale $\int TT(xdx+ydy)=\int TTsds=\Gamma:s$ eritque $TT=\frac{\Gamma's}{s}$, vnde celeritas qua elementum Z in diſtantia $ZV=s$ circa axem OC gyratur erit $=Ts=\sqrt{s\Gamma':s}$, et preſſio ibidem inuenitur $p=bS+\frac{b}{2g}\Gamma:s+f:t$.

Coroll. 1.

76. Si ergo elementi Z, cuius diſtantia ab axe gyrationis eſt $ZV=s$, celeritas ponatur $=\Delta:s$ fiet hinc $\Gamma':s=\frac{(\Delta:s)^2}{s}$ atque preſſio reperitur $p=bS+\frac{b}{2g}\int\frac{ds}{s}(\Delta:s)^2+f:t$. Quare ſi illa celeritas ſit $=\alpha s^n$ fit $p=bS+\frac{\alpha\alpha b s^{2n}}{4ng}+f:t$; vbi notandum caſu celeritatis conſtantis $=\alpha$ ob $n=0$ fieri $p=bS+\frac{\alpha\alpha b}{2g}ls+f:t$.

Coroll. 2.

77. Functio temporis indefinita ideo in preſſionem p ingreditur quoniam per vires externas

quouis tempore preſſio pro lubitu vel augeri vel diminui poteſt. Quicquid autem per vires externas effici poteſt, neceſſe eſt, vt id in ſolutione generali contineatur. Si ergo talis mutatio in viribus externis non admittatur, eam temporis functionem omitti oportet.

Coroll. 3.

78. Quicunque autem fingatur huiusmodi motus vorticoſus, vires ſollicitantes P, Q, R, quo modocunque etiam ſint comparatae, neutiquam impediunt, quo minus is ſubſiſtere queat, dummodo formula $Pdx + Qdy + Rdz = dS$ integrationem admittat, ſemper ſcilicet viribus externis in ſubſidium vocandis talis motus obtineri poterit.

Coroll. 4.

79. Quoniam tota fluidi maſſa circa axem fixum OC gyratur, a quo ſingula elementa eandem conſeruant diſtantiam, tota maſſa vaſi rotundo ſeu tornato incluſa concipi poteſt cuius axis ſit CO. Ad motum autem nihil refert, qualis figura ipſi tribuatur, dummodo omnes eius ſectiones ad axem OC normales fuerint circuli.

Scholion 1.

80. Quo haec clarius exponamus, fluidum ſoli grauitati ſubiectum ſtatuamus, cuius directio ſit CO, ſeu potius axis gyrationis OC ponatur norma-

normalis, vt ſit $S = -z$; vnde pro preſſione habebimus $p = b(h-z) + \frac{b}{2g}\int\frac{ds}{s}(\Delta : s)^2 + f : t$, exiſtente celeritate ad diſtantiam $= s$ ab axe $= \Delta : s$. Sumamus porro in viribus externis nullam euenire mutationem, vt $f : t$ in nihilum abeat. Repraeſentet ergo figura EEFF ſectionem verticalem vaſis per axem OC factam, in qua ſit GHG ſuperficies fluidi ſuprema, per quam preſſio euaneſcat, vnde ſumta diſtantia ab axe $OP = s$, erit altitudo $PM = h + \frac{1}{2g}\int\frac{ds}{s}(\Delta : s)^2$, qua aequatione figura ſuprema ſuperficiei GHG exprimitur. Sumta ergo celeritate gyrationis pro diſtantia $s = \alpha s^n$, fiet $PM = h + \frac{\alpha\alpha}{4gn}s^{2n}$, vnde ſuperficies GHG circa medium H erit excauata ibique minima altitudo $OH = h$ ſi quidem n ſit numerus poſitiuus. At vero ſi n ſit numerus negatiuus in medio H adeo in infinitum deprimetur et cauitatem circa axem relinquet. Caſu quidem quo $n = 1$, et totum fluidum eodem tempore reuoluitur, haec curua erit parabola circa axem HC deſcripta, cuius parameter eſt $= \frac{4g}{\alpha\alpha}$: ac ſi tempus vnius reuolutionis, quod eſt $\frac{2\pi}{\alpha}$ min. ſec. ponatur $= \theta''$ erit parameter $= \frac{g}{\pi\pi}\theta\theta$, et preſſio in $Z = b(h-z) + \frac{\pi\pi b}{\theta\theta}.\frac{ss}{g}$, vnde ſimul preſſio in latera vaſis innoteſcit, quae ita ſe habet, vt quo id fuerit amplius, eo futura ſit maior pro eadem altitudine. Quod ſi vero ſit $n = 0$ vel adeo numerus negatiuus, id incommodum naſcitur, quod elementa axi proxima reuolutiones ſuas tempore infinite Tab. VI. Fig. 27.

nite paruo conficerent; verum hoc incommodum ſponte tollitur, cum fluidum ſpatium vacuum circa axem relinquat cuiusmodi motum vt repraeſentemus ſit $n = -\frac{1}{2}$, vt in diſtantia ab axe $= s$ ſit celeritas $= \frac{\alpha}{\sqrt{s}}$ et preſſio $p = b(h-z) - \frac{\alpha\alpha b}{2gs}$; quae pro quauis altitudine z euaneſcit in diſtantia $s = \frac{\alpha\alpha}{2g(h-z)}$.
Tab. VI. Fig. 28. Spatium ergo circa axem $OH = h$ vacuum relictum FFGGII hyperbolis terminatur, exiſtente HP. $PM = \frac{\alpha\alpha}{2g}$, ſicque voraginem exhibet, ita vt per GI preſſio vbique ſit nulla: Extra hanc voraginem in Z vbi fluidum reperitur in Z erit preſſio $p = b\,HP - \frac{\alpha\alpha b}{2g.PZ}$ ſeu $p = \frac{\alpha\alpha b}{2g}\left(\frac{1}{PM} - \frac{1}{PZ}\right) = \frac{\alpha\alpha b.MZ}{2g.PM.PZ}$. Huiusmodi ergo voragines ſeu euripi oriuntur, quoties celeritas gyratoria circa axem vel eſt conſtans, vel in maioribus diſtantiis decreſcit, huicque cauſae ſine dubio euripi in mari ſunt adſcribendi.

Scholion 2.

Tab. V. Fig. 26. 81. Manente fluido ſoli grauitati expoſito, conſideremus axem, circa quem fluidum gyratur, eſſe horizontalem, et grauitatem dirigi ſecundum rectam OA, vt ſit $P = 1$, $Q = 0$ et $R = 0$, ideoque $S = x$. Sit porro in diſtantia $= s$ ab axe celeritas $= \Delta : s$, ac preſſio fiet $p = bx + \frac{b}{2g}\int\frac{ds}{s}(\Delta : s)^2$ omittendo $f : t$ dum a viribus externis omnem variationem remouemus. Contemplemur primo caſum
Tab. VI. Fig. 29. quo $\Delta : s = \alpha s$ et propterea $p = b(x-h) + \frac{\alpha\alpha b}{2g}ss$, qui ſtatus in fig. 29 repraeſentetur, vbi vaſis EF HG

GH axis OC intelligendus eſt horizontalis, recta vero OA verticalis. Sumatur in ea $OH = h$, et pro puncto N in plano verticali AOC, cuius diſtantia ab axe $PN = s$ erit preſſio $p = b(\frac{\alpha\alpha}{2g}PN^2 - QN)$, pro puncto autem M, quo illud N poſt ſemireuolutionem defertur erit $p = b(\frac{\alpha\alpha}{2g}PM^2 - QM)$ ſicque durante motu idem elementum diuerſas preſſiones patitur quae ne vnquam fiant negatiuae, conſtans $OA = h$ negatiue accipi poſſet. Caſu autem in figura repraeſentato, ne vsquam preſſio euadat negatiua: in vas inſeri oportet cylindrum ſolidum cuius ſemidiameter $= k$ tantus ſit, vt fiat $\frac{\alpha\alpha}{2g}kk - h - k = 0$ ita vt extra hunc cylindrum preſſio vbique fiat poſitiua et fluidum circa hunc cylindrum reuoluatur. Pro caſu autem $n = -\frac{1}{2}$, fit $p = b(x - h) - \frac{\alpha\alpha b}{2gs}$, vbi ergo h negatiuum capi conuenit, vt recta OA ſurſum vergere ſit cenſenda tum ergo erit preſſio in $N = b(QN - \frac{\alpha\alpha}{2g.PN})$ et preſſio in $M = b(QM - \frac{\alpha\alpha}{2g.PM})$, ex quo cylindrum tam craſſum inſeri oportet, vt eius ſemidiametro poſito $= k$ fiat $h - k - \frac{\alpha\alpha}{2g.k} = 0$ ſeu $hk - \frac{\alpha\alpha}{2g} = kk$, hinc $k = \frac{1}{2}h - \sqrt{(\frac{1}{4}hh - \frac{\alpha\alpha}{2g})}$, vnde patet hh maius eſſe debere quam $\frac{2\alpha\alpha}{g}$. Deinde vero quia in nimis magna diſtantia ab axe preſſio iterum fieret negatiua, etiam ſemidiameter vaſis excedere non debet hunc valorem $\frac{1}{2}h + \sqrt{(\frac{1}{4}hh - \frac{\alpha\alpha}{2g})}$. Ceterum notandum eſt, dum huiusmodi motus ſemel inceperit, eum deinceps ſubſiſtere poſſe, ac ne ob at-

tritum vaſis debilitetur, ipſum vas pari motu circa axem reuoluatur.

Scholion 3.

82. Si fluidum a nullis plane viribus ſollicitetur, vt ſit $S = 0$, tum poſita in diſtantia ab axe $= s$ celeritate $= \Delta : s$, erit preſſio in eadem diſtantia $p = bh + \frac{b}{2g}\int\frac{ds}{s}(\Delta : s)$, ſublata omni variatione in viribus externis. Hinc poſita celeritate $\Delta s = \alpha s^n$, prodit $p = b(h + \frac{\alpha\alpha}{4ng}s^{2n})$, et caſu $n = 0$ fit $p = b(h + \frac{\alpha\alpha}{2g}ls)$ At ſi $\Delta : s = \alpha s^{-m}$ erit $p = b(h - \frac{\alpha\alpha}{4mg}s^{-2m})$. Qui caſus ſeorſim euolui merentur.

I. Si $\Delta : s = \alpha s^n$, tum h eſſe poteſt vel > 0, vel $= 0$, vel < 0. Ac primo ſi $h > 0$, preſſio vbique erit poſitiua, et minima quidem in ipſo axe, a quo recedendo continuo creſcit; ſicque integer fluidi cylindrus hoc modo gyrari poterit. Idem deinde euenit etiam ſi $h = 0$, hoc tantum diſcrimine quod in ipſo axe preſſio euaneſcit. Tertio ſumto h negatiuo fit $p = b(\frac{\alpha\alpha}{2gn}s^{2n} - h)$ vnde cum preſſio prodeat negatiua quamdiu $s^{2n} < \frac{2gh}{\alpha\alpha}n$ hoc ſpatium circa axem vacuum relinquetur et fluidum circa hunc cylindrum cauum gyrabitur. His caſibus corpuſculum minimum fluido immerſum axem verſus vrgebitur vi $\frac{\alpha\alpha b}{2g}s^{2n-1}$.

II. Si $\Delta : s = \alpha$, et $p = b(h + \frac{\alpha\alpha}{2g}ls)$, preſſio circa axem eſt negatiua vsque ad diſtantiam $s = e^{\frac{-2gh}{\alpha\alpha}}$, vbi

vbi euaneſcit tam amplus ergo cylindrus circa axem vacuus relinquetur circa quem fluidum gyrabitur.
III. Si $\Delta : s = \alpha s^{-m}$ et $p = b(b - \frac{\alpha\alpha}{4mg} s^{-2m})$, patet conſtantem b neceſſario poſitiuam ſumi debere, et cylindrum circa axem vacuum relictum iri, cuius radius $= \sqrt[2m]{\frac{\alpha\alpha}{4mgb}}$ tum vero in fluido extra hunc axem preſſionem creſcere continuo, at in diſtantia infinita demum fieri $= bb$. Corpusculum huic fluido in diſtantia ab axe $= s$ immerſum ad axem pelletur vi $= \frac{\alpha\alpha b}{2g} s^{-2m-1}$, quae quadrato diſtantiae ab axe reciproce fit proportionalis ſi $m = +\frac{1}{2}$, et celeritas $= \frac{\alpha}{\sqrt{s}}$ ſeu reciproce in ſubduplicata ratione diſtantiae.

Problema 33.

83. Si fluidum gyretur circa axem quemcunque ſeu ternae cuiusque puncti celeritates u, v, w proportionales ſint his formulis $\alpha y - \beta z$, $\gamma z - \alpha x$, $\beta x - \gamma y$, conditiones explorare quibus talis motus in fluido exiſtere queat, dum fluidum a viribus quibuscunque P, Q, R ſollicitatur.

Solutio.

Ponamus ergo:

$$u = \mathrm{T}(\alpha y - \beta z);\ v = \mathrm{T}(\gamma z - \alpha x);\ w = \mathrm{T}(\beta x - \gamma y)$$

et

et formulae differentiales hinc natae erunt:

$\left(\frac{du}{dx}\right)=(\alpha y-\beta z)\left(\frac{dT}{dx}\right)$	$\left(\frac{dv}{dx}\right)=-\alpha T+(\gamma z-\alpha x)\left(\frac{dT}{dx}\right)$	$\left(\frac{dw}{dx}\right)=\beta T+(\beta x-\gamma y)\left(\frac{dT}{dx}\right)$
$\left(\frac{du}{dy}\right)=\alpha T+(\alpha y-\beta z)\left(\frac{dT}{dy}\right)$	$\left(\frac{dv}{dy}\right)=(\gamma z-\alpha x)\left(\frac{dT}{dy}\right)$	$\left(\frac{dw}{dy}\right)=-\gamma T+(\beta x-\gamma y)\left(\frac{dT}{dy}\right)$
$\left(\frac{du}{dz}\right)=-\beta T+(\alpha y-\beta z)\left(\frac{dT}{dz}\right)$	$\left(\frac{dv}{dz}\right)=\gamma T+(\gamma z-\alpha x)\left(\frac{dT}{dz}\right)$	$\left(\frac{dw}{dz}\right)=(\beta x-\gamma y)\left(\frac{dT}{dz}\right)$
$\left(\frac{du}{dt}\right)=(\alpha y-\beta z)\left(\frac{dT}{dt}\right)$	$\left(\frac{dv}{dt}\right)=(\gamma z-\alpha x)\left(\frac{dT}{dt}\right)$	$\left(\frac{dw}{dt}\right)=(\beta x-\gamma y)\left(\frac{dT}{dt}\right)$

Hinc prima aequatio $\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dw}{dz}\right)=0$ induit hanc formam:

$$(\alpha y-\beta z)\left(\frac{dT}{dx}\right)+(\gamma z-\alpha x)\left(\frac{dT}{dy}\right)+(\beta x-\gamma y)\left(\frac{dT}{dz}\right)$$

Cui aequationi ſatisfit ſi T fuerit functio quaecunque harum duarum quantitatum $\gamma x+\beta y+\alpha z$ et $xx+yy+zz$ nam ſi ponamus

$$dT=M(\gamma dx+\beta dy+\alpha dz)+N(xdx+ydy+zdz)$$

erit $\left(\frac{dT}{dx}\right)=M\gamma+Nx$; $\left(\frac{dT}{dy}\right)=M\beta+Ny$ et $\left(\frac{dT}{dz}\right)=M\alpha+Nz$.

Ad alteram ergo aequationem progrediamur; ac primo formulam $u\left(\frac{du}{dx}\right)+v\left(\frac{du}{dy}\right)+w\left(\frac{du}{dz}\right)$ euolvamus, quae factis ſubſtitutionibus abit in

$$TT(\alpha\gamma z+\beta\gamma y-\alpha\alpha x-\beta\beta x).$$

Quare cum T non inuoluat tempus t ob $\left(\frac{dT}{dt}\right)=0$ erit etiam $\left(\frac{du}{dt}\right)=0$, vnde fit

$$U=TT(\alpha\gamma z+\beta\gamma y-\alpha\alpha x-\beta\beta x)$$

$$V=TT(\beta\gamma x+\alpha\beta z-\gamma\gamma y-\alpha\alpha y)$$

$$W=TT(\alpha\beta y+\alpha\gamma x-\beta\beta z-\gamma\gamma z)$$

ac

ac propterea

$$Udx+Vdy+Wdz = TTd.(\alpha\gamma xz+\beta\gamma xy+\alpha\beta yz-\tfrac{1}{2}(\alpha\alpha+\beta\beta)xx$$
$$-\tfrac{1}{2}(\gamma\gamma+\alpha\alpha)yy-\tfrac{1}{2}(\beta\beta+\gamma\gamma)zz)$$
$$= -\tfrac{1}{2}TTd.((\alpha y-\beta z)^2+(\gamma z-\alpha x)^2+(\beta x-\gamma y)^2).$$

Quae expreſſio cum debeat eſſe integrabilis, neceſſe eſt vt TT ideoque et T ſit functio huius quantitatis

$$(\alpha y-\beta z)^2+(\gamma z-\alpha x)^2+(\beta x-\gamma y)^2$$

quae quia reducitur ad hanc:

$$(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)(xx+yy+zz)-(\gamma x+\beta y+\alpha z)^2$$

vtique in forma generali primae conditioni ſatisfaciente continetur. Quare ponendo

$$(\alpha y-\beta z)^2+(\gamma z-\alpha x)^2+(\beta x-\gamma y)^2 = (\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)ss$$

dummodo pro T ſumatur functio quaecunque ipſius s, altera aequatio hanc pro preſſione p ſuppeditat aequationem

$$\tfrac{2gp}{b} = 2gS+(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)\int TTsds+f:t$$

exiſtente S actione virium $\int(Pdx+Qdy+Rdz)$.

Coroll. 1.

84. Celeritas vero cuiusque particulae in Z eſt $=\surd(uu+vv+ww)=Ts\surd(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)$, vnde cum T ſit functio ipſius s, erit etiam functio ipſius celeritatis verae. Notandum autem eſt hanc quantitatem s deſignare diſtantiam puncti Z ab axe circa quem fit gyratio.

Coroll. 2.

85. Dummodo ergo ſingulae fluidi particulae vniformiter circa axem quemcunque reuoluantur, ita vt cuiusque celeritas ſit functioni diſtantiae proportionalis, huiusmodi motus in fluido locum habere poteſt.

Coroll. 3.

86. Ad motus realitatem autem porro requiritur, vt preſſio p valorem obtineat poſitiuum; ac ſi eueniat, vt eius valor vsquam ſit negatiuus, ibi ſpatium a fluido vacuum eſt ſtatuendum, quod ſit corpus ſolidum in eum locum collocando.

Scholion.

87. Problema quidem hoc non latius patet quam praecedens cum et hic motus fiat circa axem fixum, perindeque ſit qualis ſitus ipſi tribuatur; verumtamen quia formae pro celeritatibus u, v, w aſſumtae ſpeciem ſaltem mentiuntur generaliorem, earum euolutio non parum adiumenti ad huiusmodi inueſtigationes alias ſuſcipiendas afferre videtur. Quandoquidem nunc vniuerſa motus fluidorum Theoria ad reſolutionem huiusmodi aequationum eſt perducta, totumque negotium huc redit, vt pro u, v, w eiusmodi formae excogitentur, quibus primo formula $(\frac{du}{dx}) + (\frac{dv}{dy}) + (\frac{dw}{dz})$ euaneſcat, tum vero haec $U dz + V dy + W dz$ integrabilis euadat.

Hacte-

Hactenus autem hoc opus ita ſum aggreſſus, vt primum conditioni priori ſatisfecerim, quod adeo generaliſſime praeſtare licuit, tum vero hinc eiusmodi caſus elicere oportebat, quibus etiam poſteriori conditioni ſatisfieret, quae inueſtigatio caſibus euolutis non mediocriter illuſtrari et adiuuari videtur. Quodſi inuerſo ordine a conditione poſteriori exordiri velimus, opus multo magis difficile et arduum videatur; ita vt hic ſolutionem generalem vix exspectare liceat. Caſum tamen vehementer late patentem obſeruaui, quo poſterior conditio impletur; quod ſcilicet fit ſi formula $udx + vdy + wdz$ fuerit integrabilis, vbi imprimis notandum eſt hunc caſum in motu fluidorum per tubos, in quo fere ſolo definiendo Theoria adhuc fuit occupata locum habere; Vnde operae pretium eſſe arbitror iſti caſui euoluendo ſequens Caput deſtinare, idque eo magis quod eum ad omnis generis fluida extendere licet.

CAPVT V.

DE MOTV FLVIDORVM EO CASV QVO INTEGRABILIS EST HAEC FORMA.

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz.$$

Problema 34.

88. Si cuiusque fluidi elementi ternae celeritates u, v, w ita ſint comparatae, vt formula $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ integrationem admittat, aequationem, qua preſſio fluidi exprimitur euoluere.

Solutio.

Cum u, v, w ſint functiones quatuor variabilium x, y, z et t, quoniam formula $udx + vdy + wdz$ integrabilis ponitur, id intelligendum eſt, dum tempus t conſtans aſſumitur. Sit ergo I eius integrale completum, quod etiam tempore t pro variabili habito differentiatum praebeat:

$$d\mathrm{I} = udx + vdy + wdz + \Phi dt.$$

Hinc igitur, vt primo accelerationem:

$$\mathrm{U} = u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right)$$

elicia-

eliciamus, ad noſtrum inſtitutum plurimum conducet has formulas differentiales ad ſolum elementum dx reuocare quod facile fit; dum ex illius formae integrabilitate eſt

$$\left(\frac{du}{dy}\right)=\left(\frac{dv}{dx}\right);\ \left(\frac{du}{dz}\right)=\left(\frac{dw}{dx}\right) \text{ et } \left(\frac{du}{dt}\right)=\frac{d\Phi}{dx})$$

vnde conſequimur:

$$U=u\left(\frac{du}{dx}\right)+v\left(\frac{dv}{dx}\right)+w\left(\frac{dw}{dx}\right)+\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) \text{ ſimilique modo}$$
$$V=u\left(\frac{du}{dy}\right)+v\left(\frac{dv}{dy}\right)+w\left(\frac{dw}{dy}\right)+\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)$$
$$W=u\left(\frac{du}{dz}\right)+v\left(\frac{dv}{dz}\right)+w\left(\frac{dw}{dz}\right)+\left(\frac{d\Phi}{dz}\right).$$

Cum iam poſita virium acceleratricium P, Q, R actione:

$$\int(P\,dx+Q\,dy+R\,dz)=S$$

et in fluidi elemento, quod conſideramus preſſione $=p$ et denſitate $=q$, hanc inuenerimus aequationem:

$$\frac{2g\,dp}{q}=2g\,dS-U\,dx-V\,dy-W\,dz$$

in qua tempus t conſtans aſſumitur, quoniam in hac hypotheſi eſt:

$$dx\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)+dy\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)+dz\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)=d\Phi$$

erit hac reductione in reliquis membris obſeruata

$$U\,dx+V\,dy+W\,dz=u\,du+v\,dv+w\,dw+d\Phi$$

quae forma cum ſit integrabilis habebimus:

$$2g\int\frac{dp}{q}=2gS-\tfrac{1}{2}(uu+vv+ww)+\Phi+f:t$$

quae aequatio locum habet quoties q fuerit functio ſolius preſſionis p; ſin autem inſuper ab alia cauſa pendeat, quo haec aequatio locum habere poſſit, neceſſe eſt vt q ſit functio cum ipſius p tum huius quantitatis $2gS - \frac{1}{2}(uu + vv + ww) + \Phi$ alioquin haec hypotheſis eſt excludenda.

Coroll. 1.

89. Cum vera elementi fluidi celeritas ſit $= \sqrt{(uu + vv + ww)}$ patet in hac hypotheſi preſſionem ita ab hac celeritate pendere, vt quo celerius fluidum mouetur, eo preſſio magis diminuatur, idque in ratione duplicata celeritatis.

Coroll. 2.

90. Quantitas Φ eatenus in hanc aequationem ingreditur, quatenus ternae celeritates u, v, w etiam a tempore pendent, ita vt in eodem ſpatii loco motus fluidi cum tempore varietur.

Coroll. 3.

91. Functio autem temporis inſuper accedens a ſola variatione virium externarum, quibus tota fluidi maſſa ſollicitatur, prouenit, quae cum ſit arbitraria, etiam hanc functionem ad circumſtantias accommodari oportet. In ipſo autem motu ea nihil turbat.

Scholion.

Scholion.

92. Hypotheſis haec tam late patet, vt fere omnes fluidorum motus, in quibus definiendis Auctores adhuc fuerunt occupati, in ſe complectatur; ex quo videri poſſet eam ad motum fluidorum prorſus eſſe neceſſariam, niſi iam caſus in praecedente capite occurriſſent, in quibus haec proprietas non deprehenditur. In probl. 32 enim vidimus motum ſubſiſtere poſſe exiſtente $u = Ty$, $v = -Tx$ et $w = 0$, dummodo T fuerit functio ipſius $xx + yy$; neque vero hic conditio noſtrae hypotheſeos, qua $udx + vdy = T(ydx - xdy)$ locum habet niſi ſolo caſu $T = \frac{1}{xx + yy}$, quo fit celeritas vera $\sqrt{(uu + vv)} = \frac{1}{\sqrt{(xx + yy)}}$; cum tamen reliquis caſibus motus aeque ſubſiſtere poſſit. Deinde ſi denſitas vtcunque a loco pendeat, ſeu calor fuerit maxime diuerſus in variis regionibus, eius varietas ſine dubio tam eſſe poterit irregularis, vt nullo modo tanquam functio quantitatis $2gS - \frac{1}{2}(uu + vv + ww) + \Phi$ ſpectari queat, neque propterea noſtra aequatio integrationem admittat, quod tamen ad motus realitatem omnino eſt neceſſarium. Neque hic vt ſupra de aequilibrio regerere licet, motum huiusmodi caſibus dari non poſſe, cum potius ob id ipſum quod aequilibrium ſit impoſſibile, neceſſario motus exiſtere debeat; motus igitur omnino alius ac ſecundum hanc hypotheſin eueniat neceſſe eſt, ex quo ea nonniſi ad certas motus ſpecies patere eſt

cenſen-

cenſenda. Tum vero quia eam ad primam conditionem nondum accommodauimus, ea adhuc noua limitatione indiget, quam in ſequente problemate inueſtigabimus.

Problema 35.

93. Si motus fluidorum ita ſit comparatus, vt formula $udx + vdy + wdz$ integrabilis exiſtit, eos caſus determinare quibus ſimul prima conditio ad motum requiſita adimpletur.

Solutio.

Cum denotante q denſitatem fluidi in eo loco, vbi ternae celeritates ſunt u, v, w prima motus conditio, quam denſitatis ratio ſuppeditauerat, poſtulat vt ſit

$$\left(\frac{d.qu}{dx}\right) + \left(\frac{d.qv}{dy}\right) + \left(\frac{d.qw}{dz}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0$$

Sit nunc vt ante I ea functio ipſarum x, y, z et t, ex qua fiat $dI = udx + vdy + wdx + \Phi dt$, et quia hinc eſt

$$u = \left(\frac{dI}{dx}\right);\ v = \left(\frac{dI}{dy}\right);\ w = \left(\frac{dI}{dz}\right)$$

aequatio illa euoluta perducetur ad hanc:

$$q\left(\left(\frac{ddI}{dx^2}\right) + \left(\frac{ddI}{dy^2}\right) + \left(\frac{ddI}{dz^2}\right)\right) + \left(\frac{dq}{dx}\right)\left(\frac{dI}{dx}\right) + \left(\frac{dq}{dy}\right)\left(\frac{dI}{dy}\right) + \left(\frac{dq}{dz}\right)\left(\frac{dI}{dz}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0.$$

Functionem ergo I neceſſario ita aſſumi oportet, vt huic aequationi ſatisfiat, quod eo difficilius praeſtatur,

ſtatur, ſi denſitas q a preſſione p pendeat, quia haec demum per alteram aequationem

$$\frac{2g\,dp}{q} = 2g\,dS - u\,du - v\,dv - w\,dw - d\Phi$$

definiri debet; quo ergo caſu illa aequatio difficillime reſoluetur. Interim quocunque modo has duas aequationes ſimul expedire licuerit, ſemper inde eiusmodi motus obtinetur, qui in fluido eius ratione denſitatis indolis, quae fuerit aſſumta locum habere poterit. Hanc ergo hypotheſin vix vnquam ad vſum reuocare licebit, niſi denſitas fluidi vbique et ſemper fuerit conſtans ſeu $q = b$, pro quo caſu aequationes noſtrae euadent:

$$\left(\frac{ddI}{dx^2}\right) + \left(\frac{ddI}{dy^2}\right) + \left(\frac{ddI}{dz^2}\right) = 0 \text{ et}$$

$$2gp = 2gbS - \tfrac{1}{2}b(uu + vv + ww - 2\Phi) + f:t.$$

Coroll. 1.

94. Poſita ergo denſitate conſtante $q = b$ ad ſolutionem requiritur inueſtigatio eiusmodi functionum I, vt ſit

$$\left(\frac{ddI}{dx^2}\right) + \left(\frac{ddI}{dy^2}\right) + \left(\frac{ddI}{dz^2}\right) = 0$$

tali autem functione inuenta tum demum celeritates innoteſcent $u = \left(\frac{dI}{dx}\right)$; $v = \left(\frac{dI}{dy}\right)$; $v = \left(\frac{dI}{dz}\right)$.

Coroll. 2.

95. Si ponamus $I = \Gamma : (\alpha x + \beta y + \gamma z)$, vbi quidem tempus t vtcunque immiſceri poteſt, haec

haec relatio inter α, β, γ oritur, vt eſſe debeat $\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = 0$; quod niſi vna imaginaria admittatur fieri nequit.

Coroll. 3.

96. Huic autem incommodo ratione functionis occurri poteſt, veluti ſi ponatur

$$I = e^{\alpha x + \beta y}(A \sin . z\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)} + B \cos z\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)})$$

$$\text{vel } I = e^{z\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}}(A \sin .(\alpha x + \beta y) + B \cos .(\alpha x + \beta y))$$

vbi conſtantes A et B tempus vtcunque inuoluere poſſunt.

Scholion 1.

97. Euidens eſt hos valores pro I datos maxime eſſe ſpeciales completus enim valor complecti deberet duas functiones arbitrarias, vtramque duarum quantitatum variabilium, dum valor coroll. 2. datus eſt vnica functio vnicae variabilis. Interim litterae α, β pro lubitu accipi poſſunt, vnde facile innumerabiles valores pro I exhibere licet. Quotcunque autem valores fuerint inuenti, ii inuicem additi idoneum ſemper valorem pro I praebent. Infiniti autem alii valores huiusmodi ſpeciales inueniri poſſunt, ſumendo functionem quamcunque quantitatis $\alpha x + \beta y + \gamma z$ exiſtente $\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = 0$, nullo reſpectu ad imaginaria habito, et cum tales functiones ſemper in forma $M + N\sqrt{-1}$ contineantur,

tur, inde ſemper infinitos valores pro I ſatisfacientes formare licet, cuiusmodi ſunt:

Ang. tang. $\frac{M}{N}$; $e^{\pm M}(A\, \text{coſ.} N + B\, \text{ſin.} N)$; $e^{\pm N}(A\, \text{coſ.} M + B\, \text{ſin.} M)$.

Quoniam ergo pro M et N facile infiniti valores aſſignari poſſunt, hinc infinities infinitos valores reales pro I colligere licebit; quae multitudo inſuper mutando pro lubitu quantitates α, β, γ, quarum ſemper binae reales accipi poſſunt, in immenſum multiplicabitur. Plurimum autem abeſt, quominus ſumma omnium huiusmodi valorum, pro valore generali ipſius I haberi queat.

Scholion 2.

98. Huiusmodi autem motus plerumque eiusmodi incommoda implicant, vt eorum ſimilitudo in mundo vix locum inueniat, propterea quod fluidum continuo in loca fertur, vbi preſſio fit negatiua, ideoque continuitas tollitur, tum vero vas ad id continendum adhiberi nequit, niſi non tantum ſimul moueatur, ſed etiam eius figura continuo mutetur. Quod vnico exemplo oſtendiſſe ſufficiet. Sit $\beta = 0$, capiaturque $I = A e^{\alpha x} \text{ſin.}\, \alpha z$ vt fiat $u = A \alpha e^{\alpha x} \text{ſin.}\, \alpha z$, $v = 0$ et $w = A \alpha e^{\alpha x} \text{coſ.}\, \alpha z$ hincque $uu + vv + ww = A A \alpha \alpha e^{2 \alpha x}$. Vrgeatur fluidum a ſola grauitate in directione ZY, eritque $S = b - z$, ex quo pro preſſione prodit $2gp = 2gb(b - z) - \frac{1}{2} A A \alpha \alpha b e^{2 \alpha x}$, ſiquidem eundem motus ſtatum perpetuo durare ponamus. Sit breuitatis gratia

 $A\alpha =$

$A\alpha = 2\sqrt{gh}$ et preſſio euaneſcet vbi $z = h(1 - e^{\alpha x})$.
Tab. VI. Fig. 30. Sumta ergo OX recta horizontali, in qua ſit $OX = x$, et verticalis deorſum vergens $XZ = -z$, linea curua OZ in qua preſſio euaneſcit erit logarithmica, et infra eam preſſiones ſequentur rationem profunditatum, ſupra eam vero erunt negatiuae, ibique ergo fluidi continuitas tollitur. Interim tamen in O vbi $x = 0$ et $z = 0$, fit $u = 0$ et $w = 2\sqrt{gh}$; ita vt hic fluidum ſurſum moueatur. In linea porro verticali OF ad profunditatem $OB = \frac{\pi}{\alpha}$ motus fiet deorſum pari celeritate $2\sqrt{gh}$; in D vero ſumta $OD = \frac{2\pi}{\alpha}$ iterum aeque celeriter ſurſum mouebitur. Tum vero ſumta profunditate $OA = \frac{\pi}{2\alpha}$ ob $\alpha z = -\frac{\pi}{2} = -90°$, ſolo motu horizontali $= \sqrt{2gh}$ ſecundum Aa feretur, in C vero ſumto $OC = 3OA$ ſecundum Cc, in E vero iterum ſecundum Ee. Simili modo res ſe habebit in reliquis rectis verticalibus verſus X ſumtis niſi quod celeritates continuo fiunt maiores. Ex quo intelligitur eiusmodi motum in nullo vaſe concipi poſſe, praeterquam quod fluidi continuitas in aſcenſu vltra curuam OZ ſoluitur, tum vero inſuper paſſim fluidum ſolutum ſe iterum continuo admiſcet, vbi ſcilicet infra curuam OZ deſcendit.

Scholion 3.

99. Vehementer autem difficile eſt huiusmodi motus, qui re ipſa exiſtere nequeunt, dignoſce-

re et ab aequationibus noſtris generatim ſeparare. Cuius incommodi cauſa praecipue in eo poſita videtur, quod celeritates, quibus ſingula fluidi elementa mouentur, ad ſpatii puncta reſtrinximus, quandoquidem quantitates u, v, et w perpetuo ad idem punctum Z referuntur, et quouis tempore eius particulae, quae in Z verſatur, motum declarant, in quo negotio ad vlteriorem progreſſum eiusdem particulae non amplius reſpicimus. Cum igitur in pluribus quaeſtionibus neceſſe ſit cuiusque particulae motum continuo proſequi, veluti ſi motus vndulatorius et quaſi vibratorius eſt inueſtigandus, eadem motus principia ad hoc inſtitutum accommodare conabor. Quo pacto id commodi aſſequemur, vt litterae peculiares celeritatibus deſignandis inſeruientes ex calculo elidantur earum vero loco aliae variabiles erunt introducendae, quae fluidi ſtatum ad certum tempus in ſe complectantur. In ſequente itaque capite hanc inueſtigationem ſum ſuſcepturus.

CAPVT VI.

DE MOTV FLVIDORVM EX STATV INITIALI DEFINIENDO.

Problema 36.

100. Dato fluidi ſtatu initiali quantitates variabiles deſcribere, ex quibus deinceps eiusdem fluidi ſtatum elapſo tempore quocunque definire oportet.

Solutio.

Tab. VI. Fig. 31. In ſtatu initiali pro quo ſumimus tempus $t=0$ conſideremus fluidi elementum quodcunque, quod ſit in puncto Z per ternas coordinatas $OX=X$, $XY=Y$ et $YZ=Z$ determinato quae ergo quam diu idem elementum in motu proſequimur, manent conſtantes; ſin autem ad alia fluidi elementa reſpicimus, vt quantitates variabiles erunt ſpectandae. Iam elapſo tempore t translatum ſit iſtud elementum ex Z in z, pro quo loco vocemus coordinatas $Ox=x$, $xy=y$, $yz=x$, quae ergo pro functionibus quatuor quantitatum X, Y, Z et temporis t ſunt habendae; Hinc iſtae coordinatae x, y, z ſi ſeruatis X, Y, Z iisdem ſolum tempus t varietur, totam viam ab elemento, quod initio erat in Z ſucceſſiue percurſam indicabunt. Ex quo ſi eius motus, dum per z tranſit,

tranſit, ſecundum coordinatas reſoluatur, erunt celeritates:

ſecundum $Ox = (\frac{dx}{dt})$; ſecundum $xy = (\frac{dy}{dt})$, ſec. $yz = (\frac{dz}{dt})$,

atque hinc porro accelerationes ſecundum easdem directiones habebuntur quae erunt:

$$\text{ſec. } Ox = (\frac{ddx}{dt^2}), \text{ ſec. } xy = (\frac{ddy}{dt^2}); \text{ ſec. } yz = (\frac{ddz}{dt^2})$$

Praeterea etiam perſpicuum eſt illas functiones x, y, z hac praeditas eſſe debere proprietate, vt euaneſcente tempore t fiat $x = X$, $y = Y$ et $z = Z$, ac facto $t = 0$, formulae modo exhibitae dabunt celeritates et accelerationes initiales eiusdem elementi dum adhuc erat in Z.

Denotet porro q denſitatem, quam noſtrum elementum elapſo tempore $= t$ in z habebit, eritque etiam q functio quatuor variabilium X, Y, Z et t, vnde ad quoduis tempus cuiusque elementi denſitatem definire licebit.

Sit denique p preſſio conueniens elemento in z verſanti elapſo tempore t atque etiam haec quantitas erit functio quatuor variabilium X, Y, Z et t.

His poſitis tota motus determinatio huc redit, vt quales ſint functiones iſtae quinque quantitates x, y, z, q et p quatuor variabilium X, Y, Z et t inueſtigetur.

Coroll.

Coroll. 1.

101. Cum x ſit functio quatuor variabilium X, Y, Z et t erit eius differentiale completum ſeu ex variatione omnium natum

$$dx = dX\left(\frac{dx}{dX}\right) + dY\left(\frac{dy}{dY}\right) + dZ\left(\frac{dx}{dZ}\right) + dt\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

quod idem ſimili modo de reliquis functionibus y, z, p et q eſt tenendum.

Coroll. 2.

102. Quod ſi idem elementum tempuſculo dt ex z in z' peruenire ponamus ob X, Y, Z pro conſtantibus habendas erunt coordinatae hunc locum z' determinantes:

$$Ox' = x + dt\left(\frac{dx}{dt}\right) : x'y' = y + dt\left(\frac{dy}{dt}\right) : y'z' = z + dt\left(\frac{dz}{dt}\right)$$

tum vero denſitas in $z' = q + dt\left(\frac{dq}{dt}\right)$, et preſſio ibidem $= p + dt\left(\frac{dp}{dt}\right)$.

Coroll. 3.

103. Sin autem quaeratur vbi poſt idem tempus t aliud elementum, quod initio erat in Z′ loco ipſi Z proximo deprehendatur, ac pro Z′ coordinatae ſint $X + dX$, $Y + dY$ et $Z + dZ$ ſi locus quaeſitus ſtatuatur in z' erit pro eo

$$Ox' = x + dX\left(\frac{dx}{dX}\right) + dY\left(\frac{dx}{dY}\right) + dZ\left(\frac{dx}{dZ}\right)$$

quod etiam tum de binis reliquis coordinatis $x'y'$ et $y'z'$ quam pro denſitate et preſſione eſt intelligendum.

Scholion.

Scholion.

104. Vt nunc tam denſitatis quam preſſionis variationem dum idem elementum fluidi tempuſculo dt vlterius progreditur, definire, queamus, neceſſe eſt vt ſimul in ſtatu initiali duo elementa proxima in Z et Z′ contemplemur eorumque ſitum mutuum poſt tempus t inueſtigemus. Hac enim ratione diiudicare licebit, quanto deinceps tempuſculo dt vel propius ad ſe inuicem accedant, vel longius recedant quia illo caſu denſitas creſcit, hoc vero decreſcit. Verum hic ipſe binorum elementorum acceſſus vel receſſus plurimum ab eorum ſitu mutuo pendent, fierique adeo poteſt, vt in eadem fluidi maſſa infinite parua bina ad ſe inuicem accedant, dum alia recedant. Quamobrem hoc iudicium eodem modo eſt inſtituendum, vti ſupra fecimus dum translatio cuiusdam maſſae infinite paruae conſideratur, in quo negotio tamen bina elementa proxima ſimul perpendi debent quod idem quoque ad preſſionis inueſtigationem requiritur quem in finem ſequens problema propono.

Problema 37.

105. Elapſo tempore t ſi detur denſitas q et preſſio p elementi in z verſantis, quod initio fuerat in Z, pro eodem tempore inuenire denſitatem et preſſionem alius elementi ipſi proximi in z'. Tab. VI. Fig. 31.

Solutio.

Pro loco elementi propoſiti in z ſint coordinatae $Ox = x$, $xy = y$, $yz = z$; pro elemento autem ipſi proximo in

z' ſint $Ox' = x + \alpha$, $x'y' = y + \beta$; $y'z' = z + \gamma$, exiſtentibus particulis α, β, γ infinite paruis. Iam pro loco Z vbi elementum z initio fuerat poſitis coordinatis $OX = X$, $XY = Y$ et $YZ = Z$, ſit Z' locus vbi alterum elementum z' initio haeſerat, pro eoque coordinatae $OX' = X + dX$, $X'Y' = Y + dY'$; $Y'Z' = Z + dZ$ quae differentialia iam dX, dY, dZ per illas particulas datas α, β, γ definiri oportet. Viciſſim autem ex 104 habemus:

$$\alpha = dX\left(\frac{dx}{dX}\right) + dY\left(\frac{dx}{dY}\right) + dZ\left(\frac{dx}{dZ}\right)$$

$$\beta = dX\left(\frac{dy}{dX}\right) + dY\left(\frac{dy}{dY}\right) + dZ\left(\frac{dy}{dZ}\right)$$

$$\gamma = dX\left(\frac{dz}{dX}\right) + dY\left(\frac{dz}{dY}\right) + dZ\left(\frac{dz}{dZ}\right)$$

Hinc ergo fit

$$\alpha\left(\frac{dy}{dZ}\right) - \beta\left(\frac{dx}{dZ}\right) = dX\left(\left(\frac{dx}{dX}\right)\left(\frac{dy}{dZ}\right) - \left(\frac{dy}{dX}\right)\left(\frac{dx}{dZ}\right)\right) + dY\left(\left(\frac{dx}{dY}\right)\left(\frac{dy}{dZ}\right) - \left(\frac{dy}{dY}\right)\left(\frac{dx}{dZ}\right)\right)$$

$$\beta\left(\frac{dz}{dZ}\right) - \gamma\left(\frac{dy}{dZ}\right) = dX\left(\left(\frac{dy}{dX}\right)\left(\frac{dz}{dZ}\right) - \left(\frac{dz}{dX}\right)\left(\frac{dy}{dZ}\right)\right) + dY\left(\left(\frac{dy}{dY}\right)\left(\frac{dz}{dZ}\right) - \left(\frac{dz}{dY}\right)\left(\frac{dy}{dZ}\right)\right)$$

Vnde ſi breuitatis gratia ponamus:

$$\left.\begin{array}{l} +\left(\frac{dx}{dX}\right)\left[\left(\frac{dy}{dY}\right)\left(\frac{dz}{dZ}\right) - \left(\frac{dz}{dY}\right)\left(\frac{dy}{dZ}\right)\right] \\ +\left(\frac{dx}{dY}\right)\left[\left(\frac{dz}{dX}\right)\left(\frac{dy}{dZ}\right) - \left(\frac{dy}{dX}\right)\left(\frac{dz}{dZ}\right)\right] \\ +\left(\frac{dx}{dZ}\right)\left[\left(\frac{dy}{dX}\right)\left(\frac{dz}{dY}\right) - \left(\frac{dz}{dX}\right)\left(\frac{dy}{dY}\right)\right] \end{array}\right\} = K$$

colli-

colligitur fore

$$dX = \frac{1}{K}\left\{\begin{array}{l} +\alpha\,[(\frac{dy}{dY})(\frac{dz}{dZ})-(\frac{dz}{dY})(\frac{dy}{dZ})] \\ +\beta[-(\frac{dx}{dY})(\frac{dz}{dZ})+(\frac{dz}{dY})(\frac{dx}{dZ})] \\ +\gamma[(\frac{dx}{dY})(\frac{dy}{dZ})-(\frac{dy}{dY})(\frac{dx}{dZ})] \end{array}\right\}$$

$$dX = \frac{1}{K}\left\{\begin{array}{l} +\alpha\,[(\frac{dz}{dX})(\frac{dy}{dZ})-(\frac{dy}{dX})(\frac{dz}{dZ})] \\ +\beta\,[(\frac{dx}{dX})(\frac{dz}{dZ})-(\frac{dz}{dX})(\frac{dx}{dZ})] \\ +\gamma[-(\frac{dx}{dX})(\frac{dy}{dZ})+(\frac{dy}{dX})(\frac{dx}{dZ})] \end{array}\right\}$$

$$dZ = \frac{1}{K}\left\{\begin{array}{l} +\alpha[-(\frac{dy}{dY})(\frac{dz}{dX})+(\frac{dy}{dX})(\frac{dz}{dY})] \\ +\beta\,[(\frac{dz}{dX})(\frac{dx}{dY})-(\frac{dx}{dX})(\frac{dz}{dY})] \\ +\gamma[(\frac{dx}{dX})(\frac{dy}{dY})-(\frac{dy}{dX})(\frac{dx}{dY})] \end{array}\right\}$$

Inuentis nunc his differentialibus pro loco z' habebimus

denſitatem $= q + dX(\frac{dq}{dX}) + dY(\frac{dq}{dY}) + dZ(\frac{dq}{dZ})$ et

preſſionem $= p + dX(\frac{dp}{dX}) + dY(\frac{dp}{dY}) + dZ(\frac{dp}{dZ})$.

Coroll. 1.

106. Quantitas illa K quae in his formulis denominatorem conſtituit facta euolutione ita exprimitur:

$$K = (\frac{dx}{dX})(\frac{dy}{dY})(\frac{dz}{dZ}) + (\frac{dz}{dX})(\frac{dx}{dY})(\frac{dy}{dZ}) + (\frac{dy}{dX})(\frac{dz}{dY})(\frac{dx}{dZ})$$
$$-(\frac{dx}{dX})(\frac{dz}{dY})(\frac{dy}{dZ}) - (\frac{dz}{dX})(\frac{dy}{dY})(\frac{dx}{dZ}) - (\frac{dy}{dX})(\frac{dx}{dY})(\frac{dz}{dZ})$$

quae expreſſio iam immunis eſt ab ordine coordinatarum.

Coroll. 2.

107. Si ad calculum contrahendum ponamus:

$$\left(\frac{dx}{dX}\right)=A;\ \left(\frac{dx}{dY}\right)=D;\ \left(\frac{dx}{dZ}\right)=G$$

$$\left(\frac{dy}{dY}\right)=B;\ \left(\frac{dy}{dZ}\right)=E;\ \left(\frac{dy}{dX}\right)=H$$

$$\left(\frac{dz}{dZ}\right)=C;\ \left(\frac{dz}{dX}\right)=F;\ \left(\frac{dz}{dY}\right)=I$$

magis perſpicua euadet haec forma:

$$K=ABC+DEF+GHI-AEI-BFG-CDH.$$

Coroll. 3.

108. His porro iisdem adhibendis ſignis obtinebimus

$$dX=\frac{\alpha(BC-EI)+\beta(GI-CD)+\gamma(DE-BG)}{K}$$

$$dY=\frac{\alpha(EF-CH)+\beta(AC-FG)+\gamma(GH-AE)}{K}$$

$$dZ=\frac{\alpha(HI-BF)+\beta(DF-AI)+\gamma(AB-DH)}{K}$$

Coroll. 4.

109. Quo hae formulae magis contrahantur, quandoquidem earum ampliſſimus erit vſus ponamus porro:

$$BC-EI=\mathfrak{A};\ GI-CD=\mathfrak{D};\ DE-BG=\mathfrak{G}$$

$$AC-FG=\mathfrak{B};\ GH-AE=\mathfrak{E};\ EF-CH=\mathfrak{H}$$

$$AB-DH=\mathfrak{C};\ HI-BF=\mathfrak{F};\ DF-AI=\mathfrak{I}$$

vt

vt habeamus

$$dX = \frac{\alpha\mathfrak{A} + \beta\mathfrak{D} + \gamma\mathfrak{G}}{K};\; dY = \frac{\alpha\mathfrak{H} + \beta\mathfrak{B} + \gamma\mathfrak{E}}{K};\; dZ = \frac{\alpha\mathfrak{F} + \beta\mathfrak{I} + \gamma\mathfrak{C}}{K}$$

Problema 38.

110. Elapſo tempore t, ſi elementum in z' ipſi elemento in z proximum concipiatur, huius elementi z' motum per ternas celeritates ſecundum coordinatarum Ox, xy et yz directiones exhibere.

Solutio.

Sint elementi in z ternae celeritates vt ſupra u, v, w, ac vidimus ex receptis hic denominationibus fore

$$u = \left(\frac{dx}{dt}\right),\; v = \left(\frac{dy}{dt}\right),\; w = \left(\frac{dz}{dt}\right)$$

eruntque hae celeritates pariter tanquam functiones quatuor variabilium X, Y, Z et t ſpectandae. Maneant iam vt ante puncti z' coordinatae $x + \alpha$, $y + \beta$, $z + \gamma$, ſitque Z' eius locus in principio, et pro eo differentialia dX, dY, dZ ex datis α, β, γ per problema praecedens determinentur: quo facto erunt puncti proximi z' celeritates

$$\text{ſec. } Ox' = u + dX\left(\frac{du}{dX}\right) + dY\left(\frac{du}{dY}\right) + dZ\left(\frac{du}{dZ}\right)$$

$$\text{ſec. } x'y' = v + dX\left(\frac{dv}{dX}\right) + dY\left(\frac{dv}{dY}\right) + dZ\left(\frac{dv}{dZ}\right)$$

$$\text{ſec. } y'z' = w + dX\left(\frac{dw}{dX}\right) + dY\left(\frac{dw}{dY}\right) + dZ\left(\frac{dw}{dZ}\right)$$

 atque

atque eliſis litteris u, v, w eae ita ſe habebunt

$$\text{ſec. } Ox' = \left(\frac{dx}{dt}\right) + dX\left(\frac{ddx}{dt\,dX}\right) + dY\left(\frac{ddx}{dt\,dY}\right) + dZ\left(\frac{ddx}{dt\,dZ}\right)$$

$$\text{ſec. } x'y' = \left(\frac{dy}{dt}\right) + dX\left(\frac{ddy}{dt\,dX}\right) + dY\left(\frac{ddy}{dt\,dY}\right) + dZ\left(\frac{ddy}{dt\,dZ}\right)$$

$$\text{ſec. } y'z' = \left(\frac{dz}{dt}\right) + dX\left(\frac{ddz}{dt\,dX}\right) + dY\left(\frac{ddz}{dt\,dY}\right) + dZ\left(\frac{ddz}{dt\,dZ}\right)$$

vbi loco dX, dY, dZ valores ante inuentos per α, β, γ ſcribi oportet.

Scholion.

Tab. V. Fig. 23 111. Transferamus haec ad figuram 23, vbi Z ſit id punctum quod modo in z (fig. 31) conſiderauimus, cuius ergo ternae celeritates ſunt $u = \left(\frac{dx}{dt}\right)$, $v = \left(\frac{dy}{dt}\right)$, $w = \left(\frac{dz}{dt}\right)$, loco puncti autem z' illi proximi ſucceſſiue conſideremus tria puncta L, M, N pro quibus ſit $ZL = \alpha$, $ZM = \beta$, $ZN = \gamma$ Pro puncto ergo L in valoribus ſupra pro differentialibus dX, dY, dZ inuentis poni debet $\beta = 0$, $\gamma = 0$ pro puncto M, $\alpha = 0$, $\gamma = 0$ et pro puncto N; $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Quare puncti L ternae celeritates

erunt	ſupra erat
ſec. $OX = \left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{\alpha\mathfrak{A}}{K}\left(\frac{ddx}{dt\,dX}\right) + \frac{\alpha\mathfrak{H}}{K}\left(\frac{ddx}{dt\,dY}\right) + \frac{\alpha\mathfrak{F}}{K}\left(\frac{ddx}{dt\,dZ}\right)$	$u + dx\left(\frac{du}{dx}\right)$
ſec. $XY = \left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{\alpha\mathfrak{A}}{K}\left(\frac{ddy}{dt\,dX}\right) + \frac{\alpha\mathfrak{H}}{K}\left(\frac{ddy}{dt\,dY}\right) + \frac{\alpha\mathfrak{F}}{K}\left(\frac{ddy}{dt\,dZ}\right)$	$v + dx\left(\frac{dv}{dx}\right)$
ſec. $YZ = \left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{\alpha\mathfrak{A}}{K}\left(\frac{ddz}{dt\,dX}\right) + \frac{\alpha\mathfrak{H}}{K}\left(\frac{ddz}{dt\,dY}\right) + \frac{\alpha\mathfrak{F}}{K}\left(\frac{ddz}{dt\,dZ}\right)$	$w + dx\left(\frac{dw}{dx}\right)$

Puncti

Puncti autem M celeritates erunt

$$\text{ſec. } OX = \left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{\beta}{K}\left[\mathfrak{D}\left(\frac{ddx}{dt\,dX}\right) + \mathfrak{B}\left(\frac{ddx}{dt\,dY}\right) + \mathfrak{I}\left(\frac{ddx}{dt\,dZ}\right)\right] \quad \Big| \quad u + dy\left(\frac{du}{dy}\right)$$

$$\text{ſec. } XY = \left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{\beta}{K}\left[\mathfrak{D}\left(\frac{ddy}{dt\,dX}\right) + \mathfrak{B}\left(\frac{ddy}{dt\,dY}\right) + \mathfrak{I}\left(\frac{ddy}{dt\,dZ}\right)\right] \quad \Big| \quad v + dy\left(\frac{dv}{dy}\right)$$

$$\text{ſec. } YZ = \left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{\beta}{K}\left[\mathfrak{D}\left(\frac{ddz}{dt\,dX}\right) + \mathfrak{B}\left(\frac{ddz}{dt\,dY}\right) + \mathfrak{I}\left(\frac{ddz}{dt\,dZ}\right)\right] \quad \Big| \quad w + dy\left(\frac{dw}{dy}\right)$$

ac denique puncti N celeritates

$$\text{ſec. } OX = \left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{\gamma}{K}\left[\mathfrak{G}\left(\frac{ddx}{dt\,dX}\right) + \mathfrak{F}\left(\frac{ddx}{dt\,dY}\right) + \mathfrak{C}\left(\frac{ddx}{dt\,dZ}\right)\right] \quad \Big| \quad u + dz\left(\frac{du}{dz}\right)$$

$$\text{ſec. } XY = \left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{\gamma}{K}\left[\mathfrak{G}\left(\frac{ddy}{dt\,dX}\right) + \mathfrak{F}\left(\frac{ddy}{dt\,dY}\right) + \mathfrak{C}\left(\frac{ddy}{dt\,dZ}\right)\right] \quad \Big| \quad v + dz\left(\frac{dv}{dz}\right)$$

$$\text{ſec. } YZ = \left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{\gamma}{K}\left[\mathfrak{G}\left(\frac{ddz}{dt\,dX}\right) + \mathfrak{F}\left(\frac{ddz}{dt\,dY}\right) + \mathfrak{C}\left(\frac{ddz}{dt\,dZ}\right)\right] \quad \Big| \quad w + dz\left(\frac{dw}{dz}\right)$$

His autem formulis notatis ſequens problema haud difficulter ſoluetur ſi problema 19 in ſubſidium vocemus

Problema 39.

112. Poſitis quae hactenus ſunt explicata, elementi fluidi figuram pyramidalem habentis ZLMN translationem tempuſculo dt factam inueſtigare et denſitatis incrementum definire. Tab. V. Fig. 23.

Solutio.

Problema hoc prorſus conuenit cum ſuperiori (12), vnde eandem quoque ſolutionem habebit, ſi modo quae hic in deſignatione ſunt mutata probe obſeruentur. Primo ſcilicet pyramidis latera, quae ibi erant dx, dy, dz hic ſunt α, β, γ; deinde celeritates u, v, w hic deſignantur per $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $\left(\frac{dz}{dt}\right)$, et formulae differentiales $\left(\frac{du}{dx}\right)$, $\left(\frac{dv}{dy}\right)$, $\left(\frac{dw}{dz}\right)$ ex §. praec.

facile

facile decerpuntur. Hinc cum iſtius pyramidis volumen in Z eſſet $= \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma$, poſt translationem eius volumen erit

$$\tfrac{1}{6}\alpha\beta\gamma + \tfrac{1}{6}\frac{\alpha\beta\gamma dt}{K}\left\{\begin{array}{l} +\mathfrak{A}\left(\frac{d\,d\,x}{dt\,dX}\right)+\mathfrak{H}\left(\frac{d\,d\,x}{dt\,dY}\right)+\mathfrak{F}\left(\frac{d\,d\,x}{dt\,dZ}\right) \\ +\mathfrak{D}\left(\frac{d\,d\,y}{dt\,dX}\right)+\mathfrak{B}\left(\frac{d\,d\,y}{dt\,dY}\right)+\mathfrak{I}\left(\frac{d\,d\,y}{dt\,dZ}\right) \\ +\mathfrak{G}\left(\frac{d\,d\,z}{dt\,dX}\right)+\mathfrak{E}\left(\frac{d\,d\,z}{dt\,dY}\right)+\mathfrak{C}\left(\frac{d\,d\,z}{dt\,dZ}\right) \end{array}\right\}$$

Dum autem haec pyramis erat in Z eius denſitas erat $= q$, poſt tempuſculum autem dt eiusdem particulae denſitas per hypotheſes hic factas eſt $q + dt\left(\frac{dq}{dt}\right)$. Quare cum vtrumque volumen per ſuam denſitatem multiplicatum eandem maſſam praebere debeat, ſequens hinc naſcitur aequatio denſitatis rationem determinans:

$$\frac{K}{q}\left(\frac{dq}{dt}\right).\left.\begin{array}{l} +\mathfrak{A}\left(\frac{d\,d\,x}{dt\,dX}\right)+\mathfrak{H}\left(\frac{d\,d\,x}{dt\,dY}\right)+\mathfrak{F}\left(\frac{d\,d\,x}{dt\,dZ}\right) \\ +\mathfrak{D}\left(\frac{d\,d\,y}{dt\,dX}\right)+\mathfrak{B}\left(\frac{d\,d\,y}{dt\,dY}\right)+\mathfrak{I}\left(\frac{d\,d\,y}{dt\,dZ}\right) \\ +\mathfrak{G}\left(\frac{d\,d\,z}{dt\,dX}\right)+\mathfrak{E}\left(\frac{d\,d\,z}{dt\,dY}\right)+\mathfrak{C}\left(\frac{d\,d\,z}{dt\,dZ}\right) \end{array}\right\} = 0$$

vbi litterarum maiuscularum hic occurrentium valores ex §§. 107 et 109 deſumi debent. Cum igitur inde ſit

$$\left(\frac{d\,d\,x}{dt\,dX}\right)=\left(\frac{dA}{dt}\right);\ \left(\frac{d\,d\,x}{dt\,dY}\right)=\left(\frac{dD}{dt}\right);\ \left(\frac{d\,d\,x}{dt\,dZ}\right)=\left(\frac{dG}{dt}\right)\ \text{etc.}$$

ſi loco litterarum germanicarum valores ex § 109 ſcribantur, erit

$$\frac{K}{q}\left(\frac{dq}{dt}\right)\left.\begin{array}{l} +(BC-EI)\left(\frac{dA}{dt}\right)+(EF-CH)\left(\frac{dD}{dt}\right)+(HI-BF)\left(\frac{dG}{dt}\right) \\ +(GI-CD)\left(\frac{dH}{dt}\right)+(AC-FG)\left(\frac{dB}{dt}\right)+(DF-AI)\left(\frac{dE}{dt}\right) \\ +(DE-BG)\left(\frac{dF}{dt}\right)+(GH-AE)\left(\frac{dI}{dt}\right)+(AB-DH)\left(\frac{dC}{dt}\right) \end{array}\right\}=0$$

quae

quae expreſſio ſi comparetur cum valore litterae K qui eſt

$$K = ABC + DEF + GHI - AEI - BFG - CDH$$

facile perſpicitur illius membrum poſterius reduci ad $(\frac{dK}{dt})$, ita vt iam ſolutio problematis perducatur ad hanc ſimplicem aequationem

$$\frac{K}{q}(\frac{dq}{dt}) + (\frac{dK}{dt}) = 0 \text{ ſeu } K(\frac{dq}{dt}) + q(\frac{dK}{dt}) = 0$$

vel ad hanc concinniorem $(\frac{d.Kq}{dt}) = 0$. Ex quo intelligimus K q eiusmodi eſſe functionem, cuius differentiale ex ſola variabilitate temporis t ortum euaneſcat, ſeu quae omni tempore maneat eadem. Manifeſtum ergo eſt hoc fieri non poſſe, niſi K q ſit functio tantum harum trium variabilium X, Y, Z tempore excluſo, vnde problematis ſolutio continebitur hac formula

$$Kq = f:(X, Y, Z).$$

Coroll. 1.

113. Quantitas K determinatur per conditiones quibus coordinatae x, y, z poſt tempus t a principalibus X, Y, Z in ſtatu initiali pendent, quemadmodum eius forma §. 106 exhibita declarat. Cum igitur quantitates x, y, z neceſſario tempus t inuoluant, id ita fieri neceſſe eſt vt ex forma K q temporis ratio penitus egrediatur.

Coroll. 2.

114. Quod ſi ergo denſitas fluidi q fuerit quantitas conſtans tum ipſa forma K a tempore debet eſſe immunis. Sin autem denſitas q fuerit variabilis eius quantitas ad quoduis tempus t aſſignari poterit, cum ſit $q = \frac{f:(X, Y, Z)}{K}$.

Coroll. 3.

115. Hic autem imprimis notari oportet, quantitatem q dum coordinatae principales X, Y, Z manent eaedem, perpetuo eiusdem fluidi elementi denſitatem exprimere; quod ergo elementum ſi nullum mutationem in denſitate patiatur, manebit q quantitas conſtans; etiamſi reliquae fluidi partes diverſas habeant denſitates.

Coroll. 4.

116. Si ergo fluidum ſit heterogeneum ſeu ex fluidis pluribus diuerſae naturae mixtum, haec ratio motum definiendi plurimum praeſtat praecedenti; quoniam ibi quantitas q non ad eandem fluidi particulam, ſed ad eundem locum refertur, ita vt omnium particularum, quae ſucceſſiue per idem punctum tranſeunt, denſitates exprimat.

Scholion 1.

117. In ſolutione huius problematis merito deſideratur, quod demum per plures ambages ad

poſtremam ſimplicitatem ſit perducta; et quia tandem quaſi caſu ad aequationem differentialem integrabilem eſt peruentum; nullum eſt dubium, quin alia detur via quae immediate ad iſtam formulam integralem perducat. In ambages autem illas ideo incidi, quod ſolutionem eodem modo, quo ſupra ſum vſus adſtruere volui, cum tamen ratio qua hic motum intuemur, aliam viam commonſtret ad ſolutionem perueniendi. Conſideretur enim ſtatim in ſtatu initiali molecula fluidi ſub figura pyramidali Z L M N, et quaeratur eius translatio tempore finito $= t$ facta. Tum igitur perueniat in ſitum $z\,l\,m\,n$, quae figura erit pariter pyramis vtcunque irregularis, ſi enim quis dubitet, an poſt tempus finitum $= t$ hedrae huius pyramidis etiamnunc pro planis tuto haberi queant? is priorem pyramidem Z L M N adhuc infinities minorem accipiat, et quantumuis ante hedrae fuerint conuexae ſeu concauae, nunc agnoſcere debebit, eas infinite propius ad planitiem reduci, atque adeo pro planis haberi oportere. Quoniam igitur ſtatim pyramidem principalem Z L M N infinite paruam aſſumimus, recte quoque in ſtatu translato figuram $z\,l\,m\,n$ pro vero pyramide habebimus. Iſtius ergo pyramidis $z\,l\,m\,n$ inueſtigetur volumen, quod, cum eius denſitas iam in z elapſo tempore $= t$ ſtatuatur $= q$, ſi per q multiplicetur, prodibit maſſa iſtius moleculae, quae quia perpetuo manet eadem, eiuſmodi ſit functio neceſſe eſt; quae a tempore plane non Tab. V. Fig. 23.

 pendeat;

pendeat; ſeu iſta maſſa erit functio trium quantitatum X, Y, Z tantum excluſo tempore t. Quare cum ſolutio praecedens tandem dederit $Kq = f:(X, Y, Z)$, perſpicuum eſt, ſi methodo hic indicata vtamur, volumen illius moleculae ipſi quantitati K proportionale inueniri debere.

Scholion 2.

118. Haec conſideratio omnino eſt digna, quam diligentius proſequamur. Poſito ergo pro pyramide principali $OX = X$, $XY = Y$, $YZ = Z$, tum vero $ZL = dX$, $ZM = dY$ et $ZN = dZ$, vt eius volumen ſit $= \frac{1}{6} dX\, dY\, dZ$; ſint pro puncto z in pyramide translata coordinatae $Ox = x$, $xy = y$ et $yz = z$. Nunc conſideretur, ſi punctum in ſtatu initiali, his coordinatis $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$ definiatur, id tempore t translatum iri in punctum his coordinatis $x + \alpha$, $y + \beta$, $z + \gamma$ definitum, dum ſit:

$$\alpha = A\,dX + D\,dY + G\,dZ;\quad \beta = H\,dX + B\,dY + E\,dZ;$$
$$\gamma = F\,dX + I\,dY + C\,dZ.$$

Hinc iam ex quaternis punctis pyramidis principalis, quaterna puncta translatae definiantur, quorum coordinatae ita ſe habebunt:

$$\text{pro } z \begin{cases} Ox = x \\ xy = y \\ yz = z \end{cases};\quad \text{pro } l \begin{cases} Or = x + A\,dX \\ rp = y + H\,dX \\ pl = z + F\,dX \end{cases}$$

pro

$$\text{pro } m \begin{cases} Os = x + DdY \\ sq = y + BdY \\ qm = z + IdY \end{cases} \text{pro } n \begin{cases} Ot = x + GdZ \\ to = y + EdZ \\ on = z + CdZ \end{cases}$$

Ex his iam colliguntur latera pyramidis translatae:

$$zl^2 = (AA + HH + FF)dX^2$$
$$zm^2 = (BB + II + DD)dY^2$$
$$zn^2 = (CC + GG + EE)dZ^2$$
$$lm^2 = (AdX - DdY)^2 + (HdX - BdY)^2 + (FdX - IdY)^2$$
$$ln^2 = (AdX - GdZ)^2 + (HdX - EdZ)^2 + (FdX - CdZ)^2$$
$$mn^2 = (DdY - GdZ)^2 + (BdY - EdZ)^2 + (IdY - CdZ)^2.$$

Hinc porro ſecundum praecepta §. 12 definiantur angulorum ad z coſinus:

$$\text{coſ.}\, lzm = \nu = \frac{AD + BH + FI}{zl.\, zm} dXdY$$
$$\text{coſ.}\, lzn = \mu = \frac{AG + EH + CF}{zl.\, zn} dXdZ$$
$$\text{coſ.}\, mzn = \lambda = \frac{DG + BE + CI}{zm.\, zn} dYdZ.$$

Quibus valoribus ſubſtitutis volumen pyramidis $zlmn$ deducitur =

$$\tfrac{1}{6} dXdYdZ \sqrt{\begin{cases} +(AA+HH+FF)(BB+II+DD)(CC+GG+EE) \\ -(AD+BH+FI)^2(CC+GG+EE) \\ -(AG+EH+CF)^2(BB+II+DD) \\ -(DG+BE+CI)^2(AA+HH+FF) \\ +2(AD+BH+FI)(AG+EH+CF)(DG+BE+CI) \end{cases}}$$

quae forma poſt ſignum radicale ſi euoluatur, praeciſe quadrato quantitatis K aequalis deprehenditur: ita vt hoc volumen ſit $= \frac{1}{6} K dXdYdZ$ eiusque

 propte-

propterea maſſa $=\frac{1}{8}KqdXdYdZ$, vnde quantitas Kq a tempore t neutiquam pendere debet.

Problema 40.

119. Si fluidum a viribus quibuscunque acceleratricibus P, Q, R ſecundum directiones ternarum coordinatarum ſollicitetur, aequationem inueſtigare, qua preſſio in ſingulis fluidi elementis determinatur.

Solutio.

Tab. V. Fig. 25. Elapſo tempore t conſideretur molecula fluidi quaecunque in Z, cui calculi gratia figura parallepipedi Z L M N $z\,l\,m\,n$ tribuatur, ac pro puncto Z poſitis coordinatis $OX=x$, $XY=y$, $YZ=z$ ſint latera huius parallepipedi $ZL=\alpha$, $ZM=\beta$, et $Zz=\gamma$, vt eius volumen ſit $=\alpha\beta\gamma$ et maſſa $=q\alpha\beta\gamma$. Iam poſita preſſione in $z=p$, quae eſt functio quantitatum X, Y, Z et temporis t, vbi X, Y, Z, ſunt coordinatae eius puncti, vbi elementum, quod iam eſt in Z initio erat ſitum. Quo igitur hinc preſſio in L definiatur cuius elementi coordinatae ſunt $x+\alpha$, y, z, videndum eſt, vbi hoc elementum initio fuerat, et ex praecedentibus eius loci coordinatae erant

$$X+\frac{\alpha(BC-EI)}{K};\; Y+\frac{\alpha(EF-CH)}{K};\; Z+\frac{\alpha(HI-BF)}{K}$$

vnde concludimus preſſionem in L fore:

$$p+\frac{\alpha(BC-EI)}{K}\left(\frac{dp}{dX}\right)+\frac{\alpha(EF-CH)}{K}\left(\frac{dp}{dY}\right)+\frac{\alpha(HI-BF)}{K}\left(\frac{dp}{dZ}\right)$$

cuius

cuius exceſſu ſupra preſſionem p in Z tota hedra L N l n ſecundum directionem A O vrgetur. Iſtius autem hedrae ſuperficies eſt $= \beta\gamma$, per quam ille exceſſus multiplicatus dat, vim motricem, haecque per maſſam $q\alpha\beta\gamma$ diuiſa vim acceleratricem. Quare cum noſtra molecula in directione O A ſollicitetur vi acceleratrice P, ſi ab hac illa auferatur remanebit vera vis acceleratrix ſecundum directionem A O. Cum ergo acceleratrio ſit $= (\frac{ddx}{dt^2})$, habebitur haec aequatio

$$(\tfrac{ddx}{dt^2}) = 2gP - \tfrac{2g(FC-EI)}{Kq}(\tfrac{dp}{dX}) - \tfrac{2g(EF-CH)}{Kq}(\tfrac{dp}{dY}) - \tfrac{2g(HI-BF)}{Kq}(\tfrac{dp}{dZ})$$

ſimilique modo pro duabus reliquis directionibus reperitur:

$$(\tfrac{ddy}{dt^2}) = 2gQ - \tfrac{2g(GI-CD)}{Kq}(\tfrac{dp}{dX}) - \tfrac{2g(AC-FG)}{Kq}(\tfrac{dp}{dY}) - \tfrac{2g(DF-AI)}{Kq}(\tfrac{dp}{dZ})$$

$$(\tfrac{ddz}{dt^2}) = 2gR - \tfrac{2g(DE-BG)}{Kq}(\tfrac{dp}{dX}) - \tfrac{2g(GH-AE)}{Kq}(\tfrac{dp}{dY}) - \tfrac{2g(AB-DH)}{Kq}(\tfrac{dp}{dZ}).$$

Introducendis ergo breuitatis ergo litteris germanicis ex §. 109 adipiſcimur has tres aequationes pro preſſione p definienda:

$$\mathfrak{A}(\tfrac{dp}{dX}) + \mathfrak{H}(\tfrac{dp}{dY}) + \mathfrak{F}(\tfrac{dp}{dZ}) = KqP - \tfrac{Kq}{2g}(\tfrac{ddx}{dt^2})$$

$$\mathfrak{D}(\tfrac{dp}{dX}) + \mathfrak{B}(\tfrac{dp}{dY}) + \mathfrak{J}(\tfrac{dp}{dZ}) = KqQ - \tfrac{Kq}{2g}(\tfrac{ddy}{dt^2})$$

$$\mathfrak{G}(\tfrac{dp}{dX}) + \mathfrak{E}(\tfrac{dp}{dY}) + \mathfrak{C}(\tfrac{dp}{dZ}) = KqR - \tfrac{Kq}{2g}(\tfrac{ddz}{dt^2}).$$

Vt hinc formulam $(\frac{dp}{dX})$ definiamus, multiplicemus primam per $\mathfrak{B}\mathfrak{C} - \mathfrak{E}\mathfrak{J} = AK$ ſecundam per $\mathfrak{E}\mathfrak{F} - \mathfrak{C}\mathfrak{H} = HK$, et tertiam per $\mathfrak{H}\mathfrak{J} - \mathfrak{B}\mathfrak{F} = FK$ ob

A $\mathfrak{A}$

$A\mathfrak{A} + H\mathfrak{D} + FG = K$ reperietur per KK diuidendo:

$$\left(\frac{dp}{dX}\right) = q(AP + HQ + FR) - \frac{q}{2g}\left(A\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) + H\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) + F\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)\right)$$

ſimilique modo elicitur:

$$\left(\frac{dp}{dY}\right) = q(DP + BQ + IR) - \frac{q}{2g}\left(D\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) + B\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) + I\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)\right)$$

$$\left(\frac{dp}{dZ}\right) = q(GP + EQ + CR) - \frac{q}{2g}\left(G\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) + E\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) + C\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)\right).$$

Multiplicetur porro prima per dX, ſecunda per dY, tertia per dZ; vt obtineatur differentiale preſſionis p, ſi tempus t conſtans ſtatuatur, et cum in eadem hypotheſi ſit:

$$AdX + DdY + GdZ = dx;\quad HdX + BdY + EdZ = dy \text{ et}$$
$$FdX + IdY + CdZ = dz$$

noſtrae tres aequationes in hanc vnam coaleſcent:

$$dp = q(Pdx + Qdy + Rdz) - \frac{q}{2g}\left(dx\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) + dy\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) + dz\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)\right)$$

in cuius integratione tempus t pro conſtante eſt habendum.

Coroll. 1.

120. Cum x, y, z ſint functiones ipſarum X, Y, Z et t, ſi ponamus differentiale completum $dx = AdX + DdY + GdZ + Ldt$ erit $\left(\frac{dx}{dt}\right) = L$ ideoque $\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = \left(\frac{dL}{dt}\right)$, loco dx autem in hac aequatione ſcribi oportet $AdX + DdY + GdZ$ quia in ea tempus conſtans aſſumitur.

Coroll.

Coroll. 2.

121. Ante autem vidimus, quomodocunque denſitas q ſit variabilis quantitatem K q tempus t non inuoluere. Cum autem actio S a loco in quo elementum fluidi poſt tempus t reperitur, pendeat, ea vtique tempus in ſe includet.

Scholion.

122. Quoniam etiam in hac ſolutione ad aequationem multo ſimpliciorem pertigimus, quam per calculi ambages expectare licebat, nullum eſt dubium quin etiam via faciliori et concinniori ad eandem ſolutionem pertingere liceat. Neque vero facile patet, quomodo ratiocinium eo perducens, dirigi conueniat, id quidem perſpicuum eſt formulam $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ exprimere differentiale actionis virium in elementum, cuius motum conſideramus, prorſus vti in methodo ſuperiori. Verum differentiale dp hic prorſus diuerſam habet ſignificationem, dum p hic eſt functio variabilium X, Y, Z et t, hincque ſumendo t conſtans computatur, dum ante p fuerat functio quantitatum x, y, z et t, ex cuius differentiatione ſumto quidem t item conſtante, differentiale dp capiebatur, quia vero hic ipſae coordinatae x, y, z iam tempus t inuoluunt, hoc differentiale ab illo prorſus diſcrepet neceſſe eſt. Tum vero etſi $(\frac{dx}{dt})$, $(\frac{dy}{dt})$, $(\frac{dz}{dt})$ celeritates quas ſupra u, v, w vocauimus, expri-

munt, tamen hae formulae $(\frac{ddx}{dt^2})$, $(\frac{ddy}{dt^2})$, $(\frac{ddz}{dt^2})$, plurimum diſcrepant ab $(\frac{du}{dt})$, $(\frac{dv}{dt})$, $(\frac{dw}{dt})$; denotant enim ipſas accelerationes, quas ſupra litteris U, V et W deſignauimus. Ratio autem diſcrepantiae manifeſta in eo eſt ſita, quod hic vniuerſum calculum ad longe alias quaternas variabiles referimus, atque ante fecimus. Vnde quidem ſtatim hoc commodi ſumus nacti, vt prior aequatio pro denſitate inuenta integrationem admiſerit, contra vero altera pro preſſione magis complicata videtur.

Problema 41.

Tab. VI. Fig. 31. 123. Dato fluidi cuiuscunque ſtatu initiali et viribus, quarum actionem ſuſtinet, inueſtigare motum quo deinceps feretur, eiusque ſtatum ad quodvis tempus.

Solutio.

In ſtatu initiali conſideremus fluidi particulam quamcunque in Z, cuius locus definiatur ternis coordinatis OX = X, XY = Y et YZ = Z: tum vero eiusdem particulae ſit denſitas = Q preſſio vero = P. Praeterea autem eius motus ita ſit comparatus, vt reſolutus praebeat celeritates ſecundum directiones OX = U, XY = V et YZ = W Cum igitur ſtatus initialis ſit cognitus, erunt Q, P, U, V, W functiones datae ternarum variabilium X, Y, Z. Elapſo iam tempore = t, eadem particula,

cula, quae initio erat in Z, peruenerit in z cuius locus ſimilibus coordinatis $Ox = x$, $xy = y$ et $yz = z$ definiatur, quae ergo ſpectandae ſunt vt functiones quatuor variabilium X, Y, Z et t, ita comparatae, vt poſito tempore $t = 0$, abeant in coordinatas initiales X, Y et Z, ex quo ſequitur eodem caſu $t = 0$ fore:

$$\left(\frac{dx}{dX}\right) = 1;\ \left(\frac{dy}{dX}\right) = 0;\ \left(\frac{dz}{dX}\right) = 0$$
$$\left(\frac{dx}{dY}\right) = 0;\ \left(\frac{dy}{dY}\right) = 1;\ \left(\frac{dz}{dY}\right) = 0$$
$$\left(\frac{dx}{dZ}\right) = 0;\ \left(\frac{dy}{dZ}\right) = 0;\ \left(\frac{dz}{dZ}\right) = 1.$$

Deinde vero eiusdem particulae, dum poſt tempus $= t$ per punctum z tranſit, eius ternae celeritates erunt

ſecundum $Ox = \left(\frac{dx}{dt}\right) = u$; ſec. $xy = \left(\frac{dy}{dt}\right) = v$; ſec. $yz = \left(\frac{dz}{dt}\right) = w$

vnde euaneſcente tempore t fiat neceſſe eſt $\left(\frac{dx}{dt}\right) = U$; $\left(\frac{dy}{dt}\right) = V$ et $\left(\frac{dz}{dt}\right) = W$

Statuatur porro particulae iam per z tranſeuntis denſitas $= q$ et preſſio $= p$, quae duae quantitates itidem erunt functiones quatuor variabilium X, Y, Z et t, ita comparatae vt poſito $t = 0$ fiat $q = Q$ et $p = P$.

Vires denique acceleratrices, quibus particula in z vrgetur reducantur ad has.

ſecundum $Ox = \mathfrak{P}$; ſecundum $xy = \mathfrak{Q}$; ſecund. $yz = \mathfrak{R}$.

 Quibus

Quibus poſitis euidens eſt cognitionem motus eo redire, vt quales hae quinque quantitates x, y, z, q et p ſint functiones quatuor variabilium X, Y, Z et t definiatur, haecque determinatio ex ſequentibus duabus aequationibus eſt petenda.

Pro priori quaeratur ex variabilibus x, y, z haec quantitas:

$$K = \begin{matrix} +\left(\frac{dx}{dX}\right)\left(\frac{dy}{dY}\right)\left(\frac{dz}{dZ}\right)+\left(\frac{dy}{dX}\right)\left(\frac{dz}{dY}\right)\left(\frac{dx}{dX}\right)+\left(\frac{dz}{dX}\right)\left(\frac{dx}{dY}\right)\left(\frac{dy}{dZ}\right) \\ -\left(\frac{dx}{dX}\right)\left(\frac{dz}{dY}\right)\left(\frac{dy}{dZ}\right)-\left(\frac{dz}{dX}\right)\left(\frac{dy}{dY}\right)\left(\frac{dx}{dZ}\right)-\left(\frac{dy}{dX}\right)\left(\frac{dx}{dY}\right)\left(\frac{dz}{dZ}\right) \end{matrix}$$

vnde ex ante notatis conſtat poſito $t = 0$, fore $K = 1$. Cum igitur viderimus in probl 39. durante motu pro eadem particula quantitatem Kq perpetuo eundem valorem conſeruare eius valor vtique illi aequalis eſſe debet, quem habebat initio poſito $t = 0$, tum autem fit $K = 1$ et $q = Q$. Quocirca prior aequatio motus determinationem continens erit

$$Kq = Q, \text{ ideoque } q = \frac{Q}{K}.$$

Alteram aequationem in probl. praec. elicuimus, vbi introducitur litera g altitudinem lapſus grauium tempore vnius minuti ſecundi deſignans, eum in finem vt tempus t in minutis ſecundis et celeritates per ſpatia vno minuto ſecundo percurſa exprimi queant. Hinc igitur altera aequatio motus determinationem continens erit:

$$\frac{2g\,dp}{q} = 2g(\mathfrak{P}dx+\mathfrak{Q}dy+\mathfrak{R}dz)-dx\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)-dy\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)-dz\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$$

in

in qua aequatione differentiali probe obſeruandum eſt, tempus t conſtans aſſumi ſolasque coordinatas initiales X, Y, Z vt variabiles tractari. Quare cum x, y, z inſuper tempus t inuoluant, earum differentialia dx, dy, dz huic conditioni conformiter ſunt capienda. Cum autem integrale fuerit inventum, loco conſtantis ei quamcunque temporis functionem adiici conueniet

Coroll. 1.

124. Quemadmodum poſterior aequatio ex tribus eſt nata, ita etiam tres continet determinationes, quibus efficiendum eſt vt ea integrabilis euadat. Adiuncta ergo priori, inſuperque ex natura fluidi relatione inter denſitatem et preſſionem, omnino quinque habentur determinationes, ideoque tot, quot opus eſt ad quinque functiones quaeſitas x, y, z, q, p definiendas.

Coroll. 2.

125. Integrali autem poſterioris aequationis inuento, ſi tum coordinatae X, Y, Z vt conſtantes ſpectentur, et ſolum tempus t variabile accipiatur, habebitur totus motus eius particulae fluidi, quae initio erat in Z; indeque ad quoduis tempus tam eius locus, et motus, quam denſitas et preſſio aſſignari poterit.

Coroll 3.

126. Si iſta particula, quae initio erat in Z nullam denſitatis mutationem admittat, perpetuo

erit $q = Q$ ideoque ex aequatione priori $K = 1$. Hinc ergo loco ipſius K valorem ſupra aſſignatum ſubſtituendo certa relatio functionum x, y, z definitur, quemadmodum ea a coordinatis principalibus X, Y, Z pendere debent.

Scholion 1.

127. Si alteram aequationem attentius contemplemur, ex eius forma coniicere licet quomodo ea ex theoria virium ſollicitantium ſit deducenda. In ſtatu enim initiali conſiderentur duo puncta ſibi proxima Z et Z′, quorum illud coordinatis X, Y, Z hoc vero iſtis $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$ determinetur. Iam elapſo tempore $= t$ haec duo puncta transferantur in z et z', illius coordinatis exiſtentibus x, y, z huius vero $x + dx, y + dy, z + dz$ vbi probe notetur, haec incrementa dx, dy, dz ex differentiatione functionum x, y, z, dum tempus t conſtans aſſumitur, eſſe capienda, ita vt ex ſola variabilitate coordinatarum principalium X, Y, Z reſultent. Vocetur nunc interuallum $zz' = ds$, per quod extenſa concipiatur molecula fluida figuram habens priſmaticam ſeu cylindricam, cuius baſis ſit $= \delta\delta$, eritque eius volumen $= \delta\delta ds$ et maſſa $= q\delta\delta ds$. Quoniam igitur preſſio in z ponitur $= p$ erit preſſio in $z' = p + dp$, denotante dp id differentiale functionis p, quod ex variabilitate ſolarum coordinatarum X, Y, Z naſcitur tempore t conſtante aſſumto. Haec ergo molecula zz' ab ex-

ceſſu

ceſſu preſſionis in baſi z' ſupra baſin z in directione $z'z$ vrgetur vi motrice $= \delta\delta dp$, quae per maſſam $q\delta\delta ds$ diuiſa dat vim acceleratricem $= \frac{dp}{q\,ds}$ ſecundum eandem directionem $z'z$. Cum vero adſint vires acceleratrices $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ ſecundum directiones Ox, xy, yz ex his colligatur vis ſecundum directionem zz' quae reperitur $= \frac{\mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}dy + \mathfrak{R}dz}{ds}$, ita vt iam tota vis acceleratrix ſecundum directionem zz' ſit $= \frac{\mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}dy + \mathfrak{R}dz}{ds} - \frac{dp}{q\,ds}$. Hac inuenta conſiderentur accelerationes motus, quas ſecundum directiones Ox, xy, yz vidimus eſſe $\left(\frac{d\,d\,x}{d\,t^2}\right)$, $\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right)$, $\left(\frac{d\,d\,z}{dt^2}\right)$; ex iisque colligatur acceleratio ſecundum directionem zz' quae prodit:

$$\frac{dx}{ds}\left(\frac{d\,d\,x}{d\,t^2}\right) + \frac{dy}{ds}\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right) + \frac{dz}{ds}\left(\frac{d\,d\,z}{d\,t^2}\right)$$

atque ex motus principiis hanc accelerationem aequalem eſſe oportet vi acceleratrici illi per $2g$ multiplicatae; hincque per ds multiplicando ipſa aequatio altera motus naturam continens oritur; quam ergo ſtatim ſine tantis ambagibus inuenire licuiſſet. In hoc autem fere inuſitato calculi genere maximi certe eſt momenti eandem aequationem plus vno modo elicuiſſe, cum hinc natura iſtius nouae analyſeos non mediocriter illuſtretur.

Scholion 2.

128. Quia hic motus tantum principia tradere conſtitui, breuibus ſaltem vſum harum formularum oſtendam. Primo igitur pro motu progreſſiuo ſeu parallelo ſingularum particularum ponamus:

$x = X$

$$x = X + L;\ y = Y + M;\ z = Z + N$$

exiſtentibus L, M, N eiusmodi functionibus ipſius temporis t tantum, quae facto $t = 0$ euaneſcant. Cum igitur ſit $(\frac{dx}{dX}) = 1$; $(\frac{dy}{dY}) = 1$; $(\frac{dz}{dZ}) = 1$, reliquae vero formulae differentiales omnes euaneſcant erit $K = 1$, et $q = Q$, vnde denſitas cuiusque elementi manet eadem; ſeu haec hypotheſis ad fluidum pertinet nullius compreſſionis capax: interim tamen ſi ex materiis heterogeneis conſtet, in ſtatu initiali Q ſpectari poterit vt functio ipſarum X, Y et Z. Agat ſola grauitas ſecundum directionem zy, vt ſit $\mathfrak{P} = 0$, $\mathfrak{Q} = 0$ et $\mathfrak{R} = -1$, eritque altera aequatio:

$$\frac{2g\,dp}{Q} = -2g\,dZ - dX.\frac{ddL}{dt^2} - dY.\frac{ddM}{dt^2} - dZ.\frac{ddN}{dt^2}.$$

quae aequatio vt poſſit integrari denſitas Q vbique debet eſſe eadem ideoque $Q = b$, atque integrale erit:

$$\frac{2g}{b}p = 2g(b - Z) - X.\frac{ddL}{dt^2} - Y.\frac{ddM}{dt^2} - Z.\frac{ddN}{dt^2} + f:t$$

niſi ergo motus ſit vniformis, ſuprema ſuperficies horizontalis non erit.

Deinde caſum perpendamus quo ſingula elementa circa axem verticalem in planis horizonti parallelis reuoluuntur. In hunc finem ſit angulus θ functio quaecunque temporis, t, et ſtatuatur:

$x = X\,\text{coſ.}\,\theta - Y\,\text{ſin.}\,\theta$; $y = Y\,\text{coſ.}\,\theta + X\,\text{ſin.}\,\theta$; $z = Z$ hinc ob

$(\frac{dx}{dX}) = \text{coſ.}\,\theta$; $(\frac{dx}{dY}) = -\text{ſin.}\,\theta$; $(\frac{dy}{dY}) = \text{coſ.}\,\theta$; $(\frac{dy}{dX}) = \text{ſin.}\,\theta$; $(\frac{dz}{dZ}) = 1$

colli-

colligitur $K = \cos.\theta^2 + \sin.\theta^2 = 1$. Quare vt ante denſitas ſtatuatur conſtans $q = Q = p$. Deinde reperitur:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = -(X\sin.\theta + Y\cos.\theta)\frac{d\theta}{dt};\ \left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = -(X\sin.\theta + Y\cos.\theta)\frac{dd\theta}{dt^2} + (Y\sin.\theta - X\cos.\theta)\frac{d\theta^2}{dt^2}$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = -(Y\sin.\theta - X\cos.\theta)\frac{d\theta}{dt};\ \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -(Y\sin.\theta - X\cos.\theta)\frac{dd\theta}{dt^2} - (X\sin.\theta + Y\cos.\theta)\frac{d\theta^2}{dt^2}$$

vnde facta ſubſtitutione fit altera aequatio

$$\frac{2g\,dp}{b} = -2g\,dZ + (YdX + XdY)\frac{dd\theta}{dt^2} + (XdX + YdY)\frac{d\theta^2}{dt^2}$$

vbi cum t et θ pro conſtantibus ſint habenda prodit integrando

$$\frac{2gp}{b} = 2g(b - Z) + XY,\frac{dd\theta}{dt^2} + \tfrac{1}{2}(XX + YY)\frac{d\theta^2}{ds^2} + f:t$$

Cum hic pro θ functionem quamcunque temporis accipere liceat hic motus multo latius patet eo, quem ſupra priorem methodum ſecuti euoluimus ex quo haec altera methodus inſigni vſu praedita eſt cenſenda.

Scholion 3.

129. Caſus hic allatos fuſius non proſequor, cum hic ideam tantum circa applicationem huius poſterioris methodi exhibere ſit propoſitum, praeterquam quod vberior euolutio tam iſtius quam praecedentis methodi inſignem analyſeos promotionem exigit, antequam quicquam cum ſucceſſu ſperare liceat. Cum enim haec vniuerſa analyſis circa functiones quatuor variabilium verſetur, dum ea pars quae in functionibus duarum tantum variabilium

conſiſtit; vix adhuc excoli eſt coepta: temere certe tam arduum negotium ſubito ſuſciperetur. Quod igitur quaſi per gradus aſcendendo ad hanc motus fluidorum inueſtigationem in genere tendamus, a caſibus facilioribus, vbi pauciores variabiles occurrunt inchoandum videtur. Atque hic ad geometriae ſimilitudinem Theoriam motus fluidorum in tres partes *linearem*, *planam* et *ſolidam* commodiſſime partimur; quarum binae priores, etſi per abſtractionem in ſubſidium tertiae ſunt formatae, tamen proprio vſu neutiquam deſtituuntur. Pleraque enim quae adhuc de motu fluidorum ſunt explorata ad fluxum per canales ſeu tubos referuntur, qui etſi non anguſtiſſimi aſſumi ſolent, tamen fluidum non aliter per eos moueri concipitur ac ſi tales eſſent, ſiquidem in ſingulis ſectionibus tranſuerſis nulla motus inaequalitas admittitur. Ita merito motum fluidi per huiusmodi tubos motum linearem appellare licet. Secunda pars eſt plana vel potius ſuperficialis, qua fluido moto quaſi duae tantum dimenſiones tribuuntur, dum ſcilicet tertia dimenſio nulli motus inaequalitati obnoxia conſideratur. His ergo duabus demum partibus accuratius euolutis tractationem plenam per omnes tres dimenſiones maiori fiducia adgredi poterimus.

PHYSICA.

PHYSICA.

MVS SVSLICA.

Auctore

A. I. GVELDENSTAEDT.

Inter notiſſimas *Muris* generis ſpecies, *Marmotam* loquor et *Cricetum*, quae in campis deſertis ſakaicenſibus frequentiſſime habitant, animal eiusdem generis minus cognitum verſatur, quod putaui digniſſimum, cui determinando temporis aliquantulum et laboris impendatur. Incolae harum regionum appellant idem Suslik, (Сусликъ) quod, nomine triuiale exinde formato, nobis audit: *Mus Suslica.* Animalculo, quod ſecundum Ill. LINNAEI placita, genuina *Muris* ſpecies eſt, multa cum *Criceto* alia plura cum *Marmota* communia ſunt; quod ceterum nec moribus, nec vitae genere ab iſtis valde alienum, attamen ita differens, vt ſpeciem diuerſiſſimam conſtituat. Differentiam enunciet Tab. VII.

DESCRIPTIO.

CAPVT obouatum, *fronte* et *vertice* depreſſo, plano; buccis ſubgibbis; *roſtro* obtuſiuſculo, craſſo, rotundato, ſubnudo; *labium ſuperius* bipartitum, *inferius* ſuperiore breuius; vtraque craſſa; *oris apertura* parua, triangularis, nec cauitas oris ampla, ſed *buccae ſaccatae*; *lingua* carnoſa, obtuſa, papillis ſetoſis obſita; *palatum* rugoſum.

 Den-

Dentes inciſiui quatuor, in vtraque maxilla duo; ſuperiores plani, approximati; inferiores duplo longiores, ſubulati, anterius conuexi, poſterius plani, leuiſſime incurui, dilatabiles: *canini* nulli: *molares* ab inciſiuis remoti 18. ſuperius vtrinque 5. inferius 4. *diſco* rugoſo, falcato, margine conuexo buccas et cruribus diuergentibus palatum reſpicientes in maxilla ſuperiore; in inferiore vice verſa; *radice* quadrifida, diuergente in alueolis.

Myſtaces per quinque ordines inter nares et oculos diſpoſitae; in 1. ordine 3; in 2do 4; in 3^tio^ 5, omnium longiſſimae; in 4to 4; in 5to tantum 3. *ſetae* ſupra cantum anteriorem oculi 4. vel 5. inter oculum et aurem plures detritae. *Narium* aperturae ſat magnae, ſemilunatae, oculos verſus recurvae, nudae. *Oculi* magni, prominentes, nigri; *palpebris* ciliatis; *ciliis* inferioribus duplo longioribus. *Auriculae* ſubrotundae, parum e vellere prominentes ſubpiloſae.

COLLVM breue, capitis craſſitudine.

TRVNCVS oblongus, cylindricus.

PEDES breues, fere inter ſe aequales; metatarſis incedentes; *palmae* nudae, verrucoſae, tetradactylae; *digito* ſecundo longiſſimo, extimo breviſſimo, primo et tertio longitudine intermedia, aequali; quibus accedit *vnguiculus pollicaris* latus, obtuſus, breuis, a terra eleuatus: *plantae* pentadactylae; digito intermedio maximo; primo et quinto mini-

minimis, aequalibus; ſecundo et quarto intermediis, pariter aequalibus; *vngues* digitorum omnium longi, acuti, ſubincurui, ſubtus carinati.

CAVDA pedum longitudine, piloſa, depreſſa, vt fere ſecundae ſpeciem referat.

PILI corporis rari, absque vellere, regidiuſculi in abdomine et cauda aliquantum longiores ac in dorſo; in pectore conniuentes in ſuturam pectoralem; *perinaeum* piloſum; *anus* nuda, rugoſa.

MAMMAE vtrinque ſex, duae ſc. pectorales, duae abdominales, totidemque inguinales; *area papillae* nudiuſcula.

GENITALIA: *labia vaginae*, ano proxima, longitudinalia, laxa, absque clitoride; *praeputium* in mare ſtrictum, vix pendulum, nec teſticuli apparentes.

COLOR: *Nigra* ſunt myſtaces, oculi, vngues; *albicantia* roſtrum, oculorum regio, gula pedes anteriores in latere poſteriori ad ipſam axillam et caudae apex; *cinereo-flaueſcentia* truncus ſubtus et pedes; *cinereo-fuſca* totum corpus ſuperius cum cauda, ita vt caput et cauda immaculata, reliqua autem *maculis rotundatis albicantibus* picta ſint.

STATVRA fere muris criceti, cui magnitudine cedit, muſtela erminea aliquantum maior.

DIMEN-

DIMENSIONES partium ad londinenſes longitudo ab extremo roſtri ad caudae finem	poll.	lin.
	9.	8.
—— a roſtro ad brachium - - - -	2.	6.
—— a brachio ad femur - - - -	4.	6.
—— a femore ad caudae radicem - -	—	10.
—— caudae - - - - - - - -	1.	10.
—— a labio inferiore ad clauiculam	2.	—
—— a clauicula ad proceſſum xyphoidem	1.	6.
—— a proceſſu xyphoideo ad praeputium	3.	2.
—— a praeputio ad anum - - -	—	9.
—— cruris - - - - - - - -	1.	9.
—— antibrachii - - - - - - -	1.	4.
—— plantae a calcaneo ad radic. digitorum	—	11.
—— palmae - - - - - - - -	—	6.
—— digiti medii plantae - - -	—	5.
—— —— ſecundi et quarti - - -	—	$4\frac{1}{2}$.
—— —— primi et quinti - - -	—	3.
—— —— palmae ſecundi - - -	—	5.
—— —— —— primi et tertii - -	—	4.
—— —— —— quarti - - - -	—	3.
—— vnguis digitorum longiſſimorum	—	3.
—— —— pollicaris palmae - -	—	1.
diameter rictus oris - - - - - -	—	8.
—— diſſepimenti narium - - - -	—	$1\frac{1}{2}$.
—— inter nares et oculos - - -	—	8.
—— inter oculos - - - - - - -	—	11.
—— inter oculos et aures - - -	—	6.
—— inter aures - - - - - - -	1	—

diame-

	poll.	lin.
diameter oculorum - - - - - -	—	5.
—— aurium - - - - - - -	—	2.
—— humeri - - - - - - -	1.	6.
—— lumborum - - - - - -	1.	6.
Peripheria abdominis - - - - -	5.	—

Deſcriptioni externarum partium ſubiungam.

ANATOMIAM.

Cutis totius corporis tenui muſculo ſubcutaneo cincta. Tunica interna oris inter maxillas et dentes molares reuoluitur retrorſum in *ſacculum* laxiſſimum, ad latera colli; vsque ad clauiculam decurrentem interne rugoſum, albidum, papillis exaſperatum, exterius, praeſertim ad fundum, cinctum *fibris* fortiſſimis *muſcularibus*, quae in vnum corpus collectae proceſſui coracoideo ſcapulae inſeruntur.

Cute ſoluta apparent ad latera colli proxime ad ſterno-cleido-maſtoideum muſculum *glandulae* magnae *collares*, adipe inuolutae, inde collum craſſum; *glandulae ſubaxillares* latae planae *glandulae mammarum* omne corpus inferius a clauiculis, vſque ad os pubis continua ſerie obducentes; *inguinales*, ob nimiam adipem, qua pudendorum regio ſcatet, vix conſpicuae, quod etiam de teſticulis valet, quanquam extremitate tuberculoſa extra foramen abdominis ouale promineant.

THORACIS cauitas pleura tenui obducta et *mediaſtino* tranſparente, ad marginem ſterni dextrum adhaerente, in duas cameras ſeparata. Omne ſpatium a clauiculis, vsque ad cordis baſin replet *thymus* etiam in adultis ſat magna, biloba glandula. *Pulmones* parui rubicundiliuidi; *dexter* trilobus, lobo infimo maiore, medio minimo; *ſiniſter* bilobus; inter cor et diaphragma ante oeſophagum adhuc duo lobuli pulmonales acceſſorii.

Cor pulmonibus interpoſitum, apice interſtitium 5 et 6 coſtae reſpiciens; *Pericardium* laxiſſimum pellucidum, margine dextro *Helmontii ſpeculo* adhaerens.

Ventriculus cordis ſiniſter pro exitu aortae, paruus, ſed parietibus et diſſepimento denſiſſimis; fere totum cordis corpus conſtituit; *ventriculus dexter* pro exitu arteriae pulmonalis, laxus, tenuiſſimus et fere pellucidus, dextro quaſi appendiculatus. *Auricula dextra* duplo amplior ſiniſtra. Ex arcu aortae tria vaſa prodeunt, arteria nimirum axillaris dextra, carotis dextra et inominata, ceu truncus communis carotidis et axillaris ſiniſtrae. Poſt arcum aortae *trachea* annulata; ad marginem ſiniſtrum tracheae *oeſophagus*, vertebris dorſi incumbens.

ABDOMEN muſculis oblique deſcendente, adſcendente, transuerſo et recto, vt in homine cingitur. *Diaphragma* latum in ambitu coſtis ſpuriis adhaerenti muſculoſum, appendicibus ad lumborum

borum vertebras decurrens; in diſco tendineum. *Peritoneum* tenue, leuiſſimum. *Omentum* magnum ab hepatis ſuperficie inferiore et a ventriculi arcu maiori per totum abdomen deſcendens, laxiſſimum, quam maxime adipoſum, pariter ac *meſenterium* et *meſocolon*, quod ad latera vtrinque latiſſimos appendices duplicatas, organa genitalia vtriusque ſexus inuoluentes demittit.

Hepar magnum, hypochondria et epigaſtrium occupans, quadrilobum, lobi duo dextri, duo ſiniſtri, *lobus dexter anterior* omnium maximus, hypochondrium dextrum replens, ſuperficie conuexa diaphragmati contiguus, ipſiquae ligamento lato adnexus, ſuperficie inferiore inteſtinis et margine ſiniſtro lobo ſiniſtro anteriori incumbens, margine anteriore bifidus, acutus, poſteriore obtuſus, integerrimus; *lobus dexter poſterior* bipartitus, lobulo inferiori reni dextro incumbens et concauitate ſua dimidium renem obtegens, cum quo per ligamentum hepatico-renale connexus; *lobus ſiniſter anterior* dextro anteriore minor, in hypochondrio ſiniſtro et epigaſtrio ſitus inter diaphragma et ventriculum, margine poſteriore obtuſiſſimo diaphragmati alligatus; inter hunc lobum et dextrum poſteriorem tranſit *vena caua*, *lobus ſiniſter poſterior* omnium minimus, bifidus, minorem ventriculi arcum concauum replens inter hunc et ſiniſtrum anteriorem foſſa pro *venae portarum* inſertione; *cyſtis fellea* inter fiſſuram mar-

 ginis

ginis anterioris lobi dextri anterioris ſita, fundo marginem coſtae ſeptimae reſpiciens, ceruice in *ductum choledochum* deſinens, qui proxime ad pylorum inteſtinum tenue petit, *arteria hepatica* lobo dextro anteriori in ſuperficie inferiore inſeritur, proxime ad exitum *ductus cyſtici.*

Lien oblongus, anguſtus, per laxam et adipe repletam omenti continuationem margini conuexo ventriculi in hypochondrio ſiniſtro alligatur.

Pancreas vix adeſt; niſi glandulas minores plures poſt ventriculum ſitas pro eo habeas.

Ventriculus bicruralis; *cardia* extremitati ſiniſtrae proxima, vt fundus tantummodo quaſi digiti apex promineat; a cardia abit arcus concauus minor ad *pylorum*, ſphinctere ligamentoſo prominentem; arcus inferior conuexus, duplo maior; *corpus* ventriculi oblongum, dilatatum, extremitatibus vtrinque aequaliter coarctatis.

Inteſtinum tenue aequale vbique, colo fere triplo longius, 30: pollices adaequans, meſenterio laxo, adipoſo annexum, regionem vmbilicalem, ventriculum et coecum inter, occupans, deſinit lateraliter in *coecum* lumine transuerſaliter bilabiato, in coeci cauitatem pendulo, valuulam conſtituente, quae vtrinque crura emittit in parte valuulae oppoſita concurrentia et annulum ſphinctericum intus pro-

prominentem, teretem, muſculoſo-ligamentoſum, cui colon per ſuturam extus conſpicuam adhaeret, ſimulantia. A tenuis inſertione deſcendit *coecum* quam maxime dilatatum, et ventriculo duplo amplius ad os iliacum dextrum, fundo ſuo totum hypogaſtrium ad os iliacum ſiniſtrum vsque replens. Ad alterum latus inſertionis tenuis proxime ad veſiculam felleam, in ſitu naturali oritur *colon*, deſcendens per regionem iliacam dextram ad os ilii, abhinc curuatura ſimpliciſſima et parti deſcendenti arctiſſime alligatum redeuns ad pylorum, dein inter ſuperficiem ventriculi poſteriorem et ſpinam dorſi regionem iliacam ſiniſtram ductu ſerpentino petens et tandem *S. romano* laxo, in oſſis ilii ſiniſtri ſuperficie formato, in rectum deſinens; interne coecum rugoſiſſimum pariter ac colon in ipſo initio, quod poſtea et interne et externe laeue. Poſt ſphincterem recti datur *anus acceſſorius*, ventricoſus, tribus ſinubus mucoſis, apice ſubcartilagineo, perforato, prominulo terminatis ſtipata; quos ſinus animal vexatum protrudit, vt *apertura ani tricuſpidata* appareat.

Renes duo; vtrinque vnus, inter ſecundam et tertiam lumborum vertebram ſitus, integer, ouatus, auellanae magnitudinis, cum *ſuccenturiatis* extremitati ſuperiori incumbentibus; ſiniſter a ventriculo depreſſus dextro profundior; *vreteres* e pelvi renali ad vertebrarum latera deſcendentes petunt *veſicam vrinariam*, ouatam, vtrinque liberam et peritonaeo obductam.

Genitalia in ſemina ita: *vaginae labia* rugoſa, laxa; *clitoris* nulla, ſed ad ipſum pronaum, perinaeum verſus, ſinus magnus, coecus, mucoſus, cui *apertura vrethrae* glandoſa oppoſita eſt; *vagina vteri* longitudinaliter rugoſa, laxa, terminata *orificio vteri* lacero, vix filo tenuiſſimo permeabili; *ceruix vteri* breuiſſimus bifurcatus in *cornu dextrum* et *ſiniſtrum* tenue, cylindricum, laxum membranaceum, minime rugoſum, tuberculoſum hinc inde in ſemina quae ante menſem peperit (forte a placentarum veſtigiis) alias laeue, inter laxiſſimam capſulam adipoſam ad renes vsque adſcendens ac in ipſa extremitate *ouariis* paruis, vix milii ſemen exſuperantibus, granuloſis auctum.

Genitalia maſculina: *penis* cum teſticulorum extremitatibus extra abdomen, ſed omnia tanta adipis copia obtecta, vt per cutem communem nil appareat. Fibrae oblique deſcendentis muſculi abdominalis continuant in ſacculum, ſine caeco tendineo extremitati inferiori teſticuli et epidydymidis adhaerentem; *tunica propria* teſticuli tendinoſo-membranacea, deſinit in latam duplicaturam ad marginem interiorem et epidydymidem teſticulo adnectit. *Epidydymis* in extremitate ſuperiore teſticuli incipit bulboſa, ſed ſtatim anguſtata deſcendit libere ad alteram teſticuli extremitatem, cui iterum arcte adhaeret dilatata et tandem ductu retrogrado deſinit in *vas deferens* anguſtiſſimum, vbique aequale, *veſiculas*

ſiculas ſpermaticas minutas et vix conſpicuas petens, quibuscum apertura communi hiat vtrinque ad latera capitis gallinaginis in vrethram. *Vrethra* eiusdem cum corporibus cauernoſis longitudinis et diametri, muſculoſa, ante veſicularum ſpermaticarum lumina duobus ſinubus a *proſtatis* bilobis, inter rectum et vrethram ſitis, prouenientibus perforata et abeuns infra oſſium pubis angulum in *corpus cauernoſum vrethrae*, quod in initio bulboſum, dein anguſtatum et foramine lacero terminatum, ad latera autem in *glandem penis* caudam verſus recuruam, et oſſiculum cylindricum, capitulo cartilaginco verſus vrethram nutante auctum, continentem deſinens. *Corpora cauernoſa penis* duo, longitudinis ſeſquipollicis, muſculis ſuis erectoribus et radicibus ipſis oſſium pubis cruribus adhaerentia; diſſepimento ligamentoſo ſeparata; intus celluloſa. PHYSIOLOGICIS nonnullis, quae mihi de *Suslica* innotuerunt, auctiorem reddam hiſtoriam huius animalculi. *Victitat Suslica* vegetabilibus, foliis praeſertim et ſeminibus; delectatur foliis iunioribus millefolii; colligit grana cerealia in ſacco buccali eaque in cauerna pullis praebet; pedibus poſterioribus inſiſtens ſaepius anterioribus cibum ori admouet; faeces excernit ſub forma ſcybalorum per anum acceſſorium formatorum.

Coïtum celebrant vnica vice per annum primo vere ad finem Martii poſt ſomnum brumalem.

Prae-

Praeterlapſis ſex a conceptione ſeptimanis parit foemina quatuor, vel ſex, vel octo pullos, pilis et oculis apertis gaudentes.

Ingreſſus tardus, ita vt in planitie effugiens facile ab homine capi poſſit. Sub terra *fodit* celerrime cauernam, corporis diametro proportionalem, per argyam vnam oblique deſcendentem, apertura nunc duplici, nunc ſimplici. Ante cauernae aperturam ſaepius *erecta* ſtat, murmura e longinquo percipiens circumſpicit et *ſonum fiſtularem* edit. Autumno appropinquante cauernas petunt gregatim, iisque obturatis alto ſomno ſepultae per quinque menſes hybernant; circulatione et ſecretionibus tunc tardiſſimis et fere ſuppreſſis vitam viuunt minimam. Feces in coeco colliguntur, quod ipſis hanc ob cauſam, adeo amplum contigit, valvula coeci, ſeu ſi mauis, coli ante deſcripta regreſſum fecum in inteſtinum tenue impediente; quo magis enim per fecum collectionem coecum extenditur, eo anguſtior redditur valuulae rima, cuius labia eo ipſo coeci parieti apprimuntur et regreſſum impoſſibilem reddunt.

Praedatur Suslica a falconibus, praeſertim a miluo; rarius ab hominibus propter pellem minus nobilem, ideoque ſat vili pretio venalem.

Habitat animal frequenter in campis vaſtiſſimis tanaicenſibus, praecipue vrbes *Woroneſch* et *Tanbov* inter, ſimul cum *Marmota* et *Criceto.*

Qui-

Quibus cum animalibus *Suſlica* quod reuera in multis conueniat, vt iam indicaui, patebit conferenti haecce animalia inter ſe ſecundum deſcriptionem nunc traditam. *Marmota* tamen multo magis affinis eſt *Suſlicae* ac *Cricetus*. In *Marmota* enim roſtrum, labia, lingua, dentes, palatum nares, oculi, aures, mammae, pedes, cauda et anus omnino ita ac *Suſlicae*; nec pili, nec color pilorum valde differunt, niſi in eo, quod dorſum *Suſlicae* albido maculatum ſit. Differt autem Marmota buccis a craſſiſſimo maſſetere protuberantibus, plane non ſaccatis; trunco laxiſſimo, ventricoſo, imaculato, magnitudine vel decies maiori.

In tanta animalium horum affinitate, inſufficiens eſt ad diſtinctionem nomen ſpecificum Marmotae: Mus cauda abbreuiata ſubpiloſa, auriculis rotundatis, buccis gibbis: ab *Ill.* LINNAEO in *Syſt. Nat.* 12ma Edit. p. 81. ſancitum, quia pariter *Suſlicae* reſpondet. Nomine ſpecifico:

MVS corpore fuſco-flaueſcenti, dorſo maculis rotundis albidis variegato; cauda pedum longitudine, depreſſa, piloſa; palmis tetradactylis; plantis pentadactylis:

diſtinguimus nos *Suſlicam* et a congeneribus reliquis, et a *Marmota*, quae nobis audit:

MVS corpore fuſco-flaueſcenti immaculato; cauda pedum longitudine, depreſſa, piloſa; palmis tetradactylis; plantis pentadactylis.

Inter viſcera *Suslicae* et *Marmotae* maior adhuc analogia; in thorace nulla differentia; et abdominis viſcera perfecte conformia, excepto hepate ac colo. *Hepar* enim in *Marmota* differt in eo, quod lobi dextri et anterior et poſterior integri ſint; ceterum *ſuslicae* hepati ſimillimum; in *colo* tandem loco vnicae curuaturae et duplicaturae, duae adſunt in *Marmota*, quarum altera regionem iliacam ſiniſtram occupat. Reliqua omnia, genitalia interna et externa in vtroque ſexu, ani ſinus etc. adeo conformia, vt plane non, niſi magnitudine differant. Monita omnia de vitae genere et moribus *ſuslicae*, ſi granorum collectionem excipis, valent etiam de *Marmota*.

Inter *Cricetum* et *Suslicam* minor eſt affinitas. Conueniunt aliquomodo quoad ſtaturam, perfecte pedibus, minus ſacco buccali. Muſculus enim ſacci buccalis *Criceti* alio loco ac in *Suslica* inſeritur; adhaeret nempe proceſſibus ſpinoſis 5. 6 et 7. vertebrae dorſi, inter trapezium muſculum et latiſſimum dorſi. Differt praeterea dentibus molaribus et cauda rotundata, abrupta, breuiſſima piloſa, mammis, quarum Cricetus modo duas inguinales habet, et praeſertim genitalibus maſculinis, quorum adeo ſingularis eſt conſtructio, vt propriam anatomicam expoſitionem, quam proxime dabo, expoſtulent.

Sufficiant haec de MVRE *Suslica*, cuius ſtaturam *icon*, quam fieri curaui, ſat accurate exprimit.

ANAS

ANAS NYROCA.

Auctore

A. I. GVELDENSTAEDT.

E numeroſiſſimo anatum genere migratorio plurimas ſpecies regiones tanaicenſes vidi ſalutantes. Habitant enim hic locorum per aeſtatem frequentiſſime ANATES, quae *Ill.* LINNAEO in *Syſtematis Naturae* 12ma *editione audiunt clypeata*, *ſtrepera*, *clangula*, *penelope*, *acuta*, *ferina*, *querquedula*, *crecca*, *boſchas*, *fuligula.* Quibus exceptis occurrit anatis ſpecies non infrequens, quam vix ab ornithologis determinatam inuenio, certe nullibi ſat diſtincte, vt dignoſci poſſit. Mearum igitur partium eſſe duxi, ſuccinctam huius anatis tradere deſcriptionem. Ruſſis audit Nyroc (Нырокъ) exinde nomen triuiale originem duxit.

DESCRIPTIO MARIS.

ROSTRVM depreſſum, conuexum, obtuſum, laeue, liuido-nigrum, capitis longitudine, latitudine vbique aequale; *mandibula ſuperior* inferiori longior et latior, vnguiculo obtuſo, ſubincuruo terminata; *mandibula inferior* recta; vtraque vtrinque dentibus paleaceis rigidis, breuibus armata.

LINGVA carnoſa, dupliciter vtrinque ciliata, apice lamelloſo, coarctato.

NARES ouatae, ſemitectae, peruiae.

OCVLI parui, vertici propiores; *iride* albicante; *pupilla* nigra.

CAPVT compreſſum, baſi latiori, vertice fornicato, obſcure caſtaneum, nitens.

COLLVM, quod attenuatum, PECTVS et HYPOCHONDRIA capiti concolores.

CERVIX et DORSVM atro-oliuacea, quo colore et colli intermedia attenuata pars in ceruicem deſinens tincta eſt.

VROPYGIVM atrum.

ABDOMEN ſericeo-albidum, ab apice plumarum albo, quae baſin verſus ex fuſco et albiolo variegate ſunt; *ani regio* fuſca; *criſſum* niueum.

ALAE paruae, ad digiti latitudinem cauda breuiores, dorſo concolores; *remiges* quo exteriores, eo longiores, quarum 1. 2. et 3. totum latus exterius et apex; 4. 5. et 6. margo tantum exterior cum apice; 7-20. apex tummodo oliuaceo-niger, reliqua omnia alba; 21-24. totae pariter ac remigum et axillae *tectrices* atro-oliuaceae; *ſpeculum alarum* album, antice poſticeque oliuaceo-nigrum; *margo axillarum* et alae *ſubtus* albae.

CAVDA

CAVDA breuis, ſubcuneata; *rectricibus* 14. acuminatis, atro-fuſcis.

PEDES natatorii, nigro-plumbei, cauda longiores, baſi nimirum phalangis ſecundae digiti medii caudae extremum attingentes; *digiti* quatuor, vnus poſticus, tres antici membrana nigricante connexi; *vngues* digitorum breues, rectiuſculi, acuti, nigri.

DIMENSIONES partium ad pedem londinenſem ita:	poll.	lin.
longitudo abapice roſtri ad caudae extremum	16.	8.
—— a vertice ad axillam alarum - -	6.	6.
—— ab axilla alarum ad earum extremum	7.	3.
—— ab extremitate alarum ad caudae apicem	1.	—
—— femoris - - - - - - - - -	3.	—
—— cruris - - - - - - - -	1.	6
—— digiti medii - - - - - -	2.	3.
—— —— exterioris - - - - - -	2.	—
—— —— interioris - - - - - -	1.	6.
—— —— poſtici - - - - - - -	—	8.
—— vnguis digiti medii - - - -	—	3.
reliquorum vngues in eadem ratione cum digitis decreſcunt.		
diameter roſtri longitudinalis ab angulo oris	2.	—
—— —— —— a baſi frontis - -	1.	8.
—— —— perpendicularis ad baſin -	—	9.

	poll.	lin.
—— —— diameter ad nares - - -	—	6.
—— —— —— ad apicem - - -	—	2.
—— inter apicem roſtri et marginem anteriorem nairum - - - -	1.	1.
—— narium longitudinalis - - -	—	4.
—— inter marginem poſteriorem narium et cantum anteriorem oculi - -	1.	1.
—— oculi - - - - - - - -	—	4.
—— capitis transuerſalis ad orbitas - -	—	9.
—— —— —— ad baſin cranii - -	1.	3.
—— —— perpendicularis a vertice ad baſin - - - - - -	1.	6.
—— —— longitutinalis a nucha ad frontem - - - - - -	2.	1.
—— corporis transuerſalis - - - -	3.	6.
—— —— perpendicularis - - - -	2.	6.
—— alarum expanſarum - - - -	24.	—

DESCRIPTIO FEMINAE.

Femina magis decolor; ea, quae in mare caſtanea in femina ſordide ferruginea ſunt; *abdomen* nebuloſo - albicans; *ani regio* dilutior fuſca ac in mare et *dorſum* ruffeſcens, reliqua omnia vt in mare. Quoad totam corporis longitudinem 8. lin mare breuior et pro hac ratione etiam in reliquis dimenſionibus vna alteraue linea deficit. Ex deſcriptionibus nunc de vtroque ſexu traditis conficio nomen ſpecificum *Nyrocae*:

ANAS

ANAS *ruffo - nigricans* , *abdomine* , *ſpeculo alarum* , *criſſoque albis.*

STATVRA *Anatis Nyrocae* perfecte cum *Anate Fuligula* LINNAEI conuenit, adeo vt icon *Fuligulae* etiam *Nyrocam* exprimat. Proximae certe ſibi hae ſpecies ſunt, quae etiam in ipſa partium tinctura multa communia habent; color enim caudae, alarum, alarumque ſpeculi, roſtri, pedumque in vtraque idem: diuerſas attamen et conſtantes, vt ex multifaria obſeruatione didici, ſpecies conſtituent. Differt enim *Fuligula mas* a *Nyroca mare* 1. capite criſtato; 2. capite et pectore atris non caſtaneis; 3. oculorum iride lutea, non alba; 4. plumis abdominis totis albis, non baſi variegatis; 5. hypochondriis abdomini albo, non pectori concoloribus; 6. ani regione alba, non fuſca; 7. criſſo nigro, non niueo.

Feminarum Fuligulae et *Nyrocae* ſimilitudo maior adhuc ac marium et vix habeo quo diſtinguam, cum criſta valde detrita et vix conſpicua in Fuligula emina, cuius capitis et pectoris tinctura fere eadem ac Nyrocae, quo accedit, quod hypochondria pectori fuſco - ferrugineo concolores et criſſum ex fuliginoſo et albicanti variegatum ſit. Rudimento criſtae nuchalis, iridibus luteis et criſſo nigricante attamen Fuligulam feminam a Nyroca femina attentus ac intelligens ſeparat.

Anas Nyroca *migratoria* auis aduenit medio Aprilis in hiſce regionibus Tanaicenſibus inter gradum 54 et 55 latitudinis borealis ſitis. Mas in *monogamia* vivit, nec feminam deſerit, ſed ea incubante excubias agit. Femina *ponit oua* 6 - 8, albida, immaculata in foſſula excauata loci eleuati inundatorum, iisque per Maium *incubat* ſola, marem arcens, ne oua diffringat et comedat, vt ſolet. *Victitant* vegetabilibus et praeſertim ſeminibus, vix piſcibus. *Caro* ſapida, ſat tenera. Haec ſunt, quae habui de Hiſtoria *Anatis Nyrocae* monenda.

SPALAX

SPALAX,
NOVVM GLIRIVM GENVS.

Auctore

A. I. GVELDENSTAEDT.

Exhibit d. 21. Sept. 1769.

GLIRES, zoologorum recentiſſimorum facile omnium conſenſu, ſalutantur *quadrupeda digitata, dentibus primoribus geminis, approximatis, magnis*, vix *labiis tegendis gaudentia, caninis omnino carentia et molaribus truncatis a primoribus remotis inſtructa.* Pro diuerſa dentium primorum figura, duce *illuſtriſſimo Equite Aurato a* LINNE, in varia genera diuiduntur numeroſae huius ordinis quadrupedum naturalis ſpecies, quas omnes ſat diſtincte notas comprehendunt genera *Linneana* 5. *Hyſtrix* ſcil. *Caſtor*, *Lepus*, *Sciurus*, *mus*, quibus nuperrime acceſſit *Noctilis*, quem attamen ad *veſpertilionem*, pace VIRI SVMMI, ablegare forte praeſtaret, ob palmas alatas, ceu criterium euidentiſſimum generis huius naturaliſſimi, cuius multo maior eſt vis ac dentium, qui et numero et figura et ſitu mire variant apud veſpertiliones.

Nullum horum generum intrare potuit animalculum in itinere per *Ruſſiam* nobis obuium, ad *Glires* omnino pertinens, vt ex ſubſequente den-

tium deſcriptione ſatis ſuperque patebit: ab *Hyſtrice* et *Caſtore* autem diuerſiſſimum, cum nec ſpinis nec cauda applanata ſquamoſa inſtructum ſit; a *Lepore* pariter alienum, cum nec dentes ſuperiores duplicati, nec in reliquo auricularum et artuum habitu vlla conuenientia adſit; a *Sciuro* tandem remotiſſimum per dentes huius primores compreſſos, per caudam laxam villoſam, omnemque vitae morumque rationem. Ad *muris* genus, praeſertim ſenſu latiſſimo, vt *ill.* a LINNE placuit, ſumtum proxime equidem accedit animalculum, ſed dentes, primores inferiores *minime ſubulati.* Medium quoad dentes, videtur inter *Cauiam* KLEINII, (ad quod genus optimum *Mures Porcellus*, *Aguti* et *Paca* LINNAEI pertinent) et inter reliquas ſpecies *Linneanas Muris*, genus proprium conſtituere, quod nobis audit:

SPALAX, cuius ſit character:

GLIS *dentibus primoribus in vtraque maxilla cuneiformibus, planis; roſtro proboſcoideo; pedibus pentadactylis; auriculis caudaque nullis.*

Eſſentia characteris huius generici, ſpeciebus, in poſterum forte detegendis accommodandi, ponitur in dentium primorum figura.

Veterum *Talpae* ſynonymon παρὰ τὸ σπᾶν, quod terram aſſidue vellicet animalculum, generi huic nouo impoſuimus, vt ipſo nomine et mores et affinitas cum *Talpa* indicentur. *Spalax* certe oculo-

oculorum minutie, auricularum defectu, pellis roſtrique ſtructura, corporis ſtatura ac moribus *Talpae* adeo ſimilis eſt, vt haud mirer, quod a SEBA, ab habitu ſeducto et dentes minus curante, *Talpa* dictus ſit; nam, ni fallor, *Spalax* noſter idem animalculum eſt, quod SEBAE *Talpa Sibirica* verſicolor, et *ill.* a LINNE, nomini et iconi SEBAE freto *Talpa ecaudata palmis tridactylis* audit.

Nil autem certo de ſynonymia determinare audemus, cum obſcura tantum idea reſtet iconis ante aliquot annos in SEBAE operibus perluſtratae, quae nunc in peregrinatione deficiunt, quo minus dubia remouere poſſemus. Quidquid ſit, animalculum zoologis adeo obſcure et falſo nomine notum eſt, vt pro nouo haberi poſſit, et adcuratiori determinatione quam maxime indigeat, quam dabimus, deſcriptionem concinnando, qua ſimul elucebit, quod non ſolum ab omni *Glirium* huc vsque noto genere differat, ſed etiam a *Talpa Europaea* LINNAEI et dentibus et canalis cibarii genitaliumque ſtructura, et diaeta, vt reliqua taceamus, diverſiſſimum ſit. Ob eximiam oculorum minutiem, quorum plane nulla in facie apparent veſtigia, ſit ipſi nomen triuiale: *Microphthalmus*.

SPALAX MICROPHTHALMVS.

DESCRIPTIO: *Caput* depreſſo-rotundatum, patelliforme, ipſo trunco fere latius; *roſtrum* car-

tilagineum, productum, rotundatum, ſuperne planum, inferne decliue, et naribus rotundis anguſtis perforatum, ad ipſos dentium primorum radices terminatum, eorumque gingiuam conſtituens, laeve, nudum, nigrum. Ad latera cartilaginis roſtri vtrinque excurrit, aures fere vsque, *linea eleuata* tactu craſſima, (quae muſculus roſtrum expandens) ſetis breuibus, rigidis horizontaliter patentibus obſita, qua pars capitis ſuperior ab inferiore ſeparatur; et ſupra et infra hanc lineam *myſtaces* plurimae, quae inferius ad rictum oris longiores et numero plures, ſparſae omnes.

Rictus oris paruus, vix digiti minimi apicem recipiens, longitudinalis magis ac transuerſalis; *Labium* enim *ſuperius* ad roſtri latera et dentium margines deſcendit et retrograditur ad labium inferius, et deſinit in iſtud vix angulum oris efformans, vtrinque prominulum, ſed ſtrictum, interſtitio lacunoſo nudo, dentium primorum ſuperficiei poſteriori et palato interpoſito. *Labium inferius* laxum, dentium primorum inferiorum, gingiuam profunde vaginans, ipſos dentes denudatos relinquens; vtrumque ſubpiloſum.

Lingua carnoſa, craſſa, plana, obtuſa, laeuis.

Dentes primores in vtraque maxilla duo; ſuperiores ſtatim ad roſtrum, nudi, approximati; firmi, anterius plani, poſterius baſin verſus ſub compreſſi, apicem verſus in aciem cuneiformem attenuati,

nuati, lati, recti; inferiores figura ſuperioribus ſimillimi, et latitudine, quae in toto dentis decurſu eadem, ipſis aequales, ſed quadruplo fere longiores, leuiſſime in arcum antrorſum protenſi, dilatabiles: *Canini* nulli: *molares* a primoribus remoti, vtrinque ſupra infraque tres, truncati, ſubcylindrici, minimi, vix e gingiuis prominentes.

Oculi plane nulli per cutem apparent, nec vllum foraminis veſtigium in cute caput obtegente detegendum, quod forte adeo anguſtum, vt omnem viſus aciem effugiat.

Auriculae pariter nullae; aperturae aurium ſimplices, ad latera capitis in eadem cum roſtro linea, pilis vndique tectae, et vix ac ne vix apparentes, annulo cartilagineo, interne cute piloſa veſtito, cinctae.

Setae ſupra et ante aurium aperturam vtrinque duae, detritae.

Collum breuiſſimum, ac vix vllum, nec trunco anguſtius, cylindricum.

Truncus cylindricus, elongatus, laxus, rectus, clunibus obtuſiſſimis, parum decliuibus, ecaudatis terminatus.

Pedes breues; poſteriores vix anterioribus longiores; debiles, piloſi, calcaneis incidentes, pentadactyli; digitis fiſſis, baſi ſubpalmatis, humano more inter ſe proportionatis, pollice tantum minus

 remoto,

remoto, in palma longioribus ſuperne ſubnudis, in planta breuioribus piloſis; palma plantaque inferne nudae, ſubtuberculoſae, anguſtae; vngues rectiuſculi, obtuſi, ſubtus concaui, in plantis longiores.

Cauda omnino nulla; ſupra ani aperturam papilla nudiuſcula, vix aciculae capitulum exſuperans, os coccygis terminans. *Anus* rugoſus, piloſus; *perinaeum* breuiſſimum, pubeſcens; *praeputium* prominulum ſtrictum, includens *glandem penis*, rubicundam, anterius ſubconuexam, integram, poſterius papillis duabus antrorſum recuruis obſitam, inter quas *vrethrae* apertura; *mammae* in mare nullae: in femina vtrinque duae, inguinales.

Pellis delicatula, pilis longiuſculis, vbique fere aequalibus, roſtro proximis breuioribus, molliſſimis, confertis, decumbentibus, retrorſum ſpectantibus, ſed in gula in vorticem, et in pectore in ſuturam conniuentibus.

Color ſetarum et myſtacum niueus: caput anterius et totum animal inferius griſeum, murini coloris; ſuperne totum griſeo-ruffum ſeu luteſcenti-rubicundum, baſi pilorum griſea, apice autem ruffeſcente; digiti albido-incarnati.

Dimenſiones ſecundum pedem londinenſem:	poll.	lin.
Longitudo animalis ab apice roſtri ad corporis extremum - - - - -	8.	6.
—— a maxilla inferiore ad proceſſum xyphoideum - - - - - -	3.	6.

Lon-

	poll	lin.
Longitudo a proceſſu xyphoideo ad praepu-tium – – – – – –	3.	6.
—— a praeputio ad ani aperturam – –	—	3.
—— pedum anteriorum a capite oſſis bra-chii ad digiti medii apicem – –	2.	3.
—— pedum poſteriorum a capite oſſis fe-moris ad apicem digiti medii – –	2.	6.
—— palmae a carpo ad apicem digiti medii	—	10.
—— plantae a calcaneo ad apicem digiti medii – – – – – –	1.	2.
	—	6.
—— digiti medii palmae – – – –	—	4.
—— vnguis digiti medii palmae – – –	—	1.
—— vnguis digiti medii plantae – –	—	$1\frac{1}{2}$.
Diameter transuerſalis roſtri – – –	—	8.
—— longitudinalis roſtri verticem verſus -	—	5.
—— capitis transuerſalis – – – –	1.	10.
—— inter aures – – – – –	1.	8.
—— inter humeros – – – – –	1.	8.
—— inter lumbos – – – – –	2.	
—— perpendicularis capitis a vertice ad maxillam inferiorem – – –	1.	4.
—— perpendicularis thoracis – – –	1.	4.
peripheria abdominis – – – – –	5.	3.
latitudo dentium primorum – – – –	—	$1\frac{1}{2}$.
longitudo primorum ſuperiorum – – –	—	2.
– – – – inperiorum – – –	—	7.

ANATOMIA *Spalacis Microphthalmi.*

I. *de oſſibus.*

Cum

Cum oſſa praeſertim ea capitis valde anomala ſint, vberiorem horum deſcriptionem tradere conſtituimus.

Os naſi vnicum planum, apice latiori et productiori, baſi anguſtiori ſubbifida, oſſibus roſtri per harmoniam interpoſitum, et cum oſſe frontis per ſuturam connexum; interne in medio ſpina longitudinali vomeri reſpondenti, ad latera proceſſibus conchoideis extrorſum curuatis, conchiliis inferioribus naſi incumbentibus auctum.

Oſſa roſtri appellamus oſſa duo incuruato-tuboloſa, vtrinque ad marginem oſſis naſi poſita, ac longitudinis eiusdem, ſuperne cum oſſe frontis, lateraliter cum margine interiore foraminis magni oſſis maxillaris ſuperioris, inferne cum corpore eiusdem oſſis cohaerentia, alueolos dentium primorum ſuperiorum conſtituentia. In ſpatio, oſſi naſi et roſtri oſſibus interpoſito, narium cauitates ſitae ſunt.

Oſſa frontalia duo in partem horizontalem et lateralem diuidenda: pars horizontalis vtriusque oſſis, per harmoniam ab ipſa ſutura ſagittali continuatam cohaerens, triangulum conſtituit, cuius baſis os naſi et oſſa roſtri, apex autem ſuturam ſagittalem oſſium parietalium reſpicit; pars lateralis oblique in foſſam zygomaticam deſcendens, inaequaliter quadrata, concaua, antice cum margine ſuperiore foraminis magni oſſis maxillaris et cum oſſe vnguiculari, inferne cum apophyſi alueolari oſſis maxil-

maxillaris et cum apice alae magnae oſſis ſphaenoidei, tandemque poſtice inferius cum parte ſquamoſa oſſis temporalis et ſuperius cum margine anteriore oſſis parietalis cohaerens.

Oſſa parietalia omnium oſſium cranii propriorum minima, quadrata, plana, angulo acuto in vertice conniuentia, ita vt margo interior multo altior ſit exteriori; hinc vertex linearis, ſutura ſagittali, vtraque oſſa parietalia combinante, exaratus; margo anterior cohaeret cum parte deſcendente oſſis temporalis, et poſterior per ſuturam lamdoideam cum oſſe occipitali.

Os occipitale oſſium capitis omnium maximum, in angulo ſemirecto a plano horizontali baſeos cranii ad verticem adſcendens, planum, ad trianguli ſphaerici figuram accedens, baſi verticem verſus ſpectans, et ad angulos in ſpinam producta, ſub qua ſutura qua cum oſſe temporali connectitur; apex truncatus, marginem ſuperiorem foraminis magni occipitalis conſtituens. Foramen magnum occipitale, tranſitui medullae ſpinalis arteriarumque ceruicalium inſeruiens, ad planum baſeos capitis perpendiculare. Apophyſis baſilaris cuneiformis, horizontalis, antice cum oſſe ſphaenoideo concreta, poſtice condylis, cartilagine obductis, verticaliter ſitis, et concauitati atlantis reſpondentibus terminata; ad latera condylorum apophyſes ſtyloideae breves, obtuſae; ante condylos inferne foramina condyloidea pro tranſitu neruorum lingualium.

Os temporale in duas portiones, in petroſam et ſquamoſam diuidendum: *pars petroſa*, qnae organi auditorii receptaculum, inferior et poſterior ſitu, facie ſuperiore plana, per ſuturam cum oſſe occipitali cohaerente, nuchae complementum vtrinque conſtituit; facies inferior partis petroſae convexa, ſubgloboſa, libere apophyſi baſilari oſſis occipitalis et alae magnae oſſis ſphaenoidei interpoſita, ſed cum parte poſteriore eminentiae articularis et cum foſſa articulari oſſis temporalis in pullis per ſuturam connexa, in adultis plane concreta; apophyſis in parte petroſa vnica maſtoidea; obtuſiſſima, tuberculoſa in ipſo angulo nuchae; foramina in parte petroſa tria, primum ſtylo-maſtoideum, proxime ante apophyſin maſtoideam, quod apertura exterior aquae ductus fallopii, pro tranſitu nerui acuſtici duri; ſecundum proxime ſupra proceſſum maſtoideum, quod foramen auditorium externum, pro inſertione meatus auditorii cartilaginei; tertium in extremitate interiore petrae, quod orificium tubae *Euſtachianae*; accedunt foramina duo interiora in cauitatem cerebri hiantia, quorum vnum ſimplex, aperturam interiorem aquaeductus fallopii conſtituens; alterum amplius coecum, in fundo multiporoſum, pro tranſitu portionis mollis nerui acuſtici.

In partis petroſae oſſis temporalis cauitate *Organum auditus* abſconditum eſt. Lamina inferiore oſſea proxime ad foramen auditorium externum

ſubla-

ſublata, in conſpectum venit meatus auditorius oſſeus, foramini auditorio externo et membranae tympani interiectus, a foramine anguſtiſſimo mox in cauitatem amplam, rotundatam dilatatus. Membrana tympani margini circulari, in fundo meatus auditorii oſſei prominenti adhaeret pellucida, plana, centro in foſſulam retracto, ab extremitate manubrii mallei ſuperficiei interiori membranae tympani adglutinata; proxime ad marginem ſuperiorem prominet membrana tympani in tuberculum ab apophyſi breui mallei. Membrana tympani et Lamina oſſea inferiore conuexa petrae ſublatis, patet capſa tympani ampla, irregulariter ouata, oſſicula auditus quatuor, vulgo ſic dicta, cum concha et canalibus ſemicircularibus ſimul continens. Concha in ipſo medio capſae horizontaliter ſita, et membranae tympani parallela, apice antrorſum, baſi retrorſum ſpectans; e ſpiris quatuor, quarum prima reliquis duplo amplior, conflata; apice obtuſo vix anguſtato; apertura dilatata repanda, membrana obducta, quae feneſtra rotunda ſurſum ſpectans, apertura altera ſcalarum conchae deorſum in veſtibulum hiat; ſtructura interna cum concha humana perfecte conuenit. Supra concham et retrorſum, apophyſin maſtoedeam verſus, canales ſemicirculares duo; vnus verticalis, ſuperior minor; alter horizontalis, conchae parallelus, retrorſum arcuatus duplo maior; vtrinque circulum fere integrum conſtituentes, tribus orificiis in veſtibulum hiantes. Veſtibulum,

bulum, cauitas canalibus ſemicircularibus et conchae interpoſita, anguſta, irregularis; introrſum foraminulis perforata, pro tranſitu portionis mollis nerui acuſtici; antice foramine ſeu feneſtra ouali terminata. Feneſtram oualem obturat baſis ſtapedis, cuius crura horizontalia, infra ſemicircularem horizontalem et ſupra feneſtram rotundam conchae, in linea his parallela extrorſum procedunt et coeunt in caput rotundatum, quod in vertice concauum, pro articulatione cum oſſe lenticulari. Alterum oſſis lenticularis hemiſphaerium articulatum cum concauitate laterali apicis cruris longi, verticaliter deſcendentis, incudis. Crus breue incudis horizontale, angulo recto a corpore incudis baſi latiori retrorſum procedit, et apice eminentiae pyramidalis concauae capſae tympani per muſculum tenuiſſimum adhaeret; corpore autem ſurſum ſpectante ſubcylindrico, per ſuperficiem cruri breui oppoſitam, inaequalem reſpondenti capitis mallei ſuperficiei, per gynglimum, adnectitur. Caput mallei compreſſum, inaequaliter planum, ſuperficie vna poſteriore cum incudis corpore articulata, altera anteriore, libera; collum vix vllum; manubrium ſubcylindricum, cruri longo incudis parallelum, ad centrum membranae tympani deſcendens, eamque introrſum trahens; apophyſes mallei duae, ad manubrii ortum ſitae, vna exterior membranam tympani in tuberculum protrudens, altera anterior pariter breuis, margini circulari oſſeo membranae tympani per muſculum

tenuem

tenuem adnexa; vtraque obtuſiuſcula, longitudinis aequalis. Inter angulum coniunctionis canalium ſemicircularium et inter feneſtram oualem tranſuerſaliter procedit, aquae-ductus Fallopii, ſurſum leuiſſime arcuatus, extremitate interna in cranii cauitatem, externa in foramen ſtylomaſtoideum hians, tranſitui nerui duri et chordae tympani inſeruiens. In regione, apici conchae oppoſita, orificium tubae *Euſtachianae* in capſam tympani patet.

Pars quamoſa oſſis temporalis (quae improprie ita in hoc animale appellatur, cum per ſimplicem tantummodo ſuturam cum reliquis oſſibus cohaereat iterum in duas portiones ſubdiuidenda, quarum vna ſuperior verticalis, plana, muſculi crotaphytis inſertioni inſeruiens; altera horizontalis inaequalis, nam in ea antice eminentia articularis, leuiſſime deorſum arcuata, transuerſaliter concaua, cartilagine obducta, longitudinaliter a roſtro occiput verſus extenſa, proceſſu condyloideo maxillae inferioris duplo longior; poſt eminentiam foſſa articularis, profunda, proceſſui condiloideo amplitudine reſpondens, nuda. Ad angulum poſticum, in eodem cum eminentia articulari plano, oritur extrorſum ac antrorſum procedens apophyſis zygomatica attenuato-acuminata, cui inferne ad haeret *os zygomaticum*, quod lineare, ſimpliciſſimum, ſubarcuatum vtrinque attenuatum, antice incumbens apophyſi zygomaticae oſſis maxillaris.

Oſſa maxillaria ſuperiora parte inferiore horizontali, oſſibus roſtri et palati interpoſita, plana inter ſe cochaerent et foramine inciſiuo antice relicto palatum oſſeum fundumque cauitatis narium poſticae conſtituunt, et dentes molares tres recipiunt. A radice alueolorum dentium molarium adſcendit aphophyſis alueolaris, quae perpendicularis, lata, cauitatem narium poſticam vtrinque lateraliter obtegens. In extremitate antica corporis oſſis maxillaris oriuntur apophyſes duae; anterior naſalis perpendiculariter ad baſin oſſium roſtri vsque, ad os frontale adſcendens; poſterior zygomatica, extrorſum horizontaliter procedens, quae margine inferiore foraminis ampliſſimi, quod foramen magnum maxillare appellamus, formata, mox bifurcatur in partem perpendiculariter adſcendentem introrſum arcuatam ac in amplexus cum apophyſi naſali ruentem, ad perficiendum foramen magnum; pars altera bifurcationis, horizontalis continuatio apophyſeos, extrorſum arcuata et os zygomaticum petens, ac complementum totius arcus zygomatici ſiſtens.

Os vnguiculare planum, lineare, ſubincuruum, ad marginem poſteriorem cruris exterioris foraminis magni maxillaris ſitum, angulum a receſſione partis deſcendentis oſſis frontalis replens.

Oſſa palati portione palatina horizontali palati partem poſteriorem a dente molari medio ad vltimum vsque conficiunt, et in interſtitio alarum apophyſeos ptery-

pterygoideae oſſis ſphaenoidei perpendiculariter adſcendunt portione pterygoidea quae tandem dilatata antrorſum procedit, deſinens in portionem naſalem quae parti deſcendenti oſſis frontalis, alae magnae oſſis ſphaenoidei et apophyſi alueolari oſſis maxillaris interpoſita partem ſupremam parietis lateralis cauitatis narium poſticae et ſimul imum fundum foſſae zygomaticae conſtituit.

Os ſphaenoideum corpore oblongo, ſolido, apophyſi baſilari oſſis occipitalis et oſſi ethoideo interpoſito, fundum cauitatis cranii internae planum et omnino aequalem ſiſtit; ad latera corporis ſecedunt alae magnae, horizontales in eodem cum corpore plano, interne pariter aequales, retrorſum a corpore diuergentes, et interſtitium magnum oblongum reliquentes, quod extrorſum duplici apertura hiat, apertura poſterior maior formatur per alam externam et internam apophyſeos pterygoideae oſſis ſphaenoidalis, quarum interſtitium pro foſſa venae iugularis inſeruit; apertura altera anterior alae externae apophyſeos pterygoideae et apophyſi naſali oſſis palati interiacet, pro tranſitu nerui ſympathici medii. Inter radices alae magnae et alae externae apophyſeos pterygoideae ſitus eſt canalis obliquus, tranſitum carotidi concedens.

Os ethmoideum totum quantum abſconditum, inter oſſa frontalia, naſi, roſtrique et ſphaenoidale ſitum

ſitum; lamina cribroſa, e qua criſta galli vix prominet, parietem anteriorem perpendicularem cauitatis cranii ſiſtit; lamina longitudinaliter perpendicularis antrorſum procedit, coniunctionem cum vomere init et cauitatem narium poſtice in duas partes aequales diuidit; huic vtrinque parallela oſſicula conchoidea quatuor radiculis tenuiſſimis laminae cribroſae ad haerentia: lamina tenuiſſima exterius inter ſe coadunata.

Conchylia inferiora naſi in narium cauitate vtraque per totam oſſium roſtri longitudinem horizontaliter decurrunt, his adhaerentia, extrorſum reflexa, introrſum plana, vomeri parallela, proceſſibus conchoideis oſſis naſi ſuccumbentia iisque ſimillima.

Vomer, partem inferiorem ſepti narium conſtituens, extremitate poſtica cum lamina longitudinali perpendiculari oſſis ethmoidei et margine inferiore cum harmonia oſſium roſtri cohaeret; margine ſuperiore ſuleato ſurſum ſpinam longitudinalem oſſis naſi verſus ſpectat ac cum ea ſepto narium cartilagineo iungitur.

Maxilla inferior bicruralis, ramis in mento per ſynchondroſin connexis; corpus rami ſinguli totum quantum alueolum dentis inferioris inciſiui couſtituit deſinens in extremitatem vltra apophyſin condyloideam elongatam, cylindricam, obtuſiſſimam concauam, quam proceſſum odontoideum appellamus quia

quia receptioni radicis dentis inſeruit. In eadem cum proceſſu hoc et cum apice dentis inciſiui linea ſita eſt apophyſis coronoidea, plana, acuminata, iuſertioni ſtrati interioris crotaphytis inſeruiens; apophyſis condyloidea angulo ſemirecto e proceſſu odontoideo introrſum prodeuns, radice compreſſa, extremitate convexa, cartilagine obducta, longitudinaliter nec transverſim ſita; in facie exteriore in regione apophyſi condyloideae oppoſita conſpicitur ſpina oſſea, obtuſiuſcula, angulo acutiſſimo ſurſum a ſtrato exteriore crotaphytis producta. In medio fere maxillae introrſum adeſt apophyſis alueolaris, dentes tres molares recipiens. In medio apophyſin condiloideam et alueolarem inter, apertura interior canalis maxillaris, qui in facie exteriore maxillae infra dentem molarem primum extrorſum hiat, tranſitui nerui et vaſorum dentium molarium propriorum inſeruiens. Nerui et vaſa denti inciſiuo deſtinata petunt foraminula in interſtitio proceſſus odontoidei et apophyſeos condyloideae obuia. Pro tranſitu vaſorum, os ipſum nutrientium foraminula plurima in omni ſuperficie interiori adſunt. De ſitu maxillae inferioris animaduertendum, quod dentibus primoribus diductis apophyſis condyloidea in extremitate anteriore, iisdem autem acie ſibi incumbentibus eadem in extremitate poſteriori eminentiae articularis oſſis temporalis collocata ſit; ſi tandem dentes molares inferiores ſuperioribus reſpondent, apophyſis condyloidea vt in foſſa articulari ſita ſit neceſſe eſt.

 Apex

Apex obtuſus proceſſus odontoidei in diductione maxillae inferioris ſuperficiem inferiorem apophyſeos zygomaticae oſſis temporalis, hanc ob cauſam leviſſime excauatam, reſpicit, quo mechanismo et mobilitati conſulitur et luxationi praecauetur.

Dentium primorum inferiorum corpus cuneiforme, ſcindens; radix prismatica, concaua, corpore duplo longior arcuata: dentes primores ſuperiores inferioribus ſimiles, corpore breuiori, radice ſemilunari concaua. Dentium molarium corona cylindrica, truncata plana; radix ſubbifida, exterior breuior, interior longior maior, vtraque obtuſa.

Vertebrae colli ſeptem, dorſi quatuordecim; lumborum quinque, oſſis ſacri quinque ſpuriae; os coxygis ſubcartilagineum, breue, obtuſiuſculum; coniunctio oſſium pubis ſynchondrica, dilatabilis. Clauicula tenuis, linearis; coſta autem prima latiſſima, a ſcalenis fortiſſimis diducta; *coſtae* reliquae, quarum in vniuerſum quatuordecim ſunt, lineares, cartilaginibus longiſſimis auctae, quarum octo ſuperiores ſeparatim oſſi ſterni, quatuor ſubſequentes vero cartilagine communi ſterno adhaerent; decima tertia et decima quarta libere inter muſculos abdominales fluctuant. *Os ſterni* lineare; cartilagine lato, rotundato, lamelloſo terminatum. Extremitatum oſſa vix ac ne vix differunt a vulgari ſtructura.

Partes quaedam *capitis molles*, propter ſingulariſſimam conformationem ſuccinctiori deſcriptione

ne digniſſimae. *Roſtrum* cartilagineum apici oſſis naſi et margini ſuperiori, oſſium roſtri adhaeret, ſepto mobili craſſiſſimo, bipartito. Sub cute capitis muſculus ſat fortis *ſubcutaneus*, omnem capitis cutem veſtiens, ſuperficiei ſuperiori oſſium roſtri, naſi, frontalis, et ſuturae ſagittali oſſium parietalium, nec non proceſſui zygomatico oſſis maxillaris adhaerens. Cute capitis ſublata in conſpectum venit *muſculus* craſſiſſimus oblongus, *proboſcidem expandens* lateraliter marginibus oſſium roſtri et poſtice ambitui foraminis magni oſſis maxillaris ſuperioris inſertus; *buccinator* et *eleuatores labiorum* tenues, margini inferiori proceſſus zygomatici oſſis maxillaris et ſuperficiei inferiori oſſium roſtri adhaerentes, *maſſeter* omnium fortiſſimus, omnem marginem inferiorem arcus zygomatici et totam ſuperficiem externam maxillae inferioris obtegens; *crotaphytes* latiſſimus ambitui foſſae zygomaticae a proceſſu zygomatico oſſis temporalis ad os vnguiculare vsque adhaerens, et totam foſſam zygomaticam occupans, obtegendo partem deſcendentem oſſis frontalis ac ſuperficiem totam et oſſis parietalis et partis ſquamoſae oſſis temporalis: ſtratum eius exterius procedit ſupra arcum zygomaticum, et inſeritur ſpinae ſuperficiei exterioris maxillae inferioris; ſtratum internum poſt arcum zygomaticum inciſuram ſemilunarem maxillae inferioris petit, pariterque ei ac apophyſi coronoideae adhaeret.

Spatium inter apophyſin zygomaticam oſſis maxillaris et inter muſculum crotaphytem replet *conglomeratum glanduloſum*, liquidum ſpiſſiuſculum, puri laudabili ſimillimum, in cellulis continens; centro huius conglomérati per celluloſam adhaeret *oculus* corpuſculum nigricans, globoſum, vix ſemine papauerino maius, antice ſubpellucidum, nitidum referens, in quo ob minutiem nec pupilla nec liquores diſcerni queunt. Ad hoc oculi rudimentum accedunt filamenta neruea, capillaria, per foramen anguſtiſſimum, in linea coniunctionis proceſſus naſalis oſſis palati cum ala magna oſſis ſphaenoidei obuium, e baſi cerebri prodeuntia et ad pollicis fere longitudinem per foſſam zygomaticam inter muſculum crotaphytem et conglomeratum iſtud glanduloſum percurrentia, filamentis aliis in oculum, aliis in glandulam deſinentibus. Apertura pro oculo cutanea nec in cute detracta detegenda, quae potius in eo ipſo loco oculis reſpondente muſculo ſubcutaneo veſtita eſt; muſculi pariter nulli ad oculum hunc anomalum accedunt; hinc nec tot neruorum paria ac alias ſolent, ſed ſex tantum, naſale ſcilicet, ophthalmicum, ſympathicum medium, alias par quintum dictum, acuſticum, vagum alias par octauum, et linguale.

Ad latera nuchae a proceſſu zygomatico oſſis temporalis ad foramen auditorium externum procedit *meatus auditorius cartilagineus*, conicus, externe dila-

dilatatus, introrſum anguſtatus, e duabus cartilaginibus compoſitus, quarum exterior integra, interior bipartita; in vtraque margines ſibi incumbunt, hinc ambitus exterior inaequalis, ad quem inſuper fibrillae muſculares a crotaphyte accedunt; ambitus vero interior aequalis tunica ſubpiloſa, a cute externa continuata, veſtitus. Superficies tota oſſis occipitalis muſculis ceruicalibus inſolenter craſſis obducitur. Haec ſufficiant de capite, in quo reliqua minus ſingularia ſunt.

Ad latera colli ſub cute *glandulae* conſpiciuntur *iugulares*, craſſae, latae, in nucham vsque extenſae; anterius glandula *thyreoidea* duplex, obouata.

Thorax elongatus, conuexus; *pulmo dexter* trilobus, lobulo infimo diaphragmati incumbenti maximo, reliquis ſuperioribus dimidio minoribus, inter ſe aequalibus; *pulmo ſiniſter* integer; *lobulus acceſſorius*, paruus, triangularis, inter pulmonem dextrum, ventriculum cordis dextrum et diaphragma poſitus. *Cor* ouatum longitudinaliter ſitum, apice interſtitium 6 et 7. coſtae ſiniſtrae reſpiciens. Supra cordis baſin ad apicem thoracis vsque glandula *thymus* ampla, lata, albida, ſub qua *trachea* procedit vniformis, ex annulis viginti cartilagineis remotis, poſtice truncatis compoſita, ſpinae incumbens; ad marginem huius ſiniſtrum *oeſophagus* muſculoſus.

Abdomen laxiuſculum breue. *Hepar* quadrilobum; lobi duo anteriores, duo poſteriores; *anterior dexter* omnium maximus, hypochondrium dextrum et epigaſtrium occupans, ligamento lato per ſuperficiem ſuperiorem accurrente diaphragmati annexus, bifidus, inter fiſſuram *veſiculam felleam*, pyriformem paruam, profunde ad dorſi ſpinam ſitam, ductu choledocho proxime poſt pylorum in inteſtinum hiantem recipiens; *anterior ſiniſter* dextro aliquantum minor, integer, hypochondrium ſiniſtrum replens, ventriculi fundo incumbens; *poſterior dexter* bipartitus, lobulis paruis rotundato-angulatis, inferiore concauo et renis dextri extremitati ſuperiori incumbente ac ligamento hepatico-renali annexo; *poſterior ſiniſter* iterum bipartitus, lobulis omnium minimis, ventriculi arcui minori concauo adhaerentibus. *Lien* arcui maiori ventriculi per omentum adhaerens, linearis fere et tenuiſſimus, longitudinis $1\frac{1}{4}$. poll. coloris rubicundi. *Pancreas*, inter ſpinam dorſi et ventriculi ſuperficiem poſteriorem, cylindricum fere, inteſtinulum referens, transuerſaliter ad inteſtinum proxime ad pylorum decurrens, pollicem longum. *Omentum* ab hepate et liene ad ſuperficiem poſteriorem ventriculi proveniens, arcui maiori conuexo ventriculi adhaerens, conuolutum, breue nec inteſtina obtegens, vix aliquid adipis continens. *Ventriculus* ouato-incuruus, membranaceus, cardia anguſta definens ſiniſtrorſum in fundum obtuſum ad diaphragma et hypochondrium

drium ſiniſtrum verſus incuruum; ex quo deſcendit extrorſum et deorſum arcus maior vsque ad pylorum, qui laxus, amplus et cardiae proximus, arcu paruo concauo ab ea ſeparatus; corpus ventriculi albicans, tunica communi veſtitum, ſub qua ſtratum muſculare tenue, varium; ad ſuperficiem poſteriorem ventriculi fundum verſus, macula rotunda, glabra, rubicunda, extra reliquam ventriculi ſubſtantiam aliquantum prominula; eadem macula a ſuperficie interna ventriculi glabra, rubra, ſinum quaſi formans, margine prominulo annulari, quo ipſa villoſa ventriculi tunica terminatur, cincta; reliqua ſuperficies interna omnis albicans, rugoſa, rugis praeſertim ad pylorum eminentioribus et valvuloſis a tunicae villoſae duplicaturis, quae ſimul cum neruea ad ipſum pylorum terminatur margine prominulo, annulari, rugoſo, crenato, adeo vt tunica ventriculi externa communi et muſculari ſoluta, et celluloſa remota nullus amplius nexus ſit ventriculi cum tractu inteſtinali. *Inteſtinum tenue* ad pylorum valde amplum, capacitate 5. linearum, poſtea ſenſim ſenſimque coarctatum in diametrum 2. linearum, in initio rubicundum, poſt albicans, flexuoſum, meſenterio laxiuſculo adnexum, in regione vmbilicali inter ventriculum et coecum ſitum, ipſo animali quintuplo longius, 44. pollices a pyloro ad coecum percurrens, deſinens transuerſaliter in coecum, lumine clauſo valuula magna, ſimplici, ſemilunari, colon verſus nutante. *Coecum*

per

per hypogaſtrium, regionem iliacam ſiniſtram verſus extenſum, cylindricum, vix anfractuoſum, fundo attenuato terminatum, longitudine $4\frac{1}{2}$. poll. diametro maximo 8 linearum, externe ſubgyroſum, interne valuulis aliquot laxiſſimis veſtitum. *Colon*, recta continuatio coeci, adſcendit in regione iliaca ſiniſtra ad ventriculi ſuperficiem poſteriorem, abit abhinc a coeco tectum ad regionem iliacam dextram; hic recuruatur et parti deſcendenti arcte annexum petit priſtinam altitudinem, tandemque ad marginem ſiniſtrum ſpinae dorſi deſcendit ductu recto ad peluim et deſinit in rectum; in toto hoc decurſu 18. pollices emetiens, diametro 2. linearum, externe vbique fere laeue, extremitatem verſus hinc inde contractum, ad ſcybalorum formationem. *Rectum* muſculoſum deſinit in *anum* cuius apertura cincta eſt conglomerato parenchymatoſo, ex innumeris inteſtinulis quaſi conuoluto, liquidum aperturam lubricans, ſed inodorum ſecernens. *Renes* duo integri, ouati, auellanae magnitudinis, *ſuccenturiatis* aucti; vreteres recta ad ſpinam dorſi vtrinque decurrentes in veſicam rotundam, amplam, vtrinque tunica cummuni veſtitam, anterius ad ſymphyſin oſſium pubis ligamento lato annexam.

Genitalia in mare: teſticuli extremitate vna extra abdomen prominentes, rotundi, magnitudine piſi; *Epidydymis* ad latus internum teſticulo arcte adhaerens, vermiculoſus, deſinens in vas deferens, quod

quod in pelui vtrinque angulo acutiſſimo terminatur in veſiculas ſpermaticas, paruas, vix duarum linearum latitudine, multigyroſas, inter veſicam vrinariam et rectum, ad veſicae vrinariae ceruicem ſitas, hiantes in vrethram apertura prominula, ſubcartilaginea, proxime ante veſicae vrinariae aperturam. *Vrethra* muſculoſa, vix 6. lineas longitudine, nec vnam diametro excedens, continuatur in corpus cauernoſum vrethrae, longitudine 6. linearum, terminatum glande penis 3. lineas longa, oſſiculum lineare continente, quod baſi dilatatiori per ligamentum forte ipſi corporum cauernoſorum penis extremitati ad ligamentum, exterius autem duabus lateraliter adhaerentibus papillis acuminatis, vrethrae aperturam obtegentibus, ornatum. *Corpora cauernoſa penis duo*, diſſepimento ſeparata, baſi ſymphyſi pubis adhaerentia. Longitudo igitur totius penis a veſicae vrinariae ceruice ad glandis extremum 1. poll. 3. lin. proprie vero penis a corporum cauernoſorum baſi ad glandis extremitatem vsque 9. lineas longus, diametro vix linea craſſior.

Genitalia feminea: labia vaginae ſtrictiuſcula, in papillulam prominentia a clitoride, quam obtegunt; vrethrae apertura in pronao prominula, nymphis obuallata; vagina vteri membranacea, vix rugoſa, pollice breuior; os vteri papilloſum; ceruix vteri anguſtus, vix ſtylum tenuiſſimum recipiens, mox bifurcandus in cornu dextrum ſiniſtrumque

 ductu

ductu recto, ad renes ſere adſcendens vtrinque vltra duorum pollicum longitudinem, ouario multigyroſo, veſiculoſo terminatum.

PHYSIOLOGIA.

Viſu plane carere videtur *Spalax noſter*; ea enim, quae absque rumore accedunt, quamuis capiti proxima ſint, omnino non percipit; leuiſſimo autem ſono edito caput erigit, et aurium aperturam, quantumcunque fieri poteſt, dilatat; hinc auditu ſorte pollet, vt animalibus caſu coecis ſolemne. Iniurias metuens rictum diſtendit, ſono ſtridulo difficili humanae reſpirationi non abſimili fremitat, ac dentes inciſiuos ad pugnam parat, iisque iratus oblata mordiens prehendit; dolens praeſertim ſub terra pipiendo, rattorum more, clamitat miſere.

Proxime ſub terra fodit canales horizontales, roſtro terram ſoluens dentibus primoribus radices obuias abſcindens; hinc muſculi maſticationis negotio inſeruientes fortiſſimi; terram ſolutam pedibus anterioribus verſus poſteriores pellit, eorumque ope tandem hanc ad canalis foramen in cumulum proiicit, idemque in cauitatis vberiori continuatione, talparum more iteratis vicibus peragit, in vna linea plures, duos treſue paſſus inter ſe diſtantes cumulos erigens: hyeme appropinquante profundius fodit; cauernam oblique deſcendentem ſibi conficiens, in qua hybernare dicitur.

citur. Inceſſu ſupra terram ob pedes breues tardisſimus.

Diaeta mere vegetabilis; radicibus praeſertim aromaticis vmbelliferarum, in hortis et apricis campis obuiarum victitat, quarum fibrillis albicantibus bene comminutis ventriculus ſemper repletus. Feces in ſcybala redactae; hybernationis tempore pulpoſae in coeco ampliſſimo colliguntur. Vrina turbida, ſabuloſa.

Coeunt aeſtate; gregatim tunc in terrae ſuperficie apparentes, ſexum olfactu, quo excellunt, diſtinguentes; femina parit pullos duos ad quatuor de tempore durationis grauiditatis nil nobis conſtat. Pulicibus, non pediculis, obnoxium animalculum.

Spalax microphthalmus a nobis et hiſtorice et anatomice, et phyſiologice deſcriptus habitat frequentiſſime in campis apricis vaſtiſſimis deſertis tanaicenſibus ac in vicis hortisque vicinis.

Explicatio figurarum; et ſtaturam ſpalacis microphthalmi, et varias eiusdem capitis partes naturali magnitudine repraeſentantium.

Fig. 1. Oſſa capitis a latere dextro absque maxilla inferiore. Tab. VIII.

a. os naſi.
b. oſſa roſtri.
c. oſſa frontalia.

d. pars deſcendens oſſis frontalis.
e. oſſa parietalia.
f. os occipitale.
g. facies ſuperior partis petroſae oſſis temporalis.
h. pars ſquamoſa oſſis temporalis.
i. apophyſis zigomatica oſſis temporalis.
k. os zygomaticum.
l. apophyſis zygomatica oſſis maxillaris ſuperioris.
m. apophyſis naſalis oſſis maxillaris.
n. foramen magnum oſſis maxillaris ſuperioris.
o. oſſa vnguicularia.
p. foramen magnum occipitale.
q. apophyſis condyloideae oſſis occipitalis.
r. apophyſes ſtyloideae oſſis occipitalis.
ſ. apophyſis maſtoidea oſſis temporalis.
t. foramen auditorium externum.
u. dentes tres molares.
x. foſſa zygomatica.
y. foramina ad ſinus ethmoideos ducentia.
z. foraminis optici regio, quod autem magis retrorſum ideoque haud conſpicuum.

Tab. VIII. Fig. 2. Baſis oſſium cranii.

a. margo terminalis oſſis naſi.
b. ſeptum narium cartilagineum.
c. aperturae narium anteriores.
d. oſſa roſtri.

e. al-

e. alueoli dentium inciſiuorum ſuperiorum.
f. corpus oſſis maxillaris ſuperioris.
g. foramen inciſiuum winflouii.
h. oſſa palatini.
i. apertura poſterior narium.
k. apophyſes pterygoideae oſſis ſphaenoidei.
l. alae magnae oſſis ſphaenoidei.
m. corpus oſſis ſphaenoidei cohaerens cum apophyſi baſilari oſſis occipitalis.
n. apophyſis baſilaris oſſis occipitalis, foramine magno et apophyſibus condyloideis vtrinque terminata.
o. facies inferior conuexa partis petroſae oſſis temporalis.
p. foſſa articularis oſſis temporalis.
q. eminentia articularis oſſis temporalis.
r. apophyſis zygomatica oſſis temporalis.
ſ. os zygomaticum.
t. apophyſis zygomatica oſſis maxillaris.
y. foramina condiloidea oſſis occipitalis.
z. apophyſis ſtyloidea oſſis occipitalis
α. foramen auditorium externum.
β. foramen ſtylo - maſtoideum.
γ. apophyſis maſtoidea.
δ. cartilago meatus auditorii interior bifidus.
ε. cartilago exterior integer.
ϑ. margo annularis, cui membrana tympani adhaeret.
λ. feneſtra rotunda conchae.

μ. feneſtra oualis veſtibuli, ſtapedis baſi obturata quae in icone remota ſimul cum reliquis auditus oſſiculis.

ψ. apertura tubae *Euſtachianae.*

σ. extremitas cerebralis aquae ductus fallopii.

τ. extremitas altera eiusdem ductus foramen ſtylomaſtoideum verſus.

π. canalis ſemicircularis verticalis.

ρ. canalis ſemicircularis horizontalis

ω. eminentia pyramidalis inſertioni cruris breuis incudis inſeruiens.

θ. foſſa venae iugularis.

ξ. canalis caroticus.

Tab. VIII. Fig. 3. Ramus dexter maxillae inferioris a facie interna.

a apophyſis coronoidea.

b. apophyſis condiloidea.

c. proceſſus odontoideus.

d. ſpina muſcularis ſuperficiei - externae.

e. apertura interna magni canalis maxillaris.

f. foraminula varia, pro tranſitu vaſorum nutrientium.

g. apophyſis alueolaris.

h. tres dentes molares.

i. facies interna ſynchondroſeos ramorum.

k. dens inciſiuus inferior.

Tab. VIII. Fig. 4. Dens inciſiuus inferior extra alueolum.

a. corpus cuneiforme ſcindens.

b. lo-

b. locus in quo attenuatio corporis incipit.
c. radix priſmatica concaua.

Fig. 5. Dens inciſiuus ſuperior extra alueolum. Tab. VIII.
a. corpus cuneiforme ſcindens.
b. locus in quo attenuatio corporis incipit.
c. radix prismatica cocaua.

Fig. 6. Dens molaris.
a. corona cylindrica truncata.
b. radix exterior breuis.
c. radix interior longior, craſſior.

Fig. 7. Caput a latere ſiniſtro cum maxilla inferiori a cute denudatum. Tab. VIII.
a. cartilago roſtri.
b. muſculus roſtrum expandens.
c. muſculus crotaphytes.
d. adhaeſio ſtrati exterioris crotaphytis in ſpinam muſcularem maxillae inferioris.
e. conglomeratum glanduloſum.
f. oculus.
g. meatus auditorius cartilagineus.
h. maſſeter.
i. apex linguae.
k. interſtitium vacuum muſculis labiorum et buccinatore remotis.
l. dentes inciſiui inferiores et ſuperiores.
m. oſſa roſtri.
n. os naſi.
o. ſutura coronalis.

p. os

p. os frontale.
q. apophyſis zygomatica oſſis maxillaris ſuperioris.
r. os vnguiculare.
ſ. os zygomaticum.
t. ſutura ſagittalis oſſium parietalium.
u. ſutura lamdoidea.
x. ſpina oſſis occipitalis.

Tab. IX. Fig. 8 Spalax microphthalmus incedens.

Tab. IX. Fig. 9. Spalax micropthalmus dorſo incumbens mas, vt roſtri, dentium, oris rictus et ſetarum capitis ſtructura ſimul cum vortice gulari et ſutura ſternea eo diſtinctius pateat.

PERE-

PEREGVSNA,
NOVA MVSTELAE SPECIES.

Auctore
A. I. GVELDENSTAEDT.

Trad. d. 21. Ian. 1770.

Nouum regni animalis ciuem, campos *Tanaicenſes* vaſtiſſimos inhabitantem, *Muſtelarum* generi adſcribendum proponimus. Omnis corporis habitus et partium ſtructura vitaeque genus indicant affinitatem animalculi, quod *Ruſſis* et nobis triuialiter audit *Peregusna*, cum congeneribus *putorio* ſcilicet, *marte*, *ermineo*, et *muſtela vulgari*, campis iisdem pariter indigenis. Vt pateat in quo conueniat, iterumque in quo differat, ſubiungitur.

DESCRIPTIO PEREGVSNAE.

CAPVT triangulare, depreſſum; *roſtrum* vltra labium prominens, acuminatum, nudum, nigrum medio carinatum, *naribus* amplis recuruis perfortum. *Oris apertura* ſat ampla, triangularis, infra oculos vsque extenſa; *labium* ſuperius integrum, laxum, craſſum, piloſum, pendulum, dentes denudatos relinquens. *Lingua* lata, vix ex ore producenda, carnoſa apice rotundato, ſubmembranaceo, ſuperne papillis retrorſum acuminatis confertiſſime obſita et albicans; inferne rubra, glabra,

 frenu-

ſrenulo laxiſſimo, muſculoſo adligata. *Palatum* vndulatum.

DENTES *in maxilla ſuperiore*: *inciſiui* ſex in vna linea recta diſpoſiti, teretes, acuminati, ſibimet proximi, ſingulo vtrinque extimo reliquis intermediis craſſiore et tantillum longiore: *Canini* duo vtrinque vnus, ab inciſiuis parum remotus, molaribus proximus, inciſiuis quadruplo maior, conicus, leuiſſime incuruus, exterius obſolete ſtriatus: *Molares* vtrinque quatuor, quorum primus minimus, vix extra gingiuas prominens, obtuſus; ſecundus aliquantum maior, exterius acuminatus; tertius omnium maximus, longitudinaliter extenſus, bicuſpidatus; quartus transuerſaliter extenſus, breuis, rugoſus. *Dentes* in *maxilla inferiore*; *inciſiui* ſex, breuiſſimi, quorum quatuor maiores, obtuſi, ſubtuberculoſi, intermediis duobus tantillum interius ſitis; duo minores, imo minimi, granula referentes ante interſtitium dentium duorum maiorum intermediorum ſiti: *Canini* duo vtrinque vnus, tantillum et vix ab inciſiuis remotus, figura et magnitudine ſuperiorum: *molares* vtrinque quinque caninis proximi, quorum primus, obtuſus, ſecundus et tertius maiores acuminati; quartus omnium maximus, tricuſpidatus, denticulo intermedio productiore; quintus primo ſimilis. Dentes igitur in vniuerſum 34. in maxilla ſuperiore 16. in inferiore 18. omnes eburnei. Ore clauſo dentes inciſiui indermedii quatuor ſuperiores inferioribus maioribus arcte incumbunt; laterales autem

tem maiores interſtitium, inciſiuos et caninos inferiores inter, intrant; canini ſuperiores extra labium inferius prominent, inferiores vero interſtitium inciſiuis et caninis ſuperioribus interpoſitum occupant; molares alternatim interſtitiis ipſis interſitis reſpondent.

MYSTACES quinque ordinum, in labio ſuperiore ſitae; ordinis ſuperioris ſetae a reliquis remotiores, in eadem cum oculis linea, ſurſum ſpectantes, breues; reliquae deorſum flexae, inaequales, longiſſimis aures attingentibus. *Setae* ſupra oculum ad cantum anteriorem ſere 10. quarum duae longiores; infra oculum pone cantum poſteriorem duae, ſuperioribus aliquantum longiores; pone ſinum oris duae, longae deorſum declinatae; in mento plures detritae.

OCVLI in medio lineae a naribus ad aures ductae poſiti, laterales, parui, profundi, ellyptici; canto vno anteriori acutiſſimo, altero poſteriori; margine palpebrarum nudo; membrana nyctitante ad cantum anteriorem obſoleta, albicante, iride et pupilla nigra.

AVRICVLAE laterales, erectae, rotundae, amplae, breues, piloſae.

COLLVM breue, vix capite anguſtius.

TRVNCVS elongatus, cylindricus, vix collo craſſior.

PEDES trunco fere triplo breuiores, ſubaequales, poſterioribus aliquantum longioribus; *plantae*

et *palmae* calcaneis incedentes, piloſae, ſubtus verrucis quatuor nudis inſignitae, pentadactylae; *digiti* omnes fiſſi, in palmis longiores; primus interior ſeu pollex ſecundo dimidio breuior; ſecundus; tertius et quartus fere aequales, intermedio aliquantum prominente; quintus iterum breuior, longitudine media inter primum et ſecundum; *Vngues* compreſſi, vncinati, acuminati, flauicantes, in palmis longiores ac in plantis; ſed vnguis digiti primi plantarum, latior, obtuſior, breuior reliquis.

CAVDA longa, truncum fere longitudine adaequans, rotunda, piloſa, pilis baſin verſus longioribus, apicem verſus breuioribus, vt inde cauda attenuato - acuminata.

PILI vbique confertiſſimi, decumbentes, retrorſum ſpectantes, absque ſuturis et lanugine rigidiuſculi, vix ſemipollice longiores, vbique in corpore et pedibus aequales, in capite breuiores, in cauda longiores, pollicem ad baſin excedentes.

COLOR: *Caput* nigrum; omni oris circumferentia, faſcia frontali intra aures extenſa, auricularumque ambitu et vertice medio albis; *truncus* ſupra et ad latera bruneo luteoque varius; regione interſcapulari fere tota brunnea; maculae luteſcentes, hyeme pallidiores euadunt et albeſcunt; truncus ſubtus et *pedes* toti aterrimi; *caudae* pili elongati baſi cineraſcentes, medio nigri, extremitate albidi;

pili breuiores apicis caudae baſi cinerei, extremitate nigri; pili omnes nitentes.

Vmbilicus nullus; *mammae* vtrinque ſex, abdominales et inguinales, papillis minimis, vix conſpicuis. *Vaginae labia* in papillam rugoſam pilis obſitam prominentia; *praeputium* penis ſtrictum, piloſum; *teſticuli* non apparentes; *perinaeum* ſat latum; *anus* rugoſus, nudiuſculus, rubicundus, empyreumatice foetens.

STATVRA proxime accedit ad *putorium auctorum*, quo aliquantum minor; in *dimenſiones* ſecundum *londinenſem* pedem:

	poll.	lin.
Longitudo ab apice roſtri ad caudae extremum - - - - - - - - - - - -	20.	—
—— a roſtro ad nucham - - - -	2.	6.
—— a nucha ad caudae baſin - - -	11.	—
—— caudae - - - - - - - - -	6.	6.
—— a labio inferiore ad ſterni caput	1.	6
—— capite ſterni ad proceſſum xyphoideum	3	8
—— a proceſſu xyphoideo ad praeputium	4	—
—— a praeputio ad anum - - - -	—	8
—— a vaginae apertura ad anum - -	—	6.
—— pedum anteriorum a capite oſſis brachii ad apicem digiti medii - -	4.	—
—— pedum poſteriorum a capite oſſis femoris ad apicem digiti medii -	4.	6.
—— palmae a carpo ad apicem digiti medii	1.	6.

	poll.	lin.
Longitudo plantae a tarſo ad apicem digiti medii - - - - - - - - - -	1.	10.
—— digiti medii palmae - - - - -	—	10
—— digiti medii plantae - - - - -	—	8.
—— vnguis digiti medii palmae - -	—	6.
—— vnguis digiti medii plantae - -	—	$3\frac{1}{2}$.
Diameter inter roſtri apicem et oris angulum	1.	-
—— tranſuerſalis rictus oris - - -	1.	—
—— inter narium aperturas - - -	—	2.
—— inter nares et oculi cantum anteriorem	—	8
—— inter oculi cantum poſteriorem et aures	—	8.
—— inter oculos - - - - - - - -	—	8.
—— inter aures - - - - - - -	1	6.
—— oculorum - - - - - - - - -	—	$2\frac{1}{2}$
—— aurium - - - - - - - - - -	1.	—
—— capitis perpendicularis inter aures	1.	3.
—— capitis tranſuerſalis in eodem loco	1.	8.
peripheria trunci maxima ante lumbos	5.	6.

ANATOMIA PEREGVSNAE.

THORACIS cauitas anguſtiſſima, ſed longiſſime extenſa, ſuperne acute conice terminata. *Cor* in medio cauitatis ſitum dextrorſum magis ac ſiniſtrorſum, auricula dextra, et magine corporis dextro ipſam coſtarum lateris dextri curuaturam attingens, ouatum, oui columbini magnitudine. *Pulmo* et dexter et ſiniſter trilobus; lobo ſuperiore longiſſimo, valde attenuato, imum thoracis apicem petente;

petente; inferior latiore et craſſiore, diaphragmati incumbente; medio minimo, in dextro pulmone maiore ac in ſiniſtro; accedit lobulus, cordis apicem et oeſophagum inter ſupra diaphragma, ad latus dextrum mediaſtini ſitus, triangularis. *Trachea* profunde in Thoracis cauitatem deſcendens, pollicibus tribus longior, ex annulis quinquaginta poſtice planis conflata. *Oeſophagus* laxus ad marginem ſiniſtrum tracheae. *Ductus thoracicus* tenuiſſimus, venam cauam ſuperiorem pedens. *Thymus* oblonga, lata, tracheae et auriculae dextrae cordis incumbens.

ABDOMINIS cauitas anguſta, breuis, *Diaphragma* latum, muſculoſum, ſpeculo *helmontii* anguſto. *Hepar* magnum, quadrilobum; lobi duo dextri, duo ſiniſtri: *lobus dexter anterior* et ſuperior diaphragmati reſpondens, omnium maximus, trifidus, lobulo exteriore hypochondrium dextrum occupante, maximo, duobus interioribus minoribus, in ipſa cardiaca regione ſitis, et ligamento lato diaphragmati adnexis; *lobus dexter* poſterior bipartitus, lobulo inferiore minore reni dextro concauitate ſua incumbente, et ligamento hepatico renali adhaerente; *lobus ſiniſter anterior* et ſuperior diaphragma reſpiciens et ipſi per ligamentum coronarium, a margine poſteriore procedente, alligatus, hypochondrium ſiniſtrum replens; integer; *lobus ſiniſter poſterior* in arcu ventriculi concauo inter cardiam et pylorum ſitus et omento minori connexus inter lobi dextri anterioris lobulum exteriorem et

proxi-

proximum minorem *foſſa pro veſica fellea*, quae magna, pyriformis, fundo ad proceſſum xyphoideum prominens, *ductu hepatico*, ex lobo dextro prodeunte replenda et *choledocho*, proxime poſt pylorum in inteſtinum hiante, ſeſe exonerans; inter lobi dextri anterioris lobulos interiores minor *foſſa pro vena vmbilicali*; inter lobi dextri anterioris lobulum intimum et lobum ſiniſtrum anteriorem anterius *foſſa pro arteria hepatica* et *vena portarum*, poſterior *foſſa pro vena caua* per hepatis ſubſtantiam tranſeunte. *Lien* oblongus, tenuis, ad omnem arcum conuexum ventriculi extenſus, et vaſis breuibus omentoque ventriculo adnexus. *Pancreas* longiſſimum, eiusdem fere cum liene latitudinis, quo attamen tenuius, rubicundum, ab ipſo hilo lienali, pone ventriculum laxa omenti duplicatura inuolutum, ad pylorum procedens, et inteſtino, in quod pone ductum choledochum *ductus pancreaticus* hiat, ad pollicis longitudinem alligatum, extremitate recurua terminatum. *Omentum* parum adipoſum, a ventriculi arcu maiore deſcendens ad peluim fere vsque et inteſtina obtegens. *Ventriculus* membranaceus, oblongo-incuruatus absque fundo; arcus enim maior conuexus ſtatim a *cardia* ad *pylorum* deſcendit, hypochondrium ſiniſtrum verſus ſpectans; arcus ſuperior concauus, breuis; ſphincter pylori modice conſtritus. *Tractus inteſtinalis* et externe et interne laeuis et continuus, ſtructura vbique eminenter muſculoſa, longitudine 32. *pollices londinenſes* a pyloro ad anum adaequante, hinc

hinc triplo truncum excedente, diametro vbique aequali vix 3. *lineis* ampliore; *meſenterium* ſtrictum plane non adipoſum. *Anus* rugoſus, prominens, vtrinque ſub cute ſtipatus *ſoliculo* rotundo, cauo, interne albo et laxiſſime rugoſo; rugis autem ita arcte inuolutis, vt externe glandulam ſolidam referat; his apertis, ceu ex *pandorae* pyxide faetor ſuffocans, empyreumaticus, accerrimus, oculos et nares feriens exit, nec liquidum, nec ductum inueni. *Renes* ouati, auellanae magnitudine integri, dexter ſuperior ſiniſtro, tunica adipoſa vix vlla; *vreteres* membranacei ſimplices, conuergendo peluim petentes; *veſica vrinaria* ouata, rene quadruplo minor, ſubligamentoſa, vtrinque peritonaeo veſtita, anterius ligamento lato ſymphyſi pubis adhaerens, extra peluim ſita.

GENITALIA *feminae* ita: *vteri ceruix* tres *lineas* longus, cylindricus, veſicae vrinariae et recto interpoſitus, biſurcatus in *cornua* duo, vnum dextrum, alterum ſiniſtrum, eiusdem cum ceruice diametri, ſerpentino ductu ad renes vsque adſcendentia, extremitatem verſus attenuata, et *ouario* multoties gyrato et granuloſo aucta, ligamento laxiſſimo, adipe repleto, lumbis adnexa; *orificium vteri* papilloſe in vaginam prominens, rugoſum, ceruicis et cornuum cauitate anguſtius, vix ſtylo capillaceo permeabile; *vagina vteri* conſtipata, membranacea, orificium vteri verſus transuerſaliter pronaum verſus longitudinaliter rugoſa, ruga interme-

 dia

dia pubis arcum verſus ſpectante eminentiori et anterius ab vrethra perforata; *clitoris* magna, tuberculoſo-papilloſa, cruribus vtrinque pubis oſſibus adhaerens; *nymphas* vix vidi, niſi labia vaginae, quae rugoſiſſima, ſed arcte conniuentia, pro iis habeas.

GENITALIA *maris* ita: *corpus cauernoſum penis* ſimplex, cylindricum, breue, ſimphyſi oſſium pubis poſtice, et oſſiculo glandis penis antice adhaerens; *oſſiculum glandis* lineari-angulatum, baſi ſubtuberculoſa corpori cauernoſo penis, quo triplo longius, annexum, apicem verſus et ipſo apice, qui retrorſum ſeu abdomen verſus hamatus, ſulcatum, fere omnino nudum, et non niſi tunica tenuiſſima, pellucida, ab vrethra continuata obductum; *vrethra* enim infra oſſium pubis ſymphyſin ſat longe decurrens, corpori cauernoſo penis inferne adglutinata; ad oſſiculum glandis abit, iſtud obducit vbique tenuiſſima, absque corpore cauernoſo, et tandem tantillum ante apicem oſſiculi hiat; longitudo corporis cauernoſi penis ſemipollicaris, oſſiculi glandis ſesquipollicaris, hinc totius penis bipollicaris. *Teſticuli* globoſi, folliculis ani incumbentes, extra abdomen equidem prominentes, ſed adipe adeo involuti, vt vix ac ne vix per cutem appareant; *epidydymis* teſticulo erecte adnexa; *funiculus* ſpermaticus longus, vrethram profunde in pelui ſitam petens, *veſiculis ſpermaticis* minutiſſimis et vix vllis auctus,

auctus, ſed fere immediate vaſis deferentibus in vrethram vtrinque patens.

OSSA capitis et extremitatum vix differunt a congeneribus *putorio* ſc. et *marte*, ex aureis BVFFONIANIS ſcriptis ſatis ſuperque notis; ſed haec pauca de trunci oſſibus *peregusnae* monenda ſunt; *claviculae* nullae; *os ſterni* lineare, ex vndecim oſſiculis longitudinaliter adpoſitis conflatum; *coſtae* 17. quarum decem primae ſeparatim ſterno inſertae, ſed vndecima, duodecima et decima tertia cartilagine communi proceſſui xyphoideo adhaerentes, reliquae tres ſpuriae ſunt, libere inter muſculos abdominales fluctuantes; *vertebrae* colli 7. dorſi 17. lumborum 6.

PHYSIOLOGIA PEREGVSNAE.

Peregusna animal carniuorum eſt, vt omnes congeneres, *muribus* praeſertim victitans, in campis iisdem *tanaicenſibus*, quos inhabitat, frequentiſſimis, *marmota* ſcilicet, *criceto*, *ſuslica*, *iaculo* et *muſculo*; et inermem *ſpalacem* noſtratem ipſius praedam euadere, vix dubito. Saepius dum animalculum examini anatomico ſubieci, pilos horum animalium in ventriculo inueni. Miratus ſum politiam naturae in his campis vaſtiſſimis ſtabilitam, non arte humana turbatam; e numeroſiſſima plantarum cohorte, campos hoſce obſidente aſſignatae ſunt aliae inſectorum laruis, aliae auibus granluoris,

 ris,

ris, aliae quadrupedibus phytophagis nunc denominatis, vt aequilibrium inter plantas ſeruetur, ne vna ſpecie nimis multiplicata altera ſuffocetur et pereat. Sed iterum cauendum fuit, ne horum animalium numero nimis aucto nimia plantarum copia comedatur, et hac via plantae pereant; hinc ſapientiſſimus rerum conditor quam plurimas auium inſectiuorarum ſpecies e *Muſcicaparum Motacillarum* et *Hirundinum* familia, haud paucos aues ornithophagos e *Falconum Strygumque* gente et varia quadrupeda carniuora, quadrupedibus phytophagis infeſta, quae praeſertim e *Muſtelarum* tribu ſunt, eosdem campos inhabitare iuſſit. Sic tandem proportio ſeruatur, et optime obtinetur vltimus politiae naturae finis, eo vnice tendens, vt maximus, qui poſſibilis eſt, corporum organicorum viuorumque numerus in globo noſtro terraqueo adſit et laete adſit. Sed vela a via propoſita abducentia retraham, in poſterum in politiam naturae, in campis *tanaicenſibus* a me, ciue eorum per luſtrum integrum adſcripto et incola circumuagante, ſedulo obſeruatam vlterius commentaturus, ſi perſpexero, haec pauca arriſiſſe. Redeamus igitur ad *peregusnam* noſtratem, de cuius diaeta adhuc aliqua dicenda ſunt. Voraciſſimum eſt animalculum, et vix *Gulo* voracior ex naturali tractus inteſtinalis ſtructura; cum enim hic valde breuis, corpore vix triplo longior, nec interne valuuloſus ſit, citiſſime vt tranſeant cibi per anum et animalculum de nouo vt appetat neceſſe

ceſſe eſt. Haec communis fere omnium animalium mere carniuorarum conditio, et omnium maxime neceſſaria; nam ſi his tractus inteſtinalis adeo longus corporis longitudinem decies ſaepe excedens, et valuuloſus coecoque auctus contigiſſet, vt phytophagis contigit, caro comeſa, ad putrefactionem valde inclinans, certe ob remoram nimis diuturnam putrida euaderet in primis viis, et ſanguinem acrimonia nociua imbueret. Phytophagis autem iſta ſtructura optime conuenit, quia plantae nec facile putreſcunt, nec facile a partibus nutritiis priuantur, hinc eo diutius retinendae ſunt, vt omnia corpori animali vtilia extrahantur, et humoribus animalium aſſimilentur; hanc ob cauſam iis valuulae inteſtinales et coecum maxime conducunt. Ita omnia ſapientiſſime ſunt adornata. *Peregusnae* expoſui olera et panem ſed intacta reliquit; nec maſticationis organa ad vegetabilia comedenda apta ſunt, haec enim motu maxillae inferioris laterali conterenda et comminuenda ſunt; proceſſus autem condyloideus maxillae inferioris *peregusnae* adeo arcte reſpondet foſſae articulari oſſis temporum, vt nullus motus lateralis poſſibilis; nec ſuperficies articularis ante foſſam adeſt, hinc nec valde diduci poſſunt maxillae; dentes praeterea omnes ad plantarum partes conterendas ineptiſſimi, ſed ad carnem dilacerandam et praedam necandam aptiſſimi. Gallinam viuam oblatam mox pedibus prehendit, dentes femoribus gallinae infigens et ſanguinem auide ſugens; cibum nunquam palmis ori

 admo-

admouens: oua et mel intacta reliquit, nec comperi ab incolis, quod vnquam apiariis noxium fuerit, vt ſpecies quaedam congeneres ſolent; carnem ouinam et anſerinam aſſatam comedebat. Noctu praeſertim venatur; interdiu latitans in cauernis ab aliis animalibus effoſſis; attamen nec plane ignorat artem fodiendi; vidi enim animalculum funi alligatum ſat cito canalem oblique deſcendentem pedibus anterioribus in ſolo duro fodire.

Corpore flexiliſſimo abrupte ſaliendo, dorſo ſurſum curuato et cauda horizontaliter extenſa, currit et difficilius accipitur; arbores vix ſcandit, ſed in campis degit. Animal agiliſſimum oculis fulgentibus, vix vnquam dormiens et omni anni tempore apparens; iracundum et iratum acute fremitans, alias vix ſonum edens, caudam ſurſum et dorſum verſus pilis erectis flectens, magis ac antea foetens, caput erigens et dentibus oblata mordicus prehendens; vix cicur euadens.

Initio veris coitum celebrare, mares propter feminas rixas mouere, feminas poſt ſpatium bimeſtre catulos quatuor vel octo, validos et oculatos parere perhibent incolae; penes quos ſit in his fides, vsque dum propria experientia doctus certiora communicare potero.

HABITAT in campis apricis deſertis *Tanaicenſibus*, nondum alibi in *Ruſſia* obſeruatum animalculum nec adeo frequens; pellis ob pilorum breuitatem non

non aeſtimatur; in animalculo habitat PEDICVLVS *peregusnae* latus, rotundatus, antennis pediformibus, pedibus breuibus, tardigradis.

ICON ſtaturam corporis *peregusnae* iratae, partium externarum ſtructuram et magnitudinem naturalem optime exprimit; quam a congeneribus diſtinguo nomine hoc ſpecifico: Tab. X.

MVSTELA *pedibus fiſſis, capite et corpore ſubtus atterrimis; corpore ſupra brunneo luteoque vario; ore faſcia frontali, auriculisque albis.*

OVVM

OVVM SIMPLEX GEMELLIFERVM.

Auctore

C. F. WOLFF.

Exhibit. d. 22. Febr. 1770.

De ouis gemellificis Auctorum, quae proprie oua gemella ſunt.

Annus elapſus eſt inde, quod ouum oſtenderim Academiae Illuſtriſſimae, ſimplici vno vitello et duobus embryonibus inſtructum, ſex dies incubatum. Eius nunc deſcriptionem trado. Inter rariora equidem phaenomena illud referendum eſſe cenſeo, quum, quantum ſcio, a nemine hactenus huiusmodi ouum obſeruatum ſit. Agit quidem *Haruaeus* de ouis gemellificis et *Fabricius* ab Aqua pendente, ipſeque *Ariſtoteles* ſimilium ouorum mentionem faciunt, ſed intelligunt hi omnes per oua gemellifica non oua ſimplicia, id eſt vno ſimplici vitello inſtructa duobus embryonibus praegnante; ſed talia, quibus duplex vitellus inſit, quorum vterque ſuo proprio embryone gaudeat. *Gemellifica* inquit *Haruaeus* cum *Ariſtotelae* (Exercitatio XXIV. de ouis gemellificis) *oua ſunt e quibus gemelli prodeunt pulli; eaque binis vitellis praedita ſunt; qui in aliquibus tamen albuminis diſſepimento ſeparantur, quo minus inter ſe confuſi ſint; in aliis nullum eſt, ſed ſe mutuo contingunt.* Ipſe aliquoties eiusmodi oua duplicia vidi; neque enim adeo rara eſſe videntur. Plerum-

Plerumque ſolitis maiora ſunt, vt ex ſingulari ſua magnitudine, qua anſerinis ouis fere aequipollent, ſuſpicari poſſis, duplicem in iis contineri vitellum. Tamen etiam vidi, quae nihil ſolitam magnitudinem excedebant, quamuis duplici vitello inſtructa fuerint; et alia porro, quae notabili magnitudine ſe commendabant et nonniſi vnicum tantummodo vitellum continebant. Haec oua tanquam duplicia conſideranda eſſe exiſtimo, et vocari potius debere gemella oua, quam gemellifica vel gemellifera; ſiquidem vitellus proprie ouum conſtituit, qui ſolus in ouario exiſtit et in vtero denique albumine cingitur, cruſtaque ſua teſtacea obducitur. Quodſi igitur duo vitelli his ouis inſunt; oua duplicia vel gemella; haud vero gemellifica recte vocari videntur; quum quilibet horum vitellorum nonniſi vnum tantummodo fetum producit.

Clariora haec omnia euadent, ſi ad ortum horum ouorum reſpicias, qui haud difficilis intellectu, nec vllo modo dubius eſſe videtur. Conſtat nimirum experientia, naſci haec oua plerumque a gallinis maxime fecundis, aetate iunioribus et laſciuis. Quum albumina et teſtae ouorum in vtero demum vitellis addantur, vitellique in ouario et in toto ouiductu nunquam, niſi nudi, inueniantur; neceſſe eſt, dum oua gemella producuntur, vt bini eorum vitelli in ouario quidem atque in ouiductu perfecte adhucdum ſeparati a ſe inuicem exſtiterint, duoque

Ouorum gemellorum a veris gemellificis differentia.

duoque diuerſa oua repraeſentauerint; (nihil enim eſt in his locis, quo in vnum ouum coniungerentur) in vtero vero oportet, vt primum coniunctio facta ſit, cum commune albumen, vel teſta communis illis circumduceretur. Porro vero neceſſe eſt quoque, vt bini eorum ouorum vitelli ſimul in vtero contigerint (alioquin enim haud potuiſſent vna communi teſta obduci;) cum ordinarie nonniſi ſucceſſiue et ſolitarii vitelli in eundem deueniant, ſolitariaque oua naſcantur. Ita enim vterus comparatus eſt, vt vnum tantum ouum commode capere poſſit, nec alterum facile recipiat, niſi priori ante expulſo. Patet igitur ex his omnibus, oua gemella oriri, dum in gallina nimium fecunda duo praeter naturam vitelli ſimul in vterum ingeruntur. Dum enim hoc fit; vitelli comprimuntur; albumina eorum confunduntur; vel ſi diſtincta conſeruentur, compinguntur tamen in vnam molem globoſam, quae, dum materia nunc teſtacea, ab vtero ſuppeditata, obducitur, nonniſi vni communi teſtae formandae anſam praebere poteſt. *Haruaeus* l. c. monet ſe oua vidiſſe quorum bini vitelli compreſſi vno communi albumine cincti fuerint; ſed iterum alia quoque, quorum vterque vitellus proprio ſuo et diſtincto albumine gauderet, vbi ſola teſta communis eſſet. In quo caſu poſteriori nemo dubitabit, quin ex duobus compactis haec oua nata ſint. Verum etiam dum vnum albumen vtrumque vitellum cingere videtur, credo tamen, duo eſſe,

adeo

adeo compreſſa, vt difficilius diſtinguantur, quae vero diſtincta fuiſſent, ſi accuratius et curioſius examinata fuiſſent. Quicquid ſit, hoc facile patet, nihil aliud haec oua gemella proprie eſſe, quam duo diuerſa oua, in vtero in vnum compacta, teſta communi obducta. Sed aliter longe comparatum eſt cum praeſenti ouo gemellifero, quod ſimplici vitello, ſimplici albumine conſtans, vero ſenſu ſimplex eſt, omnique tempore et a prima conformatione ſimplex fuit, quod nunquam compoſitum ex duobus aliis eſt, et tamen duplicem embryonem producit; quod igitur, ſi ſimilem alium vitellum intra eandem teſtam ſecum incluſum haberet quemadmodum contingit in ouis gemellis, non duos, ſed quatuor, in hoc ouo ſpectares foetus.

Pauca adhuc verba addere liceat de his ouis gemellis prius quam ad noſtrum tranſeam gemelliferum. Quamuis non adeo rarum ſit offendere haec oua gemella, neque *Haruaeus* tamen neque *Fabricius* ab *Aquapendente* neque quisquam alius, quod ſcio, eadem incubata, eorumque foetus vidit. Neque hoc mirum eſt. Non omnia enim oua ſecunda ſunt; non omnia incubationi exponuntur, non omnia, quae incubationi ſubiecta ſunt, aperiuntur et ad examen vocantur. Quando vero pulli naturaliter excluſi ſunt, tum haud porro ſcire licet cuiusmodi ouum fuerit, ex quo pulli prodierunt. Inde factum eſt, vt *Fabricius* et *Haruaeus* diſſentiant reſpectu

De foetu ouorum gemellorum.

ſoetuum, quos oua gemella producerent. Monſtra putat *Fabricius*; nempe pullos, abdomine, pectore vel alia corporis parte connatos. *Haruaeus* gemellos potius credit inde prouenturos eſſe liberos, nullibi concretos, ſiquidem vitelli ſeparati a ſe inuicem, propriisque ſuis albuminibus cincti fuerint. Si vero contingat, vt vitelli, communi albumine incluſi, adeo ſint poſiti iuxta ſe inuicem, vt cicatriculae eorum (maculae) dum ſimul aperiuntur, vnum oculum (areolam pellucidam putat) conſtituant, tum equidem fieri poſſe, concedit *Fabricio*, vt monſtrum eiusmodi bicorporeum inde oriatur. *Ariſtoteles* nonniſi gemellos ex his ouis ſperauerat. Mihi quidem ipſa noſtri ſubiecti conditio et phaenomena, quae in eo apparent, ita ſuadere videntur, vt dicas, tota via erraſſe *Fabricium* ab *Aquapendente*; *Haruaeum* propius ad veritatem acceſſiſſe; acu rem tetigiſſe *Ariſtotelem.* Si enim ſeparati manere potuerunt embryones in ouo praeſenti qui ex vno eodemque vitello pullularunt; quantum cogentur minus vt coeant in vnum corpus monſtroſum illi, qui ex duobus diſtinctis vitellis oriuntur. Sed neque contiguitatem macularum neque ipſorum embryonum, ſiue in vno eodemque, ſiue in diſtinctis vicinis vitellis, producere poſſe eiusmodi monſtroſam concretionem, idem noſtrum ſubiectum demonſtrat; ſiquidem embryones in eo adeo ſibi propinqui in ſitu ſuo naturali fuerint, vt ſeſe contigerint inuicem, adeoque propiores ſibi nullo modo eſſe potuerint. Quin ipſa

haec

haec conditio, quam *Haruaeus* ad productionem monſtrorum requirit, vt vni nempe oculo gemelli embryones incluſi ſint, obtinuit in ouo noſtro, quemadmodum in ſubſequentibus (coroll. II.) patebit. Videntur ergo monſtra cauſam longe aliam habere; de qua re in proprio corollario (coroll. IV.) quaedam adhuc addam.

Oui, VI. dies incubati, naturaliter conſtituti, conditio.

Sex dies ouum noſtrum incubatum eſt, quo tempore ſcilicet oua in eo, quem breuibus verbis deſcribam, ſtatu inueniuntur, iisque phaenomenis ſtipantur, quae continuo dicam.

Albumen.

Albumen, a vitello retractum, verticem oui acutum occupat, mole imminutum eſt, ſpiſſiori conſiſtentia gaudet, maſſamque refert cohaerentem et tremulam, cum ante incubationem tenuius facile diffIueret totumque vitellum ambiret.

Vitellus.

Vitellus alteram oui partem, obtuſam, tenet. Mole auctus potius, quam imminutus eſt, quamuis inde embryo nutriatur; nam plus continuo ab albumine recipit, quam embryoni tradit. Tunicae eius eaedem ſunt, quae primo incubationis tempore; exterior nempe tenuis pellucida, vaſis omnino deſtituta; interior craſſior mollior, in qua area vaſculoſa exaratur.

Area vaſculoſa.

Area vaſculoſa, licet dimidiam vitelli ſuperficiem occupat, rarioribus tamen vaſorum ſurculis ornata eſt, minusque rubet quam die quinto, quo tem-

pore maxime floret. Adeoque in ſtatu decrementi nunc iam eſt. Quo enim veſicula vmbilicalis, inter tunicam vitelli exteriorem et interiorem contenta, quae primordium nouae tunicae vmbilicalis eſt, magis magisque increſcit, ſuperque globum vitelli extenditur; quo magis eius vaſa inflantur, et ſanguine turgent; eo magis ſenſim decreſcit area vaſculoſa; vaſa ſanguine ſenſim deplentur et euaneſcunt. Caeterum eadem ſemper vaſorum diſtributio in area vaſculoſa eſt. Praecipui trunci lateraliter de embryone egrediuntur, vterque eorum in ramum ſuperiorem et inferiorem diuiditur. Inter inferiores ramos media decurrit vera deſcendens, niſi iam euanuerit. Adſcendens, quae inter ramos ſuperiores adſcendit, hoc tempore raro ſupereſt. Denique terminalis, quae peripheriam areae deſcribit licet tenuior et debilior ſit, tamen ſufficit, vt area vaſculoſa euidenter a reliqua vitelli ſuperficie per eam diſtinguatur.

Areola pellucida.

Areola pellucida, quae interiorem areae vaſculoſae partem efficit, in qua embryo ſitus eſt, die ſexto iam prorſus euanuit. Producitur enim a membrana vitelli interiori, quae prope embryonem ab exteriori tenui pellucida ſoluta eſt, fluidumque pellucidum cum ea comprehendit; remotius, vero ab embryone, vbi proprie area vaſculoſa incipit, ſuperiori membranae ope materiae opacae albae adhaeret, in qua ramificationes vaſorum diſtribuuntur. Inde efficitur

vt

vt ſpatium areae vaſculoſae interius diſtinctum ab exteriori et pellucidum appareat; cum exterius, quod proprie aream vaſculoſam conſtituit, album ſit, et multis vaſorum ramificationibus ornatum. Illud igitur interius ſpatium areola pellucida vocatur, (vid. horum Comment. Tom. XII. Diſſ. de formatione Inteſtinorum. §. 22. fig.). Quodſi nunc die quinto et ſexto contingit, vt membrana vitelli interior per totum vitellum a ſuperiori ſoluatur; areola pellucida a vaſculoſa diſtincta eſſe ceſſat, adeoque euaneſcit.

Eandem ob cauſam amnium ſpurium quoque hoc tempore nullum inuenitur. Hoc enim ſimiliter a membrana vitelli interiori formatur, quae, continuata ex inteſtinis embryonis, prius quam extrorſum ducatur ad efficiendam areolam pellucidam, immediate circa embryonem reflectitur, bullamque producit, amnium verum vna cum embryone includentem, quae amnium ſpurium vocatur (vid. Diſſ. de form. Int. §. 36.). Hac bulla formata, membrana interior extrorſum tendit ad producendam areolam pellucidam. Dum igitur membrana haec interior ab exteriori, qua hactenus ſuſtenta fuit, ſoluitur; collabaſcit et bulla deſtruitur. Solae rugae quaedem irregulares in hac membrana relaxata, reliquiae priſtini amnii ſpurii, hoc tempore in eo loco reſtant. Amnium ſpurium.

Adeo-

Amnium verum eiusque et embryonis ſitus.

Adeoque exterius et vnicum embryonis inuolucrum proprium amnium verum eſt, quod continuatum ex orificio vmbilicali abdominis et reflexum circa embryonem, veſiculam refert, fabae fere magnitudine hoc tempore et figura, tenuem pellucidam, fluido repletam. Hoc amnium cum embryone ſuo inter vtrasque vitelli membranas haeret adeo, vt interiori incumbat, foueamque in ea producat, magnitudini et figurae amnii et veſiculae vmbilicalis, quae embryoni adnexa eſt, reſpondentem, ſatis profundam; dum exterior tenuis vitelli membrana recta et tenſa ſuper amnium tranſit; idemque in ſua ſuperficie ſuperiori tangit. In hoc ſuo ſitu amnium cum embryone detinetur partim membrana vitelli exteriori, quae, licet amnio non adhaereat tenſa tamen illud in ſuam foueam deprimit, partim interiori, quae ex inteſtinis embryonis continuatur. Cum exterior membrana vitelli perfecte pellucida ſit, amnium in vitello, licet integro, quaſi nudum ſed fixum in ſuo ſitu apparet. Vbi ea membrana remouetur, amnium mobile redditur, vt hinc inde volui poſſit, licet interiori membranae annexum ſit.

Veſicula umbilicalis.

Veſicula denique vmbilicalis vna cum amnio inter vtrasque membranas vitelli continetur; in eademque cum illo fouea ſita eſt. Exterior membrana ſuperficiei eius ſuperiori adhaeret. Ab interiori autem et ab amnio prorſus libera eſt, ſolique embryoni adnectitur, dum eius productio quaedam

et

et quaſi collum in orificium abdominis, quod idem ſimul amnii apertura eſt, ingreditur. Magnitudine paululum ſuperat amnium.

Hic igitur ſtatus naturalis eſt oui ſex dies incubati. Videamus nunc, quaenam ſingularia occurrant in ouo gemellifero reſpectu horum phaenomenorum. Deſcriptio oui gemelliferi (Tab. XI.)

Solitae magnitudinis ouum noſtrum erat. Albumen (Tab. XI. fig. 1. *a. a.*) vnicum ſimplex ſolitum in eo locum occupabat, ſolita magnitudine et conſiſtentia gaudebat. Albumen vnum, vtrique embryoni commune. (fig. 1. *a. a.*)

Vitellus ipſe (fig. 1. *b. b. b.*) ſimplex, nihil habet, quod praeter naturam aut conſuetudinem ſit. Situs magnitudo figura conſiſtentia quoque et ſtructura perfecte conueniunt cum ſtatu naturali. Exterior tunica tenuis pellucida, interior, vt eſſe ſolet, mollior, craſſior eſt. Vitellus vnus communis. (fig. 1. *b. b. b.*)

Prima pars (ſi ab exterioribus ad interiora et verſus embryonem progrediaris) area vaſculoſa eſt, (fig. 1. *e.*) in qua ſingularia quaedam occurrunt, quae prima duplicis embryonis indicia referunt, vel tanquam eius effectus conſiderari poſſunt. Area quidem ipſa vnica et ſimplex eſt omnino, vti vitellus; ſiquidem vnica ſimplici vena terminali (fig. 1. *c. c.*) nusquam interrupta, tanquam periphaeria circumſcribitur, nec vlla ratione in duas quaſi areas diuiſa inuenitur. Sed vaſa, in hac area exarata, du- Area vaſculoſa communis (fig. 1. *e.*)

 plex

plex ſyſtema ramificationis efficiunt, quamuis vtrumque non ſit plane perfectum; quod igitur primum quaſi duplicis embryonis veſtigium eſt. Quilibet enim embryonum binos ſuos, vt ſolitum eſt, truncos laterales emittit; vnde quatuor igitur, loco duorum, in area trunci reſultant. Embryo ſcilicet ſuperior (fig. 1. *f*) trunco laterali ſiniſtro (fig. 1. *p*. fig. 2. *i*.) et dextro (fig. 2. *h*.) gaudet. Embryo inferior (fig. 1. *g*.) trunco dextro (fig. 1. *u*. fig. 2. *q*.) et ſiniſtro (fig. 1. *t*. fig. 2. *r*.) inſtructus eſt. Tum porro vterque truncus embryonis ſuperioris, prout naturaliter fieri ſolet, in duos ramos, ſuperiorem (fig. 1. *q* et *r*.) et inferiorem (fig. 1. *s* et fig. 2. *l*.) diuiditur. Inferioris autem embryonis trunci haud porro in ſuperiores et inferiores ramos diuiduntur, ſed toti potius deorſum decurrunt ramosque inferiores referunt ipſi; ſuperioribus plane deficientibus. Cuius rei cauſa vicinitas alterius embryonis eſſe videtur, qui ramificationibus ſuis inferioribus illud ſpatium in area occupat, in quo hi rami ſuperiores ſeſe diſpergere debuiſſent. Denique vena deſcendens embryoni inferiori eſt ſatisſpectabilis (fig. 1. *v*. fig. 2. *s*.) cum ſuperiore embryo ob nimiam vicinitatem inferioris adeſtituatur. Vena terminalis caeterum, cuius pars tantum in hoc ſitu vitelli apparet (fig. 1. *c*. *c*.) vnica ſimplex eſt, vnam aream includens, in qua deſcriptae vaſorum ramificationes diſtribuuntur.

His.

His igitur conſideratis in vnica area vaſculoſa duplex vaſorum ſyſtema exaratum eſſe videtur, quamuis non plane perfectum, ſiquidem inferiori ſyſtemati rami ſuperiores deficiunt. Verum enim haec bina ſyſtemata adeo tamen ergo ſe inuicem poſita ſunt, vt ſimul ſumta haud obſcure vnum maius et commune referant. Trunci enim embryonis ſuperioris ramos ſuperiores exhibent ſyſtematis huius communis; dum rami eorum inferiores tanquam ſubdiuiſiones vel rami ſecundarii ramorum ſuperiorum conſiderantur. Trunci embryonis inferioris eo magis ſimplices ramos inferiores maioris ſyſtematis referunt, cum nullos ſuperiores ramos emittant, qui tamen ex veris truncis lateralibus oriri debent. Denique vnica, quae exſtat, vena deſcendens ſitu et magnitudine perfecte reſpondet maiori ſyſtemati, idemque adeo ſupplet. Nulla igitur non modo pars eſt, quae deficeret communi huic ſyſtemati, ſed nulla quoque arteria in area vaſculoſa datur, quae non aliquam huius ſyſtematis partem eſſentialem referret, vel ad illud recenſeri non poſſet. Solum hoc praeter naturam habet hoc ſyſtema, vt rami ſuperiores et inferiores, qui naturaliter ex vno trunco laterali vtrinque oriuntur, immediate ex ipſo embryone, et ſuperiores quidem ex embryone ſuperiori, inferiores ex inferiori prodeant. Si igitur hac ratione conſideratur haec vaſorum diſtributio; non proprium cuique embryoni ſyſtema erit, ſed vnum vtrique commune, adeo partitum, vt ſuperior em-

bryo partem eius ſuperiorem, ſeu ramos ſuperiores, qui loco truncorum ei ſunt, cum vena adſcendente, vbi ea adhuc exiſtit; inferior autem partem ſyſtematis inferiorem, ramos nempe inferiores cum vena deſcendente teneat. Omnibus igitur comparatis diſtributio vaſorum in area vaſculoſa aequiuoca eſt adeo, vt dubium ſit, vtrum vnum vaſorum ſyſtema, vtrique embryoni commune, an duo propria pro duobus ſint cenſenda. Similem conditionem areae vaſculoſae reperi quoque in ouo quodam III dies incubato, quod monſtrum bicorporeum gerebat, vbi accuratius etiam duo ſyſtemata vaſorum exprimebantur, quae ſimul ſumta egregie vnum referebant ſyſtema commune.

Amnium embryonibus deficit iique nudi vitello incumbunt.

Sed magis ſingularia, et quae minus a duplicitate pendere videntur, ſunt, quae circa ſitum et inuolucra embryonum in noſtro ouo occurrunt. Quum naturaliter embryo, amnio ſuo incluſus inter vtrasque membranas vitelli contineatur, adeo, vt exterior recta ſuper amnium tranſeat, idemque igitur vna cum foetu intra vitellum includat; embryones, noſtri non modo amnio plane carent, ſed extra membranam quoque vitelli exteriorem ſiti ſunt, adeo, vt vitello incumbant, opeque ſolorum vmbilicorum laxe et mobiles exteriori eius ſuperficiei adhaereant, (vid. fig. 1.) quod ſane non minus mihi mirum videtur, ac ſi ſemina in planta extra pericarpium prouenire, eiusque ſuperficiei externae pedun-

pedunculi ope adhaerere videres. Viuebat vterque embryo, cum ouum aperirem, et corda non modo eorum ſatis vehementer palpitabant, ſed motus quoque exercebantur voluntarii, quamuis non diu hi poſteriores continuarentur. Inexſpectatum igitur phaenomenon erat duos embryones inuenire liberos, mobiles, nudos, incumbere vitello.

Membrana amnii naturaliter ex orificio abdominis, ſeu vmbilico, oritur et continuatio cutis abdominis eſt. Inde continuo circa embryonem reflectitur ad formandum amnium. Funiculus enim vmbilicalis in auibus nullus exiſtit. Iam non facile exemplum inuenitur in corporibus animalibus membranae, vel tunicae, quae ſine, quaſi abſciſſo terminetur; ſed continuant membranae omnes in alias membranas, vel redeunt in ſe ipſas; vti cutis per os in villoſam tubi cibarii, et villoſa rurſum in cutem per anum continuat, vti cutis palpebrae ſuperioris in adnatam et porro in cutem palpebrae inferioris tranſit. Quodſi igitur in noſtris embryonibus amnium deficit, cutis abdominis per vmbilicum continuat in membranam vitelli exteriorem, quae tenuitate pelluciditate, totaque natura perfecte ſimilis eſt membranae amnii. Haec ergo vt amnium alias ſolet, cuti embryonis fundamentum ſuppeditat, ex quo deducatur.

Cutis abdominis eorundem in exteriorem vitelli membranam continuat Fig. I. *l. m.*

Quumque naturaliter embryo vno ſimplici pedunculo vitello adhaereat canali nempe breui com-

Inde duplicati pedunculi oriuntur

quibus embryones vitello adnectuntur.

communicatorio, qui productus ex inteſtinis in interiorem membranam vitelli continuatur; dum membrana vitelli exterior, vt ſaepius dixi, recta ſuper amnium tranſit, in nullamque vel amnii vel embryonis partem continuatur; embryones noſtri pedunculis gaudent duplici membrana conſtantibus, vel potius duplicibus, quorum alteri interiores ſolito modo ex inteſtinis in interiorem vitelli membranam continuantur, alteri exteriores, vaginas laxas prioribus ſuppeditant, quae ortae ex cute abdominis ad vmbilicum, in exteriorem membranam vitelli tranſeunt, ſpeciemque breuiſſimi funiculi vmbilicalis efficiunt, qui naturaliter in auibus prorſus non datur.

Situs embryonum.

Embryones adeo ſibi inuicem propinqui ſiti ſunt, vt tertius inter eos locum inuenire non poſſit, praecipue ob capita, quae ſe mutuo tangunt. Alter eorum ſuperior eſt, alter inferior. (Area enim vaſculoſa et vaſorum diſtributio regiones in vitello determinant). Quum ouum aperirem, embryones paulo aliter, quam nunc ſunt, ſiti erant. Qui enim transuerſales nunc vitello incumbunt, magis obliqui et fere perpendiculares ſecundum aream ſiti erant, magisque ſibi vicini, adeo, vt inferior capite ſuo regionem pubis ſuperioris occuparet, pedemque dextrum tegeret. Adeo caeterum poſiti ſunt embryones, vt facie corporis anteriori verſus ſe inuicem reſpiciant. Inde fit, vt ſuperior quidem

dem ſolito modo in latus ſiniſtrum, inferior autem praeter naturam in dextrum latus decumbat.

Hac ratione ſitis embryonibus cutis abdominis ad locum vmbilici primo conſtringitur, deinde continuo laxatur et in ſuperficiem vitelli, in tunicam eius exteriorem expanditur, rugasque producit nonnullas, breues, in vitellum diſperſas. Inter has vna praecipue notabilis eſt, quae ex vmbilico alterius embryonis recta in vmbilicum alterius tranſit et ligamentum quaſi efficit, quo vtrique embryones inter ſe coniunguntur (vid. fig. 1. *n.*). Alia eiusmodi plica (fig. 1. *o.*) priori parallela ad regionem pectoris embryonum poſita eſt. Spatium inter has plicas bullulis a membrana vitelli exteriori factis repletur. Plicae inter embryones in ſuperficie vitelli. Fig. 1. *l. m. n. o.*

Veſica vmbilicalis, cuique embryoni propria, ſolito modo inter tunicam vitelli exteriorem et interiorem collocata eſt. Apparetque in vitello integro, dum per tunicam eius exteriorem, vt fieri ſolet, transparet. Vbi exterior haec tunica in cutem abdominis tranſit; ibidem veſica quoque collo ſuo in cauitatem abdominis intrat. Caeterum minori copia fluidi repleta eſt, quam eſſe ſolet, vnde planior apparet. Magisque et firmius, quam naturaliter fieri ſolet, adnata eſt tunicae vitelli exteriori ſibi incumbenti. Veſica vmbilicalis. Fig. 1. *h. k.*

Diſſecto vitello in eius ſuperficie interna (quae ſcilicet membranae vitelli interioris ſuperficies inter- Orificia inteſtinorum in vitellum.

hiantia Fig. 2. interna eſt) ad eum locum vbi exterius embryones vmbilicis ſuis vitello adhaerent ſolito modo apertura reperitur , quae ad inteſtina ducit , quae ſcilicet apertura illius ductus eſt , quo mediante membrana interna vitelli in membranam inteſtinorum continuat. Cum hac membrana vaſa ſimul ex abdomine prodeunt , quae per aream vaſculoſam diſperguntur , quaeque in ſuperioribus deſcripſi. Eorum igitur ortus , quemadmodum fig. 2 docet , hic maxime apparet. Caeterum eaedem plicae , quas vidimus eſſe in membrana exteriori vitelli inter vtrumque embryonem, in hac interiori membrana obſeruantur, illisque perfecte reſpondent , adeo , vt non ſola exterior , ſed vtraque vitelli membrana ſimul ſumta illas plicas producat.

Orificium vmbilicale Fig. 3. Solui quoque membranam hanc interiorem ab exteriori , praecipue ideo , vt orificium abdominis , ex quo illa continuatur, in ſuperficie interiori membranae exterioris appareat. Fere eodem modo hoc ſe habet , vt naturaliter fieri ſolet , dum loco membranae vitelli amnii membrana ex abdomine continuatur. Figura 3. ſuperficiem membranae exterioris internam vna cum orificio abdominis demonſtrat.

In embryonibus ipſis nihil inſoliti reperi. Habitus externus aeque ac ſtructura viſcerum penitus ſecundum leges et ordinem naturalem ſe habet.

COROL-

COROLLARIA QVAEDAM.

Nulla cauſa eſt, cur putemus nullo omnio ſpurio, quod exiſtere poteſt, licet verum intra illud non exiſtat, embryones noſtros ſuo tempore indutos fuiſſe. Duplicitas enim embryonum non magis quam amnii veri defectus prohibet, quominus proprium ſuum cuique embryoni amnium ſpurium exiſtat. Sed plicae quoque et rugae et laxitas, quas inter vtrumque embryonem in membrana vitelli interiori aeque ac exteriori obtinere vidimus, quasque veſtigia eſſe monui amnii ſpurii reſoluti, ſatis indicant, hoc ſuo tempore, die tertio nempe et quarto medioque quinto non defuiſſe. Iam vero ex ſitu embryonis reſpectu membranae vitelli exterioris et interioris facile intelligitur, amnium ſpurium, ſeu bullam ex membrana interiori circa embryonem aliter formari non poſſe, niſi vt ſimilis bulla ex membrana exteriori ſimul formetur, quae ab illa priori includatur. Dum enim interior, quae ex inteſtinis oritur, inde circa embryonem reflectitur, vt bullam producat, fieri non poteſt, quin exterior, quae ex cute abdominis oritur indeque continuo interiori incumbit, aut impediat huius reflexionem circa foetum aut cedat eidem, adeoque eius ductum ſequatur, ſimilemque bullam interiorem producat; qua facta haec membrana, continuo interiori parallela et conformis cum eadem porro per areolam pellucidam, areamque vaſculoſam

Coroll. I. De ſtatu huius oui praeterito; in ſpecie de amnio ſpurio, et alio ſingulari quodam amnio

 tran-

tranſibit in tunicam vitelli. Porro plicae in membrana vitelli exteriori inter embryones et bullae ſimiles et conformes illis, quas in interiori membrana in eodem loco notauimus, ſatis euidenter demonſtrant hanc membranam aeque ac interiorem in bullam extenſam fuiſſe, quae quippe nunc reſoluta illam membranae laxitatem reliquerit.

Hac ratione igitur de ſtatu praeterito huius oui tertii nempe et quarti diei conſtat, qui, non minus quam praeſens, ſingularis fuit. Quilibet embryo proprio ſuo amnio ſpurio, praetereaque alio interiori indutus fuit, quod neque verum proprie neque ſpurium cenſeri poteſt; ſed medium quaſi locum inter vtrumque tenet, et tamen vicem veri hoc tempore praeſtat. Reſpectu figurae et compoſitionis ſimile illud eſt amnio ſpurio, ſiquidem non integram veſicam refert, ſed in parte ſuperiori apertum eſt. Reſpectu naturae membranae, qua conſtat, et reſpectu ortus ex cute abdominis amnio vero ſimile eſt.

Coroll. II. de areola pellucida. Quod areolam pellucidam attinet, nullum dubium eſt, eam, vti vaſculoſam, vnicam ſimplicem fuiſſe vtrique embryoni communem. Licet enim diebus praecedentibus, quo tempore illa floret, pars membranarum vitelli rugoſa embryonibus intermedia non conſumta fuiſſet in formandis amniis: tamen hoc ſpatium intermedium nimis longe anguſtum eſſet, vt duplicis areolae diſtinctae partes dimidiae in eo repraeſentari poſſint. Quodſi vero ſupponas,

ex

ex membranis vitelli amnia formata fuiſſe priori illo tempore; quemadmodum corollario praecedenti factum eſſe vidimus; tota haec pars membranarum intermedia, in formandis his amniis, quibus vix ſufficit, conſumta erit: amnia vtriusque embryonis vbique contingent ſpatium nullum intermedium reſtabit, adeoque omnino impoſſibile erit, vt diſtincta in hoc loco areola pellucida formetur. Caeterum magnitudine et figura tamen ita comparatam fuiſſe exiſtimo vnicam hanc areolam communem, vt duplicem in vnam confluentum, duplici embryoni communem, facile referat. Quum figura areolae, quae ſemper embryonis peripheriae conformis eſt, oblonga inde eſſe ſoleat, fine ſuperiori obtuſo, inferiori acuto terminata; haec, niſi quadrilatera, vix eſſe potuit. Eoque magis de hac re perſuaſus ſum, cum ſimilem conditionem in embryone bicorporeo, cuius in ſuperioribus mentionem feci, iam viderim.

Sic vnum in hoc ouo albumen commune, vnus vitellus communis, vna area vaſculoſa communis, quae tandem iam incipit aliquas duplicitatis notas in diſtributione vaſorum oſtendere; vna porro ſuo tempore, ſed maior, et quaſi ex duabus confluens areola pellucida; denique amnium ſpurium, et quod loco veri eſt, duplex, ſed tamen, vt puto, ob anguſtiam ſpatii, adhuc cohaerens. Embryo tandem perſecte duplex, perſecte ſeparatus.

Die primo et fere ſecundo incubationis vaſa in area vaſculoſa nondum formata ſunt. Areae ipſius primordium maculae inſtar, piſi magnitudine, albae in vitelli ſuperficie apparet, quod maculam vocant autores, ſeu cicatriculam. In hac macula areola quoque pellucida conſuetae figurae oblongae ſatis euidenter conſpicitur, quam oculum *Haruaeus* appellat. Primo igitur incubationis tempore vna macula in vitello fuit. In ea vnus oculus, ſed ſolito latior et figura quadrilatera; in hoc duo ſeparati embryones iuxta ſe inuicem collocati fuerunt. Ante incubationem, vbi ſola macula in vitello, ſine areola pellucida ſine embryone apparet, nihil inſoliti in hoc ouo ſe conſpiciendum praebuiſſet.

Coroll. III. De ſtatu huius oui futuro.

Veſicula vmbilicalis, quae vna cum amnio inter tunicam vitelli exteriorem et interiorem naturaliter ſita eſt, poſt diem decimum continuo increſcendo ſuper amnium in quo fetus continetur, indeque porro ſuper totum vitellum voluitur. Denique ad locum vbi albumen, quod mole nunc multum imminutum eſt, vitello adhaeret, qui locus ſedi embryonis fere oppoſitus eſt, veſica haec parietibus collapſis ſua circumferentia attingit, ſuperque ipſum albumen ſeſe extendit, membranam vitelli exteriorem, qua includitur, ſecum ferendo. Hinc alia oui inuolucra naſcuntur. Duplex enim veſicae collapſae paries duplex toti ouo inuolucrum ſuppeditat. Sed membrana vitelli exterior, quae vna cum

cum vitello amnium quoque omni tempore includit et nunc ſuper albumen quoque producta eſt, exteriori parieti veſicae adeo firmiter adhaeret, vt ab eadem ſeparari non poſſit, adeoque nonniſi vnicam cum hac, membranam efficiat, quam *Malpighius* chorion *Hallerus* membranam vmbilicalem appellat. Interior autem veſicae paries ſoli amnio ad nata eſt, a vitello libera manet. Sic duplex inuolucrum, idemque commune oritur, quod amnium, vitellum et albumen includit. Vitellus autem, qui hactenus duplici membrana, ſibi propria, gaudebat, nunc vna tantum gaudet; ea nempe, quae interior erat; cum exterior a chorio nuper nato, ſuper albumen protracta eſt, adeoque ad conſtituendum commune hoc oui inuolucrum concurrit.

Nunc facile intelligitur, in ouo noſtro; cum embryones, amnio prorſus deſtituti, extra vitelli membranam exteriorem ſiti ſint; veſicae autem vmbilicales ſolito loco intra eam contineantur; dum hae ſuper totum vitellum et albumen extenduntur, vitellique membranam externam, ſibi adnatam, ſecum ducunt; inuolucrum fore vt inde oriatur, vt naturaliter fieri ſolet, quod vitellum et albumen includat, choriumque *Malpighii* conſtituat, embryones autem nullo modo ab hoc chorio fore incluſos; quin potius eidem, vti nunc vitello nudi incumbent. Adeoque immediate ſub teſta iacebunt. Idemque ſtatus, vsque dum prodeunt pulli in lucem, manebit.

 Videntur

Coroll. IV. Num viuere poſſint huiusmodi faetus.

Videntur autem partui vix ſuperuiuere poſſe eiusmodi foetus. Vitellus enim qui naturaliter ex inteſtinis continuat, dum increſcente foetu ſenſim imminuitur, tanquam appendix inteſtinorum conſiderandus eſt; tandemque intra abdomen retrahitur; abdomen clauditur et vitellus magis magisque conſtrictus in partem inteſtini abit, quae a reliquo inteſtino tum porro diſtingui non poteſt. Quod ſi igitur vtraque horum foetuum inteſtina in vnum eundemque vitellum inſeruntur; vterque foetus hunc vitellum retrahere intra abdomen ſuum conabitur. Nullus dubito, ſi alter horum foetuum perfectus et maturus, alter paruulus embryo fuerit; quin ille hunc totum vna cum vitello abſorberet. Quum vero magnitudine non minus quam aetate aequales ſint; hoc nunquam contingere poterit. Quilibet ſuam vitelli partem, quatenus poteſt, retrahet; donec ad vmbilicos contingant. Tum aut connaſcentur vmbilicis ſuis, ſpeciemque partus exhibebunt, quam potius tamen foetus gemellos connatos, quam monſtrum vocarem, qui quippe foetus totis corporibus ſuis ſeparati, ſolaque breuis funiculi ſpecie connexi ſunt inter ſe; aut, quod magis veriſimile videtur, rumpet diſtractus vitellus, excutietur partim foras partim intra abdomen materia vitelli et inteſtinorum, qui caſus pullis lethalis eſſe videtur.

Coroll. V. Num monſtra fiant

Non probabile eſt, fieri monſtra ex gemellis compreſſis et concreſcentibus. Requirebat *Fabricius* ab

ab *Aquapendente* ad productionem monſtrorum vt duplex embryo in vno ouo naſcatur; licet ex diuerſis vitellis originem petat. Quamuis fieri poſſet, vt eiusmodi embryones dum ex diuerſis vitellis oriuntur, ſatis a ſe inuicem remoti ſint; tamen perſuaſus erat, coalituros eſſe eos in vnum corpus. Videmus in exemplo praeſenti, non modo in vno ouo ſed ex vno quoque eodemque vitello prodiiſſe duos embryones, eosque vna area vaſculoſa incluſos, adeoque propinquos vt propiores ſibi vix eſſe potuerint, tamen perfecte ſeparatos. *Haruaeus* aliud praeterea deſiderabat, vt oculi, quibus primo tempore embryones inſunt, ob vicinitatem confluerent in vnum oculum. Vidimus hos embryones adeo ſibi eſſe vicinos, vt non modo neceſſario oculi confluere debuiſſent, ſi quidem vnquam diſtincti exſtitiſſent, ſed vt fieri non poſſit, vt vnquam diſtincti exſtiterint; quin potius a primo principio nonniſi vni oculo vtrique embryones incluſi eſſe potuerint. Et tamen embryones ſeparati ad diem ſextum peractum vsque manſerunt. Quae ergo tandem ſufficiens concretionis cauſa eſſe poterit? Si dicas, fieri concretionem tempore ſeriori; dum embryones magis increſcunt, adeoque magis in ouo comprimuntur; conſiderandum eſt, partes adeo iam eſſe formatas omnes hoc tempore, die ſexto, vt, ſi deſtruerentur, quemadmodum ad formationem eiusmodi monſtrorum requireretur, nec partes denuo porro reſtitui, nec vita embryonum, durante hac corporum metamorphoſi

ex gemellis concreſcentibus.

phoſi conſeruari poſſit. Nec verum eſt, comprimi embryones in ouo eo magis, quo magis increſcunt. Quo enim magis embryones increſcunt, eo quoque magis reliquae partes, albumen et vitellus imminuuntur, adeo, vt eadem ſemper materiae quantitas in ouo conſeruetur. Sed maius argumentum offert ouum illud, cuius in ſuperioribus mentionem feci, monſtro perfecto bicorporeo inſtructum, quod nonniſi tres dies incubatum fuit. Hoc illud ſaltim demonſtrat, ad productionem monſtrorum non requiri eiusmodi foetuum compreſſionem, quae contingeret poſt diem ſextum ob incrementum foetuum.

Explicatio Tabulae.

Fig. 1. Ouum eſt teſta exemtum.

a. a. Albumen.

b. b. b. Vitellus. *c. c.* pars venae terminalis.

d. d. Pars vitelli extra aream, vaſis priuata.

e. Area vaſculoſa.

f. Embryo ſuperior. *g.* Inferior.

h. Pars veſicae vmbilicalis embryonis ſuperioris.

i. Fouca in vitello, a veſica eidem impreſſa.

k. Veſica vmbilicalis embryonis inferioris.

l. Vmbilicus embryonis inferioris.

m. Vmbili-

m. Vmbilicus embryonis ſuperioris.

n. Plica membranae vitelli, ex eius laxitate orta, inferior.

o Altera eiusmodi plica ſuperior.

p. Embryonis ſuperioris truncus lateralis ſiniſter.

q. Huius trunci ramus ſuperior.

r. Trunci lateralis dextri ramus ſuperior.

ſ. Ramus inferior lateris ſiniſtri.

t. Embryonis inferioris truncus lateralis ſiniſter.

u. Truncus lateralis dexter.

v. Vena deſcendens.

Fig. 2. Pars membranarum vitelli; cui embryones adhaerent, exſciſſa et inuerſa.

a. Pars membranarum exſciſſa.

b. Embryo ſuperior. *c.* Inferior.

d. Plica in membrana hac vitelli interiori; illi (fig. 1. *o.*) in exteriori membrana reſpondens.

e. Plica altera inferior, reſpondens illi in membrana exteriori (fig. 1. *n.*).

f. Orificium ductus inteſtinalis, ex quo cum membrana trunci vaſorum egrediuntur.

g. Limbus orificii vmbilicalis abdominis per membranam interiorem vitelli, illud tegentem transparens. (vid fig. 3.).

h. Truncus lateralis dexter embryonis ſuperioris.

i. Truncus eiusdem lateralis ſiniſter (fig. 1. *p.*).

k. Ramus dexter ſuperior.

l. Ramus dexter inferior.

m. Ramus ſiniſter ſuperior.
n. Ramus ſiniſter inferior.
o. Orificium ductus inteſtinalis alterius embryonis cum egredientibus vaſis.
p. Transparentis orificii vmbilicalis limbus.
q. Truncus lateralis dexter huius embryonis. (fig. I. *u*.).
r. Truncus ſiniſter eiusdem. (fig. I. *t*.).
s. Vena deſcendens. (fig. I. *v*.).

Fig. 3. Membrana vitelli interior ab exteriori ſoluta et reflexa, quo interna ſuperficies membranae exterioris et partes inter vtramque membranam contentae appareant.

a. *a*. Membrana vitelli exterior eiusque ſuperficies quidem interior.
b. Embryo ſuperior. *c*. Inferior.
d. Particula membranae interioris, qua haec in inteſtina embryonis ſuperioris continuabat, relicta, deorſum reflexa.
e. Particula eiusdem membranae, qua eadem in inferioris embryonis inteſtina continuauit.
f. Veſicula vmbilicalis embryonis ſuperioris.
g. Veſicula vmbilicalis embryonis inferioris. Hae veſiculae inter vtramque membranam vitelli continebantur. Apparebant in ſuperficie vitelli externa (fig. I. *h*. *k*.) dum per tenuem pellucidam membranam exteriorem transparebant. Nunc ſeparatis membranis diſtinctius apparent.

h. Orificium

h. Orificium abdominis vmbilicale, per quod membrana interior vitelli, ex inteſtinis continuata, vna cum vaſis egreditur.

i. Idem in embryone inferiori.

k. Trunci vaſorum areae ex cauitate abdominis prodeuntes, partemque inteſtini inter ſe continentes, quae arcum producit, ex quo ductus inteſtinalis in membranam interiorem vitelli continuat.

l. Plica (fig. 1. *o.*).

m. Plica (fig. 1. *n.*).

DESCRIPTIO
PISCIS, E GADORVM
GENERE, RVSSIS NAWAGA DICTI, HISTORICO-ANATOMICA.

Auctore

I. T. KOELREVTER.

Exhibit. d. 22. Febr. 1770.

Tab. XII. Capitis antica pars, ſc. ab oris extremo ad oculorum marginem poſticum, plagioplatea eſt, poſterior vero cathetoplatea, vti ex dimenſione inferius exponenda patebit. Ceterum reſpectu trunci magnum eſt caput, et quod formam cum Gadi *Lotae* capite plurimum conuenit.

Dorſum ab initio conuexum, ad primam et ſecundam ipſius pinnam parum contractum, inter ſecundam et tertiam vero planiuſculum, leuiterque carinatum.

Color in antica capitis parte, ſc. ab oris extremo ad nares vsque fuſcus ac immaculatus, potior vero capitis pars, dorſi ſummum, eiusdemque latera, ad apophyſes transuerſas vsque, digiti tactu facile percipiendas, lituris cinereis fuſcisque variegata, quarum

eae

eae, quae circa primam dorſi pinnam, lineaeque longitudinalis arcum apparent, viuidiores reliquis ſunt. Mutatur color mox infra dictas apophyſes, et per vtrumque abdominis latus ſubargenteum induit ſplendorem, pallide coeruleſcenti teſtaceoque permixtum, punctisque innumeris, nigris, confluentibus adſperſum.

Ambitus maxillae inferioris ſordide albet. Tota pectoris abdominisque inferior facies candicat. Pinnae dorſales, vna cum caudae prima verſus ambitum fuſcae, baſin verſus pallidiores; margo tamen huius extremus flaueſcit. Pinnae pectorales e fuſco flaueſcentes. Pinnae ventrales ſordide albent, inque flauum aliquantum vergunt. Pinnae duae ani flaueſcentes, praeprimis poſterior. Regio circa anum ſubfuſca. Mandibula ſuperior 1 $\frac{1}{3}'''$ inferiore longior, hinc clauſo ore nonnullae dentium ſeries ad iſtam prominent, quae hac non conteguntur. Narium vtriusque lateris diameter longitudinalis 3''', transuerſa 2''' exaequat; ambitus autem ipſe oualis eſt. Foramen earundem anterius paruum membranula coarctatur, poſtico ipſius margini adnata; poſterius patulum, ac velamento carens. Oculi magni, circa marginem orbitae ſuperiorem ac poſticum membrana nictitante, ſemilunari, punctisque nigricantibus conſperſa, muniti. Iridis colorem deſignare vetat mutatio, quam oculorum humores iterata congelatione ac regelatione paſſi ſunt. Membrana branchioſtega

 ſeptem

ſeptem oſſiculis vtrinque inſtructa eſt, quorum ope pectoris regionem verſus late extenditur.

Dentes vtraque maxilla continet, ſuperior tamen plures ac fortiores, quam inferior. In iſta ſeries eorum circiter tres quatuorue, in hac duas numeraui, hinc inde interruptas. Omnes hi dentes acuti, ac retrorſum leuiter incuruati, a prima ſeu extima ſerie ad intimam ex ordine, quo ſe inuicem excipiunt, magnitudine decreſcentes. Praeter hos ad diſtantiam 2 ½''' a primo maxillae ſuperioris dentium ordine area occurrit, duplici dentium ſerie compoſita, duoque trianguli obtuſanguli latera referens, cuius poſticum ab iisdem inane relictum eſt. Hi ipſi vero dentes a reliquis figura et directione haud diſſimiles. Praeterea quoque palati oſſicula duo, ſubrotunda ac aſpera rotunda ſunt, ciborum contritioni ſine dubio inſeruientia.

Diſtantia vnius lineae ab extremitate anguli maxillae inferioris barbula dependet ſubulata, flaueſcens 2''' longa.

Linea longitudinalis, ab initio latior, leuiſſimo ſub arcu pinnae dorſi primae principium verſus flectitur, dorſi ſummo propior facta, quam abdominis imo; abhinc vero breui ſpatio oblique deorſum ac retrorſum flexa, rectilineo dein ſub curſu, mediumque fere trunci tenens, ad caudae extremitatem vsque procedit.

Pinnae

Pinnae pectorales radiorum 21, (*a*) ad baſin 4½‴, expanſae vero 1″, 5‴ latae, ab antica facie pallidiores, quam a poſtica. Primus radius ſimplex, ceteri omnes ramoſi, quatuor vltimis exceptis, qui pariter, ac iſte, ſimplices ac indiuiſi ſunt. Radii 1 et 2 tribus ſubſequentibus vix vel parum breuiores, 3, 4, 5 omnium longiſſimi, reliqui ex ordine iterum longitudine decreſcentes.

Pinnae ventrales radiorum 6; primo, ſecundo ac ſexto, ſimplicibus, ceteris ramoſis. Horum primus paullo breuior, ſecundo omnium longiſſimo; ſequentes ex ordine breuiores.

Pinna dorſi prima ſub erectione triangularis, radiorum 13; quorum primus fortis, ſecundo, qui omnium longiſſimus eſt, ac pollicis longitudinem aequat, parum breuior, eidemque proxime iunctus; ſequentes ad vltimum vsque ex ordine breuiores. Rad. 1, 2, 11, 12 et 13 ſimplices, reliquorum extremitates ramoſae.

Pinna dorſi ſecunda radiorum 20; primus, ſecundus et ex vltimis duo vel tres, ſimplices, ceterorum extremitates diuiſae. Primus 8‴, ſecundus

(*a*) In aliis indiuiduis radiorum numerus ſequens erat:

α.	Longit. piſc.	9″, 4‴.	Pin.	P. 21.	V. 6.	D. 14. 20. 22.	A. 24. 24.
β.	— —	9″, 8‴.	—	P. 19	V. 6.	D. 13. 20. 22.	A 24. 23.
γ.	— —	9″, 9‴.	—	P. 20.	V. 6.	D. 13. 16 22.	A. 21. 23.
δ.	— —	10″,	—	P. 20	V. 6.	D. 13. 19. 20.	A. 22. 23.
ε.	— —	10″, 3‴.	—	P. 19.	V. 6.	D. 12. 20. 24.	A. 22. 23.

dus $10'''$, tertius et quartus $11'''$ longi; ſequentes ad vltimum vsque, cuius longitudo $1\frac{1}{3}'''$ eſt, ex ordine breuiores. Principium huius pinnae, ſi ex eo linea perpendicularis deorſum ducatur, aliquantum ab ani regione recedit.

Pinna dorſi tertia radiorum 25; increſcunt hi longitudine a primo ad ſeptimum; hic ipſe, octauus et nonus omnium longiſſimi, reliqui vero ad vltimum vsque iterum decreſcunt. Simplices eſſe videntur 1, 2, 3, 4, 22, 23, 24 et 25, ceteri in extremitatibus ramoſi.

Pinnae ani prima radiorum 23; ſimplices horum ſunt ac indiuiſi 1, 2, 3, 4, 19, 20, 21, 22 et 23; reliqui omnes bipartiti. Increſcunt longitudine a primo ad ſextum, abhinc iterum decreſcunt ad vltimum vsque.

Pinna ani ſecunda radiorum 25, quorum 1, 2, 3, 4, 5, 22, 23, 24 et 25 ſimplices eſſe videntur, ceterorum omnium extremitates vero ramoſae. Longitudo eorum, a primo ad ſeptimum, omnium longiſſimum, increſcit, ab hoc vero ad vltimum vsque decreſcit.

Pinna caudae radiorum circiter 40-44, ad extremi marginis medium leui exſciſa ſinu, quem radii ipſius intermedii proximis lateralibus aliquantum breuiores efformant. Ani oſtium ſtylum tenuiorem facile admittebat, orificiumque ouiductuum com-

commune adeo amplum erat, vt pennae anſerinae extremitatem facile reciperet.

ANATOME.

Ventriculus, in abdominis medio ſitus, maxima ſui parte pylori appendicibus obtegebatur, ex imo hypochondrii dextri prouenientibus, ac ſuper eius ſuperficiem late diſtributis. Ex eiusdem hypochondrii imo prodibat infra appendices infimas et iuxta ventriculi fundum pars inteſtini recti oblique deorſum ducta, quae, ſimul ac abdominis medium attigit, rectilineo dein curſu anum petebat. Hepar in duas partes erat diuiſum, quarum vna, in dextro ſita hypochondrio, breuior ac minor mole mihi viſa eſt altera, in ſiniſtro collocata. Huius extremitas inferior, ouario eiusdem lateris contigua, in duos iterum ſubdiuiſa erat lobos, transuerſim ad abdominis anteriora inflexos, quorum ſuperior, inferiore longe breuior, ſiniſtrum ventriculi latus leviter tantum lambit, inferior autem ipſam huius faciem poſticam ac infimam ſubiit. Subrubelli adhuc erant hi lobi, firmaeque ſatis ſubſtantiae, cum reliquum huius viſceris iam exalbidi coloris fuerit, ac liquationi putridae proximum. Margo lobi longioris inferior a diaphragmate 1″, 11‴, ab ani orificio 10‴ diſtabat. Media, eaque anterior hepatis portio, ventriculi ſummitati, ſuperioribusque, apophyſibus transuerſis ſuperſtrata, a ſummo ad imum 7‴ longa. Poſtica hepatis portio magno ac pro-

 fundo

ſundo ſinui ad vtrumque oeſophagi latus conſpiciendo, immerſa, nec, niſi prius vaſa ſanguinea, quorum ope hoc viſcus diaphragmati cohaeret, diſſecta fuerint, e cauitate ſua facile extrahenda. Veſicula fellis pallide viridis ſub dextrae ac poſticae portionis imo deliteſcebat, et cum eadem connexa erat.

Duodenum ab initio ſtatim leuiori ſub arcu diaphragma verſus aſſurgens, mox deflectebatur, ac peritonaeum inter dextrumque ouarium decurrebat, colorem huc vsque ſeruans e rubicundo teſtaceum, hinc vero ſub forma coli, mutato priſtino colore in nigricantem, in diſtantia 6‴ ab ano reflexum, interiora verſus adſcendebat, cumque priori tractu a latere interno contiguitatem ſeruabat ad arcus duodeni concauitatem vsque, ſub qua recti ſub facie denuo inflexum, introrſum deorſumque deſcendebat, tandemque recta via inter vtrumque ouarium iter ſuum ad anum vsque proſequebatur. Ductus choledochus ſatis breuior, circa poſticam principii duodeni faciem, $1\frac{1}{2}$‴ infra appendices eidem inteſtino inſeritur. Oeſophagus 4‴ circiter longus, totidemque in medio, vbi anguſtior erat, latus, in ventriculum deſinebat ab initio ſtatim ampliatum, circa medium ſpatioſiorem, ad fundum vero denuo anguſtiorem. Longitudo ventriculi 1″, 8‴, maxima ipſius latitudo 10‴. Ex huius fundi dextra parte pylorus oritur, dextrorſum ac oblique surſum flexus, a baſi ſua, ad quam maximam habet ampli-

amplitudinem, ad ipſius finem magis magisque contractus. Longitudo pylori 7''' circiter, latitudo ad baſin 4''', eademque ad finem circa appendicum exortum, $\frac{2}{3}$'''. Appendicum pylori, pancreatis vices explentium, numerus quadraginta ſeptem (*b*) erat. Binae vtplurimum ad baſin ſibi connexae, rarius vna vel altera ad inſertionem vsque diuiſa. Dimidia earum circiter pars poſteriora ventriculi verſus reflexa. Longitudo maiorum 9'''. Oeſophago, ventriculo et pyloro diſſectis, in oculos ſtatim incurrit maſſa informis fuſca, totum ventriculum replens, quae exemta et aqua abluta nil aliud eſſe viſa eſt, quam maximus vermis, ſine dubio marinus, cuius cuticula albida, concoctionis iam perpeſſae ſigno, corporis nexu ſoluta, hinc et inde fluctuabat. In alius indiuidui ventriculo ſpinam dorſi clupeae integram, eiusdemque piſcis ſquamas nonnullas veſicamque natatoriam, nec non Entomi pyramidalis *Klein.* dub. 38. f. 1. 2. pedem reperi; ex quo eſcam Gadi noſtri facile harioleris. Interior oeſophagi ſuperficies ab iſta ventriculi non tantum colore albicante, ſed et rugis pluribus longitudinalibus, obſoletioribusque erat diſtincta, cum in huius inferiore potiſſimum parte ſex tantum, easdemque profundius exaratas, numerauerim; pylori vero ſuperficies laeuis omnino apparuit, rugis-

Qqq 2 que

(*b*) In alio indiuiduo 41. numeraui; it. 42. in alio.

que plane carens. Ad initium pylori iugum eminentius transuerſim protendebatur, pro ipſa huius valuula habendum. Principium duodeni praeter appendicum oſcula et proxime infra haec ductus cholidochi oſtium obſoletum, ſetamque facile admittens, memoratu dignum nihil habebat. Liquor duodeni craſſior quidem, non tamen tenax, particulis terreis, albentibus mixtus. Colon et rectum recremento nigricante reſerta. Sphincter ani ex fibris tam longitudinalibus, quam transuerſis, rubentibus, facile cognoſcendus. Lien e ſpadiceo rubens, figurae valde oblongae ad poſticam dextramque ventriculi faciem, proxime ſub pyloro ſitus. Ouaria duo, longa, valde turgida, diſtincta, ſupra orificium vtrique commune ad $2'''$, infra idem ad $6'''$ vsque, in vnum corpus coalita, extremitatibus vero a ſe inuicem denuo ſeiuncta. Horum dextrum, ſiniſtro paullo maius. Singulum quoque a ſummo ad imum propria cauitate donatum, et ad concretionis locum ſepto intus interpoſito vnum ab altero erat diuiſum. Quodlibet etiam proprio orificio in ouiductum vtrique communem proxime patebat. Lactes marium lobatae.

Peritonaeum album, punctis nigris vndique adſperſum, plurimis quidem ad latera et iuxta apophyſes transuerſas, rarioribus vero, immo rariſſimis ad mediam ac anteriorem abdominis partem. Membrana haec, totam huius ſuperficiem circumdans, ſuper veſicam aeream quoque expandebatur, eidem-

que

que arcte ſaepius adhaerebat. Cauum abdominis circa anum haud terminatur, ſed ad 1'', 3''', pro veſica vrinaria ouariorumque extremitatibus recipiendis, vlterius ſe extendit.

Veſica aerea ſimplex, ſubſtantiae albicantis, mollis ac in pultem facile conterendae, figurae valde oblongae et ad ſummitatem bicornis, ſub peritonaeo ad dorſum, quam longum eſt, excurrebat, apophyſibus transuerſis firmiſſimo ac indiſſolubili nexu vtrinque iuncta. Modo dictarum autem ſpinae dorſi apophyſium fabrica omnium maxime ſingularis eſt: conos enim ſingulae excauatos et ad baſin oblique exſciſos referunt quorum cuncta lumina veſicae cauitati directe reſpondent. Cornicula veſicae ſupra memorata tubuloſa, ſubſtantiaeque huic conſimilis, duplici inflexione duo iſta palati oſſicula verſus exporrecta ſunt, ac apicibus ſuis vix duarum triumue linearum interuallo ab iisdem diſtant, altera parte, eademque anguſtiore, penitus occluſa, ampliore altera in veſicae cauum patentia. Ductus aerei ne veſtigium quidem aderat. Renes, coloris e cinereo-nigricantis, per ipſum veſicae natatoriae diſſectae latus poſticum translucebant, a capite ad huius extremitatem vsque extenſi, et in vnum corpus coaliti. Ex horum fine, inter apophyſium transuerſarum dextri lateris decimam ſextam ac decimam ſeptimam vreter proueniebat ſimplex, verſus veſicae vrinariae fundum oblique excurrens. Haec ipſa vero pinnae ani primae parti

anteriori e diametro oppoſita, ouariorum coniunctioni ita reſpondet, vt collo ſuo oſtium horum commune, fundo vero abdominis finem reſpiciat. Flatu diſtenta eadem, in ſubcylindricam formam ſe mutauerat. Vrethra breuiſſima, orificio ſuo nonnihil producto, circa marginem oſtii ouiductus communis dextrum ac poſticum, ex aduerſo papillae alicuius rubicundae, prominebat. Coſtae vtrinque 14 circiter numero, ſubteretes, leuiter arcuatae, ac cartilaginum ope partim ipſis vertebris primoribus iunctae, partim apophyſium transuerſarum faciei poſticae leuiter adnatae. Apophyſes transuerſae in dextro latere 20, in ſiniſtro 19; prima illarum e quinta, harum prima e ſexta demum vertebra exorta. Vertebrae in vniuerſum 58 circiter.

Piſces hi pelagici Ianuario menſe Petropolin aduehuntur congelati, et a multis in deliciis habentur. Quod reliquum, Gadum hunc noſtrum, non obſtante radiorum numero aliquatenus diuerſo, quem in vnius eiusdemque ſpeciei indiuiduis ſaepius variare quotidiana me docit experientia, eundem eſſe, nullus dubito, qui a Cel. *Linnaeo* in ſyſt. Nat. ed. 10. p. 252, n. 2. vocatur:

Gadus (*Callarias*) tripterygius cirratus varius, cauda integra, maxilla ſuperiore longiore. In. Suec. 293.

Gadus dorſo tripterygio, ore cirrato, colore vario, maxilla ſuperiore longiore, cauda aequali. Art. gen. 16. ſyn. 35. ſp. 63.

Gadus

Gadus balthicus Torsk. *Linn.* It. vel. p. 87.
Gadus callarias balthicus. Eiusd. It. ſcan. p. 220.

Menſura.

	Poll.	Lin. paris.
Longitudo tota, ſç. ab oris extremo ad longiorum pinnae caudae radiorum apices	10.	5.
- - ab oris extremo ad extremitatem corporis ſquamoſam - - - - -	9.	$7\frac{1}{2}$.
A mandibulae ſuperioris extremo ad oculi medium - - - - - - - -	—	$11\frac{1}{2}$.
- - - ad principium pinn. pectoralium	2.	4.
- - - - - - - pinn. ventralium	2.	
- - - - - pinn. dorſi primae	3.	4.
- - - - - - - ſaecundae	4.	8.
- - - - - - - tertiae	6.	$9\frac{1}{2}$.
- - - - - pinn. ani primae	4.	$5\frac{1}{2}$.
- - - - - - - - ſecundae	6.	8.
Longitudo pinn. pectoral. - - -	1.	4.
- - pinn. ventral. - - -	1.	3.
- - pinn. dorſi primae, ad baſin -	1.	$1\frac{1}{2}$.
- - - - ſecundae, ad baſin -	1.	10.
- - - - tertiae, ad baſin -	1.	7.
- - - - pinn. ani primae, ad baſin	2.	
- - - - - - ſecundae, ad baſin	1.	7.
- - - - pinnae caudae, in medio	—	$8\frac{1}{2}$.
ſc. a primis radiis marginalibus, ſeu ab eius principio ad longiorum radiorum apices	1.	$7\frac{1}{2}$.

Longi-

	Poll.	Lin. paris.
Longitudo a mandibulae ſuperioris extremo ad narium foramen anticum - -	—	$5\frac{1}{2}$.
- - - - poſticum - -	—	7.
- - - ad marginem oculi anticum	—	$8\frac{1}{2}$.
- - - - ad angulum operc. branch. ſuperiorem - - - - -	2.	2.
- - - - ad operculi branch. extremum ac poſticum marginem oſſeum - -	2.	3.
- - - - ad lineae longitudinalis principium - - - - - -	2.	2.
- - - ad anum - - -	4.	4.
- - - - ad oſtium ouiductuum commune - - - - - -	4.	5.
Diameter oculi orbitae - - -	—	$5\frac{1}{4}$.
Diſtantia inter primi pinn. pect. primique pinn. vente. radii baſin - - -	1.	
- - vltimi pinn. dors. primae primique pinn. dors. ſecundae radii baſin	—	$3\frac{1}{2}$.
- - vltimi pinn. dors. ſecundae, primique pinn. dors. tertiae radii baſin	—	7.
- - vltimi pinn. dors. tertiae, primique pinn. caudae radii baſin - -	—	5.
- - vltimi pinn. ani primae, primique pinn. ani ſecundae radii baſin - -	—	$4\frac{1}{2}$.
- - vltimi pinn. ani ſecundae, primique pinn. caudae radii baſin - - -	—	5.
principium. pinn. ventral. et anum	2.	7.

Lati-

	Poll.	Lin. paris.
Latitudo horizontalis per nares - -	—	$11\frac{1}{2}$.
- - - - per oculorum axes	1.	1.
- - - - per pinnarum pectoralium principium - - - -	1.	6.
- - - - per principium pinnae dorſi primae - - - -	1.	3.
- - - - - - - ſecundae	1.	
- - - - - - - tertiae	—	6.
- - - - - - - caudae	—	3.
Latitudo perpendicularis per nares - -	—	8.
- - - - per oculi medium	—	11.
- - - - per principium pinn. pect.	1.	7.
- - - - - - dorſi primae	1.	8.
- - - - - - - ſecundae	1.	8.
- - - - - - - tertiae	—	11.
- - - - - - - caudae	—	5.
Interuallum, quo primi pinnarum ventralium radii a ſe inuicem diſtant. - - -	—	7.

DESCRIPTIO
QVORVNDAM ANIMALIVM.

Auctore

I. LEPECHIN.

Exhibit. d. 15. Mart. 1770.

No. 1.

Tab. XIII. Fig. 1. (Князїокъ) Parus dorſo dilute caeruleo inferne albus capite albo taenia ad oculos et medio abdomine macula oblonga ex atrocaeruleis faſcia alarum media alba.

Craſſitie parum maiorem adaequat.

Longitudo ab apice roſtri ad extremum caudae 5. poll. et 7. lin. Longitudo caudae 2. poll. 5. lin. Longitudo roſtri 4. lin. Tibiae pennis denudatae $6\frac{1}{2}$. lin. digitorum medius cum vngue 6. lin laterales paulo ſunt breuiores. At poſterior digitus validior et vnguis longior. Alae explicatae 7. poll. et 4. lin. complicatae modo ad $\frac{1}{3}$ caudae extenduntur.

Roſtrum breue, lateraliter compreſſum, ex caeruleo nigricans, marginibus mandibularum ſordide albis. Nares exiguae, rotundae, tectae pennis antrorſum procumbentibus, rigidiuſculis, breuibus, albis: frons, vertex, genae, gula, collum, pectus, atque

atque abdomen alba ſunt; excepta macula irregulari oblonga, caerulea, quae a pectore ad medium protenditur abdomen; a regione narium per oculos ducitur taenia ſat euidens caerulea ad concolorem nuchae faſciam latiorem; infra quam alia faſcia albidior conſpicitur. Dorſum atque vropygium dilute caeruleum, tectrices caudae ſuperiores intenſe caeruleae, apicibus albis, inferiores albae; tegetes alarum ſcapulares, quae itidem caeruleae, ſecundum earum ordinem conſtituunt pennulae longiores fere ex toto albae, vnde faſcia alba in alis apparet. Remiges 18 albo plumbeo et caeruleo variae. Caeruleus color conſpicitur in vexillo externo, a principio ad medium; reliquam partem albus occupat color, ita vt numerando a prima remige caeruleus color increſcat, albus vero decreſcat, et in reliquis in modum maculae albae terminalis appareat. Plumbeus color vexillum internum occupat excepto margine albo, qui eadem lege vt caeruleus increſcit, et in remigibus poſterioribus cum macula terminali confunditur. Vltima remigum penitus alba. Caudam 12 rectrices conſtituunt, quarum duae mediae fere ex toto caeruleae, et modo apice vexilli externi albent. Reliquarum et longitudo et caeruleus color ſenſim decreſcunt. Albus vero augetur ita vt vexillum extimarum album ſit omnino; pedes cum vnguibus nigri.

Habitat in virgultis circa Synbirsk, ſed copioſiſſime in montibus hyperboreis. Cantillat in

modum paſſeris domeſtici, ſed voce tenuiori et ſuaviori. An parus indicus Aldrov. Ionſt. Willigh. Rai?

No. 2.

Tab. XIII. Fig. 2. Sterna Tſchegraua. чеграва.

Sterna ſuperne ex albo cana, inferne niuea, capillitio nigro albedine irrorato, roſtro coccineo pedibus nigris.

Longitudo totius 1. ped. 10½. poll. pars crurum pennis denudata 6. lin. reliquus pes cum digito et vngue 1. poll. et 11. lin. membrana palmarum longior, quae medium eum extimo iungit. Alarum extremitates 3. pedum et 2. pollicum interim albo diſtant. Rectricum longiſſimae 5. poll. et 6. lin. adaequant.

Roſtrum coccineum, nares nudae, lineares, ſulcatae, oculi nigri iride obſcura, frons, capillitium, et occiput, intenſe nigra ſunt hinc inde albedine irrorata. Oculorum ambitum itidem nigredo amplectitur, excepta parua lunula albicante in palpebra inferiore. Genae, collum lateraliter, vropygium vtrinque atque tota auis ſubtus niuea; ſuperne vero ex cinereo cana. Remiges 6. primores ſaturate cinereae marginibus apicibusque vndique nigricantibus. Reliqua remigum cohors dorſo concolor eſt. Cauda forcipata 12. rectricibus niueis conſtat.

ſtat. Pedes omnino nigri. Ad mare caſpium frequentiſſima; voce riſum aemulatur.

No. 3.

Fringa inferne alba, ſupra nigra lituris longitudinalibus flaueſcentibus, faſcia alarum alba, pedibus lobatis. Tab. XIII. Fig. 3.

Longitudo 6. poll. et 11. roſtrum 10‴. pars crurum pennis denudata 6. lin. digitorum medius cum vngue 9. lin. laterales paulo ſunt breuiores, poſticus breuiſſimus. Extrema alarum aue volante 11. poll. cum interuallo diſtant. Alae complicatae paululum vltra caudae extremum protenduntur.

DESCRIPTIO.

Roſtrum nigrum gracile apice incuruum, nares pro more gentis, oblongae lineares. Frons albet capillitium nigrum eſt. A quo protenditur taenia eiusdem coloris per nucham atque collum ſuperius vsque ad regionem ſcapularem. Retro canthum oculi poſteriorem conſpicitur macula oblonga itidem nigra, per lineam albam a fronte ad occiput ductam, capillitio diſtincta; ſpatium genarum, colli lateraliter et ſubtus, pectus atque abdomen alba ſunt; dorſum vt et tegetes alarum ex fuſco nigrae lituris flauicantibus oblongis adornatae, vltimus tectricum ordo apicibus omnino albet, vnde quaſi faſcia alba media in ala conſpicitur. Remiges 4.

primores nigri, rachi alba, poſteriores per vexillum internum atque apicem albo marginatae. Cauda 12. conſtat rectricibus nigris rufo fimbriatis, aſt duae exteriores fere penitus albae. Pedes ſordide flauicantes, et ad ſecundum articulum digitorum integre palmati a ſecundo articulo ad inſertionem vnguium membrana dupliciter lobata inſtructi. Habitat ad lacus ſalſos. Circa mare caſpium gregatim volitat.

No. 4.

Ardea pumila { Ardea capite et collo flauicante caſtaneo alboque variis, dorſo caſtaneo, inferne albicans, rectricibus niueis.

Tab. XIV. Fig. 1. Longitudo totius ab apice roſtri ad caudae

extremum - - - - -	1—7— 6.
roſtrum - - - - - -	—3 — —
pars crurum pennis denudata - -	— —10.
digitorum medius cum vngue - -	—2— 6.
extrema alarum diſtant - - -	1—10.

complicatae alae caudae extremum attingunt.

Mandibula ſuperior ſordide nigra marginibus flaueſcentibus, interior modo baſi nigricat, reliqua parte ex flauo alba. Spatium inter roſtrum et oculos nudum ochreaceum, oculi parui iride flaua. Caput et collum ſuperius et ad latera veſtiunt pennae medietate ab vtroque ſcapi latere ſimul cum ſcapo nunc albae, nunc ex rufo albae, marginibus obſcu-

obſcure caſtaneis albo terminatis. Gula alba a qua per collum anterius protenditur faſcia longitudinalis eiusdem coloris vsque ad pectus, quod cum imo ventre album eſt, transparente hinc inde flauedine, alae ſubtus fere totae niueo inſigniuntur colore, exceptis remigibus poſterioribus cineraſcentibus. Extus idem praedominatur color, nam modo vexillum externum primarum duarum remigum, reliquarum vero apices cinerei, albo rufoque vix conſpiciendo adumbrati, inter ſcapulas, dorſum, tegetesque alarum ſuperiores coloris caſtanei; reliquam tectricum cohortem albus leuiterque flaueſcens ornant colores. Vropigium et 12. rectrices vtrinque niueae ſunt, pedes vero ſordidi, vngues nigricantes. Habitat ad mare caſpium.

No. 5.

Motacilla pleſchanka (плешанка). Motacilla dorſo pectoreque nigris, capillitio abdomineque albis. Tab. XIV. Fig. 2.

Craſſitie phaenicurum paululum antecellit.

Longitudo totius - - - - - 6—2.
roſtrum ab angulo oris ad apicem. - - —6.
Digitorum medius cum vngue. - - - —6.
Laterales breuiores. At poſticus medium adaequat. Alarum explicatarum diſtantia. - 8—6.
Alae complicatae mediam caudam attingunt.
Cauda aequat. - - - - - 2—2.

Alba

Alba ſunt, capillitium, occiput, nucha, imum abdomen, vropigium vtrinque, atque maiori ex parte cauda. Nigra ſunt genae, vibriſſae, collum anterius et lateraliter, pectus; dorſum, alae cum ſuis tegetibus extus, intus enim ex nigro cineraſcunt et remiges minores taenia anguſta alba ad apices notantur. Cauda ex 12. conſtat rectricibus, quarum duae intermediae fere penitus nigrae, laterales vero albae, faſcia lata nigra terminatae. Roſtrum pedesque ſordidi, vngues nigri. Habitat in foſſis praeruptis, circa Saratow et alibi ad Volgam; vbi in modum hirundinis ripariae effodit cauernas, horizontales, profundas, aliquando cauitates meropis apiaſtri occupat. Nidus ſimplex, ſtamineus. In quo 10. pullos inueni.

No. 6.

Tab. XV. Mus oculis minutiſſimis, auriculis caudaque nullis, corpore rufo cinereo (слепышокъ).

Fig. 1. Caput habet productum, quaſi pyramidale, verſus anteriora attenuatum, a naribus vsque ad meatum auditorium. Lateribus vtrinque linea prominente duriori pilis rigidis ſetaceis obſita, inſtructum, a qua regiones laterales duplici modo verſus interiora atque inferiora procedunt. Apex naſi ſat latus, durior, cute nuda tectus. Labium ſuperius oblique verſus interiora atque poſteriora deſcendit; labium inferius multo breuius eſt. Oculi valde parvi

vi, vix granum papaueris aequantes nigri et non niſi detracta cute detegendi. Auriculae nullae, ſed meatus auditorius nudus, modo pilis tectus, anguſtus; frons decliuis. Collum breue vt fere diſtingui non poſſit. Truncus corporis ratione longitudinis ſat craſſus, dorſum aliquomodo gibbum; cauda nulla eſt, modo tuberculum paruum regionem caudae notat. Pedes breues, palmae pentadactylae fiſſae, plantae itidem quinque digitis inſtructae ſemipalmatae. Naſus cute nigra tectus, apice albicans, taenia ſupra naſum per frontem ad 6. lin. excurrens, macula ſat magna in iugulo, atque ante pedes poſteriores in abdomine cruciformis, trabe transuerſa vsque ad lumbos excurrens, vt et vibriſſae albae ſunt; reliquae corporis partes teguntur pilis ad inſtar ſerici mollibus, baſi ex nigro cinereis, apice ruſeſcentibus. Incola eſt regionum volgae adiacentium, a Sysran vsque ad Zaryzyn. Habitat ſub terra, quam ad inſtar talpae roſtro ſuo verſus omnes plagas ductu obliquo effodit; reliquens in medio nidum, vbi lectum ex graminibus facit, quibus etiam paſcitur. Ad nullos adhibetur vſus.

Longitudo corporis totius ab apice roſtri ad anum menſurata. – – – –	8	—	—
Longitudo capitis ab apice roſtri ad occiput —	2	—	2.
Circumferentia roſtri, circulo ductu etiam per radices dentium inciſorum inferiorum	1	—	6.

Circumferentia capitis ad finem marginum prominentium ad latera - - -	4 —	2.
Rictus oris ſecundum labium ſuperius menſuratus - - - - -	1 —	7.
- - - - ad labium inferius -	1 —	
Diſtantia inter narem vtrumque - -	1 —	3.
Diſtantia inter aperturam narium et apicem roſtri - - - - -	1 —	6.
Diſtantia inter meatus auditorios - -	2 —	2.
Circumferentia capitis ducta circulo per meatus auditorios - - - -	4 —	2.
Longitudo colli - - - - -	—	5.
Circumferentia colli - - - -	4 —	6.
Circumferentia trunci corporis retro pedes anteriores - - - - - -	5 —	7.
Circumferentia trunci maxima - - -	6 —	4.
Circumferentia ante pedes poſteriores -	6 —	
Longitudo a cubito ad metacarpum. - -	—	$7\frac{1}{2}$.
Latitudo pedis anterioris. - - -	1 —	5.
Circumferentia metacarpi. - - -	—	2.
Circumferentia palmarum ad exortum digitorum - - - - -	1 —	2.
Longitudo palmarum ad extremum vnguis digiti medii - - - - -	—	$10\frac{1}{2}$.
Digitus medius cum vngue - - -	—	6.
Index - - - - - -	—	5.
Annularis. - - - - - -	—	4.
Auricularis. - - - - -	—	3.
Pollex. - - - - - -	—	10.

Digiti

Digiti medii vnguis reliqui paulo minores — 1.
Longitudo cruris ad talum. - - - —10.
Latitudo cruris ad genu. - - - — 5.
Latitudo ad talum. - - - - — 4$\frac{1}{2}$.
Circumferentia metatarſi. - - - — 9.
Circumferentia plantarum ad exortum digitorum. - - - - - 1 —
Maxima longitudo membranae digitos vnientis - - - - - — 2$\frac{1}{2}$.
Longitudo plantarum a talo ad apicem vnguis digiti medii. - - - 1 — 2.
Digitus medius cum vngue. - - — 5.
Halluci proximus medio aequalis
Hallux - - - - - - — 2.
Minimus - - - - - - — 3.
Huic proximus - - - - - — 4.
Vnguium maximus - - - - — 1$\frac{1}{2}$.

Omentum arcui magno ventriculi adhaerens extenditur vsque ad medium abdomen, ventriculus 1. poll. et 10. lin. longus, 11. lin. latus regionem occupat abdominis ſiniſtram et longitudinaliter ſitus eſt. Finis caecus ipſius (A) ſub lobis hepatis ſiniſtris, fundus (B) in regione ſiniſtra vmbilicali ad dimidium eiusdem lateris protenditur. Figura ipſius ouata; latior nimirum ad interiora, anguſtior ad ſuperiora, medio vbi ſaccus incipit caecus quaſi inciſa gula (C) tenuior et 1$\frac{1}{2}$ lin. in diametro per diaphragmatis foramen egrediens, et ad ſiniſteriora ſe Tab. XV. Fig. 2.

ſe inclinans, inſeritur ventriculo ad inciſuram ipſius antea nominatam (D) pylorus (E) ſub fine hypochondrii ſiniſtri ſurſum paululum aſſurgens facit exiguam gibboſitatem et deorſum ſe inclinans occurrit inteſtino duodeno (F) quod in initio 3. Lin. in diametro aequans, ſub ventriculum ſe recipit, et inde emergens transuerſo atque inclinato ductu per regionem epigaſtricam ad hypochondrium dextrum, et quidem ad marginem renis dextri ſuperiorem, properat, et vndique hepati per ligamenta, adhaerens accurrit ieiuno, quod paulo tenuius duodeno 2½ lin. in diametro, a dextris verſus regionem vmbilicalem inclinatur, et in ea gyros ſuos perficit, vltimoque gyro ſurſum aſcendens confluit cum ileo, quod eiusdem fere diametri cum ieiuno, multis nec ſat enarrandis gyris implet reliquas partes poſteriores regionum vmbilicalium. Inteſtinum caecum cum ſuo appendice, quod a vermibus nomen habet, a ſiniſtro latere verſus dextrum expanditur;
Tab. XV. Fig. 3. et fere ſolum omne occupat ſpatium regionum hypogaſtricae atque iliacarum. Proceſſus vermiformis g. g. g. triplici gyro intortus 2. poll. et 5. lin. longus maxima in diametro 1 pollicem latus. Cornu amalthaeae, vti a pictoribus fingi ſolet, referens, ex quindecim quaſi ſegmentis interſtinctis per ſpiras conſtat quarum prius anguſtius eſt, ſecundum latiſſimum reliqui gradatim decreſcunt, et vltimum apice anguſtato terminatum. Ex ſingula ſpira interne propendet valuula membranacea cameras appendicis diſtin-

diſtinguens; quae non facile excrementa elabi ſinunt. Ipſum inteſtinum caecum (H) multo anguſtius eſt ſuo appendice et 6. lin. latum 1. poll. et 6. lin. longum ex duobus lobis itidem valuula interſtinctis conflatum; prope collum poſterioris intrat ileum (I); cum anteriori colon iungitur. In qua vnione caecum et colon valde firma ſunt. Colon (K) ab initio factis quinque gyris intortis firmiter inter ſe per celluloſam cohaerentibus aſſurgit in regionem epigaſtricam, dein verſus dexteriora inclinatum prope ieiunum deſcendit ad ilea. Inde iterum ſurſum flexum in hypochondrio ſiniſtro ſub duodeno cum quo arcte cohaeret transuerſam legit viam, et ad fundum ventriculi perueniens abſcondit ſe ſub illo, inde emergens facit plicam et deorſum in latere deſcendit, inteſtinoque recto ad vertebras lumbales occurrit. Diameter coli maxima 5. linearum, recti vero dimidii pollicis eſt.

Hepar 1. poll. et 2. lin. longum vnum poll. et 8. lin. latum 6. lin. craſſum, totam diaphragmatis conuexitatem implebat, et maius occupabat ſpatium in hypochondrio ſiniſtro, quam dextro, 4. conſtans lobis quorum prior in hypochondrio dextro ex ouato oblongus, reliquis eſt minor, et ad inferiora lobulo minimo auctus: ſecundus erat omnium maximus; vltimus multum ſecundo magnitudine cedebat. Tertius medium habebat volumen inter lobum primum et vltimum. Ligamentum ſuſpenſorium hepatis

maximo lobo inhaerebat. Veſicula fellea pyriformis iuncturae loborum. *Lien* 5. gran. pendens 1. poll. et 3. lin. longus, ſine ſuperiore 3. lin. latus. Curvaturae ventriculi minori vicinus erat. Pancreas arcum ventriculi maiorem exprimens latior ad regionem duodeni quam in reliquo tractu. Renes 2. lin. longi 4. lati erant, quorum ſiniſter profundius deſcendebat dextro fere ad $\frac{2}{3}$ longitudinis ſuae: calyx pro mole renum ſat amplus, vnica papilla inſtructus, ſubſtantia corticali atque tubuloſa ſat conſpicua. Centrum diaphragmatis tendinoſum ſubrotundum. In diametro longitudinali ab introitu venae cauae 6. lin. aequabat. Diameter vero transuerſalis 8. lin. longa erat; pars carnoſa ſuperior a centro neruoſo ad cartilaginem xiphoideam ſex lineas lateralium vnaquaeque 10 lineas.

Cor non ita pendulum ſed verſus latus ſiniſtrum inclinatum, maxima ipſius circumferentia ad baſin erat $1\frac{1}{2}$ poll. longitudo ab auriculis ad apicem 10. lin. pulmo dexter 6 lobis conſtabat, quorum inferior omnium erat maximus ſecundus huic magnitudine cedebat, inter primum et ſecundum locatus fuit tertius in fouea a ſecundo lobo impreſſa, quartus ſuperius atque poſterius ſitus tertio ſubaequalis, vltimus, oblongus, anguſtus, parti poſteriori loborum conuexae ſuperincumbens. Pulmo ſiniſter duos praebebat lobos, alterum maiorem, minorem alterum. Minor propior parieti pulmonum intergerrimo, atque per

per ſciſſuram in duos lobulos quaſi diuiſus, ſuſtirebat cor, poſterior quadruplo maior integer, profundius in thorace deſcendebat, quam lobi lateris dextri.

Maxillarum ſingula inſtructa anterioribus duobus dentibus quos inciſores vocant, ſat validis, ſed ſuperiores inferioribus triplo longiores 6. lin. aequantes. Canini nulli molares tantum modo ſex in vnaquaque maxilla; lingua craſſa.

DE

DE CAPRA SAIGA ET ERINACEO AVRITO.

Auctore
SAMVEL GOTTLIEB GMELIN.

DISSERTATIO

Trad. d. 28. Mart. 1770.

CAPRA SAIGA

Animal propono haud nouum, ſed in itinere ſibirico ab. PATRVO iam iam obſeruatum, et ab ipſo in Commentariis noſtris T. V. p. 345. et VII. p. 39. ſub denominatione: *ibex imberbis* deſcriptum, vnde dein idem Cl. ALLAMANT editioni auium BRISSONIANARVM Leydenſi p. 4. n. 4. immiſcuit, et Perill a LINN. in nouiſſimo naturae ſyſtemate p. 97. n. 11. ſub nomine *capra cornubus rectiuſculis teretibus perfecte annulatis, apice diaphanis, gula imberbi*, exhibuit At haec omnia adeo manca deprehendo, vt operae pretium ſit Capram hanc ſylueſtrem denuo ſub incudem reuocare.

Magnitudine illa, (marem nunc dico) hircam communem ſuperat; ea enim pedibus quatuor cum dimi-

dimidio exacte reſpondet, relatumque habeo, grandiores non infrequentes eſſe. Sed proprietatibus aliis, adhuc euidentioribus diſtinguitur; quas prolixius recenſere animus eſt.

Longitudo capitis infra menſurata a fine illius vsque ad baſin oris - - -	p. 0.	p. 7.	l. 11.
Longitudo capitis ſupra menſurata a fine occipitis vsque ad extremum naſum	1.	3.	10.
Diſtantia angulorum maxillae inferioris	0.	1.	8.
Diſtantia naſi extremi ab oculis - - -	0.	8.	$10\frac{1}{2}$
Diſtantia angulorum oris ab oculis - -	0.	5.	1
Diſtantia inter oculos - - - - - -	0.	4.	11
Diſtantia oculorum ab auriculis - - -	0.	2.	5.
Diameter oculorum longitudinalis - -	0.	1.	$7\frac{3}{4}$
Diameter oculorum latitudinalis - - -	0.	1.	1.
Diſtantia narium - - - - -	0.	0.	2.
Longitudo auricularum - - - - - -	0.	3.	8.
Latitudo auricularum maxima - - -	0.	2	$4\frac{1}{4}$
Diameter inter auriculas - - - -	0.	5	5
Longitudo cornuum - - - - - - -	1.	0.	5.
Diſtantia inter ea - - - - - -	0.	2.	6
Diſtantia inter ea et oculos *transuerſ. menſur.* - - - - - - - - - -	0.	1.	2.
Diſtantia inter ea et auriculas, *perpendicul. menſur.* - - - - - - - - - -	0.	1.	9
Diſtantia inter angulum oculorum externum et mandibulae inferioris internum	0.	5.	1.
Longitudo colli - - - - - - -	0.	10.	6.

	p.	p.	l.
Longitudo a baſi cornuum ad exortum pedum anteriorum - - - -	1.	5.	6.
Circumferentia colli - - - - -	1.	4.	7.
Circumferentia corporis pone pedes anteriores menſurata - - - - -	2.	11.	5.
Circumferentia corporis craſſiſſimi - -	13.	1.	7.
Circumferentia corporis ante pedes poſteriores - - - - - -	2	7.	$7\frac{3}{4}$
Longitudo caudae - - - - -	0.	4.	9.
Longitudo humeri - - - - -	0.	6.	11.
Latitudo humeri ad ſcapulam - - -	0.	2.	11
Latitudo humeri ad flexuram - - -	0	1.	7.
Circumferentia ſumma - - - -	0.	6.	10.
Longitudo cubiti ad exortum vngularum	0.	9.	5.
Latitudo cubiti ſub flexum - - - -	0.	0.	$7\frac{1}{4}$
Latitudo cubiti ante vngulas - - -	0.	0.	10
Circumferentia ſumma - - - -	0.	5.	2.
Longitudo femoris ad genu - - -	0.	10.	0.
Latitudo femoris media - - - -	0.	2.	3.
Circumferentia ſumma femoris - - -	0.	5.	9.
Longitudo tibiae ad calcar - - - -	0.	9.	6.
Circumferentia ſumma - - - - -	0.	4.	1.
Longitudo calcarum - - - -	0.	0.	7.
Latitudo calcarum - - - - - -	0.	0.	$6\frac{3}{3}$
Diſtantia inter ea - - - - -	0.	0.	4
Diſtantia calcarum ab vngula - - -	0.	1.	0
Longitudo vngulae *vnius* - - - -	0.	1	3
Latitudo vngulae *vnius* - - - -	0.	2.	0.

Caput

Caput habet oblongum valde informe, poſterius latius, gibbumque, anterius elongatum, eminens et anguſtius. *Naſus* ad baſin frontis ampliſſimus, lunae dimidiatae figura, ſulco a cartilagine relicto, medio notatus, vltra mandibulam inferiorem per bipollicare ſpatium fere protenſus, et extremo *naribus* amplis, orbicularibus, intus nudis, margine circumcirca gryſeis, ſepto intermedio diſtinctis, perforatus terminatusque labio ſuperiore inaequaliter quadrato, *verrucis pallidis* et oblongis obſito, medio lacuna exarato. *Labium* inferius ſub capite, rotundiuſculum, lateribus verrucis cuneatis obſitum, *mento* prominulo, *imberbi.* *Oculi* ad latera frontis, diſtantes, magni, *palpebris* principio cilitaîs, extremo nudis, iride niuea, pupilla caerulea, ſplendente *membrana* nictitans, valida, ampla, vaſis ſanguineis multum referta, inferne ſita ſupra oculos pollicis vnius linearumque duarum interuallo, *cornu* vtrinque vnicum, adulto animale plusquam pedale, aliquo vsque in capite abſconditum, incuruatim ſurſum protenſum, ſummo apice lateraliter inclinatum, concauum, ſemidiaphanum, *annulis* 16 vel 17. vltimis obliteratis, circumdatum, apice laeue, per totam, ſui longitudinem *ſtriis* copioſis, longitudinalibus exaratum, initio obſcure viridiuſculum, medio et finem verſus in flaveſcentem et oliuaceum colorem vergens. *Aures* extremum occiput vtrinque occupantes, tripollicares et vltra, piloſiſſimae, erectae, ſemicirculares, obtuſae.

Dentes inciſores in maxilla ſuperiore nulli, in inferiori octo ſibi inuicem vicini, a molaribus remotiſſimi, erecti, paralleli, duabus vtrinque extimis reliquis breuioribus, anguſtioribusque. *Canini* in vtraque mandibula nulli. *Molares* in maxilla ſuperiore et inferiore nouem, lati, lobati, *lingua* carnoſa, oblonga, latiuſcula, ſupra lateribus, infra omni ſuperficie papiloſa, medio ſulcata, extremo obtuſa, frenulo palato cohaerens. *Rictus* oris magnus, quadratus.

Collum craſſum, longiuſculum. *Truncus* oblongus, craſſus, gibboſus. *Inguina* nuda, *mammae* ad eas vtrinque vna *inter* inguina, *penis* admodum longus, cui ſubſunt teſticuli duo ampli, longi. *Cauda* tenuis, fere quinque pollicaris. *Praeputium* piloſum.

Pedes anteriores poſterioribus vna quarta parte breuiores, extremitate biſulcae, calcaribusque duobus, rhomboidalibus, externo latere retrorſum verſis, poſterius linearum tredecim ſpatio, ante ſulcum munitae. A ſulco inter eos et cutem ſinus ſat profundus continuatus.

Pilorum ſequens ratio eſt. In genere omnino valet, caprae domeſticae illis multo breuiores eſſe, atque adeo pilis ceruinis multum reſpondere. Sed inſignis tamen in diuerſis corporis partibus differen-

tia

tia datur. Breuiſſimi illi *ſunt*, *denſiſſime incumbentes*, molleſque, qui *naſum* obtegunt, albi, et ad latera tantum ſummoque apice cinereo colore candicantes. Longiores fronti, vertici et occipiti adpoſiti, plusquam bipollicares, baſi nigricantes, vel fuſci, medio et apice plerisque albis, nonnullis flaueſcentibus. *Auriculae* piloſiſſimae; *pilis* molliſſimis, aut niueis, aut apice flauis. *Infra oculos* producta *ſetoſa verruca*; *ſetis* longiſſimis, candicantibus, vel fuſco ferrugineis, poſterioribus extremum verſus aurantiis. *Mentum* e fuſco colore niuet. *Pili* dorſi, capitis poſterioris illis longitudine analogi, vel aliquantum ea maiores, perfecte quidem candidi viſi, ſed initio fuſco flaueſcentes, et finem verſus tantum albi: ex eo autem, quod valde denſi ſint, et oblique incumbant, primo adſpectu niuei comparent. Prope caudam medio plumbeo colore fuſceſcunt, et lateraliter ad innominata óſſa obſolete caſtaneo colore imbuuntur. *Cauda* pilis dorſalibus reſpondentibus componitur. Longiſſimi omnium *pili* ſunt, *pronum* corpus veſtientes, barbam aliquo modo mentientes; ii quidem *ad collum inferius*, *mediumque abdomen* flaui, *hoc* et *penem* inter *medio* faſcia fuſco flaveſcente; lateribus niueis; *regione genitali* iterum flau cante, *pene teſticulisque* albis, ano niueo. *Pedes anteriores* e candicante colore flaui, ita vt *parte* earum *interiore* candicans dominetur. *Pedes* poſteriores albi, et exterius interiusque apice tantum caſtanei. *Pili* ad vtrosque principio longiuſculi, po-

ſtea breuiores. *Vngulae* firmae, nigrae, vel e nigro liuidae.

Quare hoc animal ad pecora dentibus, et ad capras cornubus omnino referri, ſed monſtroſo naſo, ore infero, barbae defectu, coloris pilorumque diverſitate tanquam diſtincta ſpecies recenſeri debet.

Aſiae propria eſt haec capra, ad *Tanain*, *Volgamque*, et in *Sibiriae* ſeptentrionalibus plagis frequentiſſima, vaſta amans deſerta, victitans iumentorum ad inſtar vegetabilibus, velociter currens, et agitata frequenter in altum ſaliens. Planis in locis difficulter a venatoribus exploditur, in montoſis ſaltu breui defatigatur ſuo, et certa praeda euadit. Sub autumnum et aeſtatis initio femina vnum vel duos in lucem edit pullos. Haud incedunt gregatim, ſed ad ſummum quatuor ſimul conſpiciuntur. Autumno valde pingues, femina mare multum pinguior. Venti ſeptentrionales valde ipſis infeſti, inprimis niue iuncti, vnde contingit, vt e deſertis Kirgiſicis hyeme tantum, ſub ea aeris conditione in regione *Aſtrachanenſi* conſpiciantur, vbi tum infrequens non eſt, conſpicere illas in ipſam vrbem penetrantes. Caro ſapida, inprimis feminina. Inter Tataros Mahumedanos fabula eſt, ad grauidam pii *Abrahami* concubinam, *Hagar*, a coniuge ipſius *Sara*, exulatum, miſiſſe Angelum Gabrielem, cum in deſerto Ismaelem pareret, capram noſtram *Saiga*, ſuis

ſuis vt vberibus et matrem et infantem aleret; inde ab his infidelibus magno in cultu habetur. Praeter carnem cutis quoque in vſum venit, ex qua vilioris notae homines veſtes ſibi hyemales conficiunt; ſed cum pili laxi admodum, et facillime decidui ſint, pellibus ouinis omnium minimum pretioſis inferiores adhuc ſolent eſſe.

ERINACEVS AVRITVS.

Multum inter auctores de Erinaceis diſputatum fuit, an vnica illorum exiſtat ſpecies, vel an plures reuera habeantur? Primaria quidem diuiſio ea eſt, qua in Erinaceos roſtro ſuillo praeditos, et in alios roſtro canino donatos, partiti fuerunt. Lis nondum compoſita eſt, ſed, cum hactenus obſeruati Erinacei europaei omnes roſtrum oſtenderint, neque ſuillo neque canino ſimile, veritas ab eorum potius parte ſtare videtur, qui genuinam vnicam tantum Erinaceorum, hactenus cognitorum, ſpeciem frequentibus obſeruationibus commoti, agnouerunt. Reliqui ab auctoribus excitati Erinacei aut ad vulgarem pertinent, aut ad alia animalium genera. Quibus tamen non obſtantibus nouam ego certiſſime propono ſpeciem, in regione *Aſtrachanenſi* frequentiſſimam, diſtinctam magnitudine, qua vulgari multoties cedit auribusque, admodum extantibus inſignem. Id quod nunc pluribus exponam. Tab. XVI.

Corpus

Corpus ſuperne a baſi capitis vsque ad caudam pungentibus aculeis obſitum firmiſſime cuti adnexis, confertiſſimis, ſurſum ſpectantibus, baſi candicantibus, medio obſolete nigris, apice ex flauo colore albis infra incraſſatis, exacte teretibus, ſupra attenuatis acutiſſimis, longitudine linearum ſeptem. *Inferior* corporis *ſuperficies* piloſa, *pilis* anterius ad mentum, pectus et ventrem albis pauco rubicundo paſſim intermixto, poſterius ante caudam ſordide flauis.

Caput anterius *pilis* veſtitum, ex albido colore caſtaneis, *Oculis* minutis, quorum *palpebrae fuſcae* ſunt, *iride* pallide *caerulea*, *papilla* nigra. *Genae* colore capitis anterioris, proxime tamen *infra* et *ſupra* oculos paucos minutosque pilos obſeruo nigros. Tempora caſtanea. Hoc autem caput terminatur *roſtro*, Erinacei vulgaris ſimillimo, mobili, nudo obtuſo, nigro, medio ſulcato, *ſulco* inferne euidentiore.

Nares extremo roſtro, cui adnectuntur, craſſiores, diſtantes, oris reuolutis, dentatis, neque et noſtra in ſpecie *mandibula ſuperior* infra naſum protenditur, *inferiorque* ab eo fere quatuor lineas diſtat, vt adeo et nunc pateat, diuiſionem Erinaceorum in ſuillos et caninos, lubrico fundamento niti. *Auriculae* inſignes triangulum fere inaequilaterum repraeſentantes, obtuſae, ad ſitum quidem eundem ac in vulgari ordinatae, ſed pro mole corporis quam

mox

mox dico, longiſſimae, pollicem quippe cum lineis quatuor, et fere dimidia longae, inferne octo lineas latae, medio lineis ſex reſpondentes, extremitate ſuperiore vix duabus aequales, baſi ſua *pilis* denſis ex albo flauis, tanquam lanae ſpecie obducuntur, *vterque* eorum *latus* anterius intus ad finem proceſſu cartilagineo auctum. *Margo* reuolutus *ſuperficies ſupina* baſi nudiuſcula *apicem* verſus et *marginibus pilis* molliſſimis, albido-gryſeis, incumbentibus tecta, *inferior* baſi medioque omnino nuda, ſed extremitatem verſus et ad apicem ſimilibus, quos continuo enarraui, pilis munita *Myſtaces* capiti vtrinque adpoſitae, molles, ex albo nigrae, poſterioribus longioribus inflexae, numero inconſtantes. *Dentium* eſt ſequens ratio; *inciſores* in vtraque maxilla duo, reliquis longiores, cuneati; iis in *ſuperiore* admodum diſtantibus, dextro ſiniſtro longiore, iis in inferiore vicinioribus dextro iterum longiore, ſibi vero non reſpondent, ſed inciſores ſuperioribus ſub alterni ſunt. *Laniarii* in maxilla ſuperiori vtrinque 5. primo omnium minimo, arcte cum ſecundo, qui antrorſum decumbit adnato, a reliquis diſtante, tertio et quarto erectis et vicinis, quinto rurſus minore, remoto et interius poſito; in maxilla inferiore vtrinque tres antrorſum decumbentes, vicini, medio lateralibus longiore. *Molares* in vtraque mandibula vtrinque 4. viciniſſimi, e quibus primus maximus vltimusque minimus eſt. *Vtraeque* maxillae carneo margine nudae. *Palmae* et pedes pentadactili, corpo-

corporis inferioris ad inſtar colorati; in his tamen plus flauidioris admiſcetur. *Vnguiculi* rubicundi.

	poll.	lin.
Cauda breuiſſima, ex albido ſordide flaua, apice nigra.		
Longitudo totius animalis ab extremo roſtro ad initium caudae - - - - - -	4.	7.
Longitudo caudae - - - - - - -	0.	5.
—— a roſtro ad occiput - - - -	0.	7.
Diameter latitudinalis roſtri anterior - -	0.	3.
—— —— —— —— poſterior - -	0.	4.
Diſtantia narium ab oculis - - - -	0.	9½.
—— ab auriculis - - - - - -	1.	3.
—— oculorum inter ſe - - - -	0.	8½.
Diameter longitudinalis oculorum - -	0.	2½
Diameter latitudinalis eorumdem - -	0.	2.
Circumferentia corporis inter angulum ſ. Canthum oculorum internum et angulum auricularum extremum - - - -	0.	3.
	0.	5½.
Diſtantia apicis mandibulae inferioris ab extremo naſo. - - - - - - -	0.	8
Diſtantia auricularum - - - - -	0.	7
Longitudo colli - - - - - - -	0.	5½.
Latitudo colli - - - - - - - -	1.	4.
Circumferentia corporis inferioris ante palmas		
Diſtantia palmarum - - - - - -	1.	10.
Circumferentia corporis inter palmas et pedes	1.	5.
Longitudo caudae - - - - - -	0.	4½.
—— Palmarum vsque ad carpum - -	0.	10

Circum-

	poll.	lin.
Circumferentia metacarpi - - - -	0.	$4\frac{1}{2}$.
Longitudo digiti extimi in palmis cum vngue	—	$3\frac{3}{4}$.
—— intimi - - - - - - - - -	—	$3\frac{3}{4}$.
—— medii - - - - - - - - -	—	5.
Digitorum lateralium - - - - - - -	—	$4\frac{1}{4}$.

Reſpondent magnitudine digiti pedum, ſed ſingulare hoc eſt, quod digitus infimus poſterius locetur, vltra 3. pollices a vicino remotus. Id quoque adhuc habeo addendum, quod pili, brachia, et metacarpum, tibias et metatarſum tegentes ex lucido colore caneſcant, quodque corpus et tarſus nudi, inferius ſordide fuſci obſerventur.

Atque haec quidem magnitudo conſtans eſt, et conſtans aurium conformatio, ne forte putes enarratum animal varietatem erinacei Europaei eſſe. Quin quod hic, in reliqua Ruſſia ſat copioſus, et a me quoque per omne adhuc *Woronecenſe* gubernium obſeruatus, hic *Aſtrachaniae* et *Zarizyno* abhinc plane exulet. Sed noſtro animali iidem tamen mores ſolemnes ſunt, qui vulgari. In eundem ſe irritatum globum torquet, ita ſe defendere tentans, hoc in ſtatu penitus immobile. Incedere cupiens, elongatur pariter corpus, pedibus inſiſtit, curritque aequa velocitate ſi non maiore; eodem denique victu gaudet, eadem ipſi oeconomia ſolemnis,

hyeme in fouea aliquot pollices profunda, absque victu vitam occultam degit. *Aſtrachanenſibus* pariter domeſticum animal eſt, felium vices ſuſtentus, et ab ipſis lacte, quod anhelat, potiſſimum ſuſtentatur. Icon ad naturalem magnitudinem ſtaturamque facta eſt.

LYCH-

LYCHNANTHOS VOLVBILIS
ET
LIMNANTHEMVM PELTATVM
NOVA PLANTARVM GENERA.

Auctore

SAMVEL GOTTLIEB GMELIN.

Exhibit. d. 28. Mart. 1770.

Quamuis mihi bene perſuaſum ſit, genera plantarum, quae ſtabiliunt, neque naturae inſtituto, neque ipſius inniti legibus, ea tamen perquam neceſſaria arbitror, quod ſubleuent cognitionem vegetabilium, immenſam eorum molem in compendium, miro vſu, redigentia. Ita olim in praeloquio ad Hiſtoriam fucorum ſcripſi. Hac mente bigam plantarum, in itinere orientali, quod me occupat, obſeruatarum nunc propono.

LYCHNANTHOS VOLVBILIS.
CHARACTER GENERIS.

CAL. *Per.* monophyllum, quinquefidum, perſiſtens. Tab. XVII. Fig. 1.
COR. *Petala* quinque, bifida, fauce dentibus coronata.
STAM. *Filamenta* decem, alterna. *Antherae* ſimplices.

PIST. *Ouarium* globoſum. *Styli* tres, ſubulati *Stigmata* contra ſolem verſa.

PER. *Bacca* globoſa, vnilocularis, apice dehiſcens.

SEM. plura, reniformia.

DESCRIPTIO.

Planta herbacea, ſcandens, inter frutices et arbores naſcens, humi proſtrata, ramisque eorum conuoluuli cynanchi cet. adinſtar mire circumuoluta. *Radix* geniculata, gemmaſcens. *Caulis* volubilis, teres, viridis, obſolete pubeſcens, mox a principio ſuo ramoſus, *ramis* cauli ſimilibus, tenuioribus, iterum diuiſis. *Folia* coniugata, ouato-oblonga, ſeſſilia, ſubſinuata, acutiuſcula, ſubtus et margine obſolete pubeſcentia, ſupra laete viridia, glaberrima. *Pedunculi* e foliorum axillis ſolitarii, ſparſi et oppoſiti, filiformes, duobus tribusque foliolorum deſcriptorum, ſed minimorum paribus veſtiti, extremo florem vnicum gerentes. *Calix* ventricoſus, inflatus, pallide viridis, pubeſcens, perſiſtens, vltra ſui medium diuiſus in lacinias quinque, ſubcordatas, latas, integerrimas, margine exſtante albido cinctas, maturo fructu reflexas. *Petala* quinque, vnguiculata; *vnguibus* oblongis, anguſtis, calyce breuioribus, ſtaminiferis; *limbo* collo ſuo dentibus duobus latiuſculis coronato, plano, vltra medium bifido. *Filamenta* decem, alterna, quinque nimirum medietati vnguium et quinque vngues inter et ouarium inſerta, breuiſſima,

ſima, ſubulata. *Antherae* oblongae, ſimplices. *Ouarium* in centro floris poſitum. *Styli* tres, filiformes, incurui, longitudine fere limbi. *Stigmata* ſimplicia contra ſolem flexa. *Bacca* vnilocularis, apice dehiſcens, maturitate nigerrima, calyce circumuallata, ſucculenta, ſemina continens plurima ad triginta, reniformia, nigro-purpurea.

Eo, quo dixi, modo creſcit in locis vmbroſis et montoſis circa radices arborum; primo mihi obſeruata ad oſtium fluuii *Cimlae* in Tanaim ſe exonerantis, loco ab vrbe *Tſcherkask* duo centum leucas diſtante.

Aut ergo Lychnanthos noſter Silene erit, aut Cucubalus, aut demum Saponaria. Sed ſi tria haec genera bene diſtincta ſunt, neutrum recte ingreditur. *Faux coronata* a cucubalo eundem ſeparat. Ab eodem et ſilene *Bacca* globoſa, vnilocularis. Atque a ſaponaria ſtylo trifido recedit, ſumme videtur conuenire cum cucubalo baccifero, ſed cum eum nunquam vidiſſe meminerim, nil determino.

LIMNANTHEMVM PELTATVM.
CHARACTER GENERIS.

CAL. *Per.* pentaphyllum, *laciniis* lanceolato-oblongis, diſtantibus. Tab. XVII. Fig. 2.

COR. *Pet.* quinque, vnguiculata; *vnguibus* piloſis.

STAM.

STAM. *Fil.* quinque, baſi petalorum inſerta, incuruata. *Antherae* longiſſimae, arcuatae, lateri filamentorum inſertae.

PIST. *Ouarium* ſphaerico-cylindricum. *Stylus* nullus. *Stygma* quadrifidum.

PER. *Capſula* cordato-oblonga, acuminata, bilocularis.

SEM. plura, longitudinaliter adfixa, ciliata.

Nouo huic generi nomen impono a b. STELLERO Claytoniae Sibiricae deſtinatum, noſtram in plantam apprime quadrans. quod non niſi in aquis pigris, paludibus ſtagnisque creſcat.

Nymphaeam autem foliis, creſcendi modo, florumque colore e longinquo ita refert, vt putares vnam et eandem plantam eſſe. At propius inſpicienti ſingularis planta ſtatim manifeſtatur.

Super aquas ergo Limnanthemum natat, *caule* donatum, quemadmodum fere ſolet in plantis aquaticis eſſe, proſtrato, tereti, ſordide viridi, punctis creberrimis ex purpureo-nigris maculato, ſimplici, nudo; ſupra enim tantum contingit, vt ex hoc caule duo ex aduerſo *rami* egrediantur, cauli ſimiles, niſi quod ſubinde baſi ſua alati videantur, proprie petiolorum vices ſuſtentantes, quique vnum extremo gerunt folium reniforme, carnoſum, marginibus integerrimum, glaberrimum, ſupina parte laete viride, prona, qua aquam attingit, rubicundum

dum vel fuſcum. *Petiolus* autem diſco folii immittitur, vnde peltatnm dixi. Variat autem foliorum magnitudo, cum in quibusdam ſpeciminibus Nympheae illis grandioribus non inferiora, et in aliis ambitu minora multo et minima viderim. Superiora plerumque magnitudine reliquis cedunt, neque etiam dubito, quin varia plantae aetas ſymbolon hic tribuat ſuum. Ex medietate foliorum in extremo caulis eleuantur pedunculi, vel diſtinctius loquendo, emiſſis in latera foliis continuatur caulis, per vnciale plus minus interuallum progreditur, bigam foliorum denuo in latera mittit, atque intra illam corymbus erigitur, pedunculis circiter ſex conſtans, vno poſt alterum increſcente, quouis flore terminato. Aut et frequenter contingit, vt petioli laterales, continuo deſcripti, ſua poſtquam emiſerunt folia, receptum intra illa corymbum erigant, a caulino principe plane non diſtinctum. *Calyx* pentaphyllus, *laciniis* lanceolato-oblongis, intus concauis et viridibus, apice obtuſiuſculis, extus e viridi et rubro variis, corolla dimidio breuioribus. *Corolla* pentapetala, infundibuliformis in iuniore plantae aetate, at in prouectiore patens, roſacea, colore croceo immaculato ſuperbiens, ampliſſima et minor. *Petala* ipſa vnguiculata, *vnguibus* breuibus, latiuſculis, faſciculo pilorum coronatis mire inter ſe complicatorum tenerrimorum, flaueſcentium, madentium ſucco, tactu obſeruando. Neque tamen glanduloſae vel alius ſecretoriae fabricae inuenio aliquid, vt

 auſe-

auſerim pilos hoſce nectaria dicere *Limbus* petalorum planus, lanceolato - latus, membrana exſtante vtrinque alatus, *ala* plicatili, reuoluta, marginibus vndique fimbriata atque ciliata. *Filamenta* quinque, baſi petalorum inſerta, breuia, ſubulata, luteſcentia, apice ſuo incuruata. *Antherae* longiſſimae, arcuatae, lateri inferiori filamentorum adfixae, medio canaliculatae, *apertura* canalis baſi ampliata, ouali. *Filamenta* autem petalis ita immittuntur, vt inſertio eorundem fiat inter vtrumque petalum proximum; quare ſuo filamentum intermedio corpore cohaerere nonnunquam facit duo diſtincta petalorum corpora, vt imponat, monopetalam corollam eſſe, ſed infra filamentum rurſus vtique recedunt, vt natura polypetala euidenter dignoſcatur. *Ouarium* ſuperum, ſphaerico - cylindricum, ſupra attenuatum. *Stylus* nullus. *Stigma* quadrifidum. *Pericarpium* formatur capſula cordato - oblonga, acuminata, biloculari, continente ſemina longitudinaliter adfixa, itidem cordata, margine ciliata.

Ad vrbem Tſcherkask prope Caſtellum olim celebre, et a diua *Anna* nomen nactum frequentiſſime ſub finem Iulii florebat. A Tſcherkask redux, in itinere Zarizin verſus conſtitutus inueni quoque in aquis pigris ad pagum coſacorum *Kriuye Chutory* dictum. Variat nonnunquam calyce, corolla, ſtaminibus ſex.

Obs. CLYTONIAE maxime adfine genus.

OBSER-

OBSERVATIONES
ET
DESCRIPTIONES
BOTANICAE.

Auctore

I. GAERTNERO.

Exhibit. d. 12. April. 1770.

Stirpium aliquot ruthenicarum heic vobis exhibeo deſcriptiones, Academici Ill. quarum vel nulla prorſus, vel minus ſufficiens hactenus facta fuit mentio.

Primo loco prodeat noua Veronicae ſpecies, triuiali nomine *grandiflora*, dicenda, ſpecifica autem denominatione appellanda:

I.

Veronica racemis lateralibus laxis; foliis oppoſitis, crenatis, hirſutis; caule adſcendente, ſtolonifero.

Deſcr. Radices plurimae ex ſingulis caulis geniculis, qua parte per terram repit faſciculatim oriundae et in fibras capillares longiſſimas diuiſae.

Caulis plerumque ſimpliciſſimus, filiformis diſſite geniculatus, ex reptante adſcendens; inferius

 nudus

nudus et gracilis; ſuperius parce folioſus, craſſeſcens, villisque cineraſcentibus obtectus.

Stolones alterno ordine e geniculis caulis inferioribus enati, filiformes, aphylli, radicantes et late per terram ſparſi.

Folia oppoſita, inaequalia; *inferioribus* minimis rotundatis, *mediis* ouatis maximis, pollicem circiter longis, *ſummis* iterum minoribus, ouato lanceolatis: omnibus vero vtrinque villoſis, per ambitum leuiter crenatis, atque baſi ſua in petiolum breuem a folio ipſo vix diſtinctum excurrentibus.

Florum racemi ex alterutro tantummodo caulis latere atque e foliorum inferiorum et mediorum axillis oriundi; pauci, duobus ſcil. vix plures, erecti, longiſſimi, villoſi, bracteis linearibus ad pedunculorum inſertionem ſtipati.

Pedunculi alterni, calyce triplo longiores, erecto patentes hirſuti.

Corollae caeruleae omnium maximae, venis longitudinalibus albicantibus ſtriatae; laciniae rotundatae patentes, ſuperiore reliquis maiore.

Capſula laeuis, ſemina continens rotunda, annulo membranaceo cincta.

Variat haec planta foliis, magis, minusue crenatis et hirſutis, variat quoque racemis longioribus, breuioribusue; in omnibus tamen, folia ſuprema

prema hirſuta atque crenata, et racemi, parte caulis erecta, longiores ſunt.

Kamtſchatkam pro patria ſua agnoſcit haec veronicae ſpecies et in pratis alpinis illius regionis, referente STELLERO, copioſe naſcitur. Differt a veronica *alpina* europaea 1o. caule ſtolonifero 2o. foliis et floribus multo maioribns 3o. racemis lateralibus, iisque longiſſimis; denique 4°. ſeminibus annulo membranaceo cinctis.

II.

Eiusdem cum priori familiae, ſed diuerſi generis eſt, quae ſequitur LAGOTIS, nouo nomine mihi dicta, non quidem prorſus noua, ſed minus rite hactenus definita planta. Nominis ratio ex calycis figura, generis character ex ſequentibus patebit:

LAGOTIDIS CHARACTER NATVRALIS.

CALYX monophyllus, ouatus, compreſſus; margine *anteriore* longitudinaliter fiſſo, *poſteriore* integro, arcuato, carinato, apice inaequaliter tridentato, dentibus duobus lateralibus ſetaceis longioribus.

COROLLA monopetala, ringens. *Tubo* longitudine calycis leuiter arcuato. *Labio ſuperiore* breui, reflexo, emarginato. *Labio inferiore* propendente, bifido aut trifido, laciniis oblongis acutiuſculis. *Fauce* laeui, patula.

STAMINA. *Filamenta* duo breuiſſima, fauci corollae ad baſin labii ſuperioris inſerta. *Antherae* cordato-globoſae, latere dehiſcentes.

PISTILLVM. *Germen* ouato acuminatum. *Stylus* filiformis, longitudine ſtaminum, inflexus. *Stigma* capitatum.

PERICARP. *Capſula* ouato-acuminata, bilocularis, apice dehiſcens.

SEMEN in ſingulo loculamento vnicum, ouatum.

RECEPTACVLI margo germinis baſin cingens, glanduloſus, nectariferus.

Facile ex his colligitur, eſſentiam huius generis in calyce altero latere fiſſo cum flore diandro conſiſtere, cui quidem ſimilis ſtructura, in tota reliqua claſſe didynamiarum angioſpermiarum, alia nulla datur.

Species Lagotidis unica tantum mihi hactenus cognita eſt, ſcilicet:

LAGOTIS (*glauca*) foliis radicalibus petiolatis, caulinis et ſpica terminali ſeſſilibus.

VERONICA foliis inferioribus ouatis, crenatis; ſuperioribus rotundis mucronatis, caule ſpica terminato. Flor. Sibir. Tom. 3. p. 219.

Deſcr. Radix perennis ſimplex craſſiuſcula, fibris lateralibus filiformibus longiſſimis ſtipata. Capiti

piti conſtanter duae ſquamae emarcidae inſident, quae baſin caulis vaginae ad inſtar cingunt et originem ſuam a petiolis foliorum praeteritorum trahunt; cuiusmodi vaginae etiam in ſaxifraga *craſſifolia* aliisque occurrunt.

Intra hancce vaginam inſerta ſunt folia radicalia, plerumque bina, longitudinis dimidii circiter caulis, ouata, glabra, coſta media inſigniore ſubtus protuberante notata et per marginem dentibus obtuſe rotundatis circumſerrata. Altera foliorum extremitas obtuſiuſcula eſt, altera vero cum coſta media in petiolum anguſtata excurrit.

Petioli dimidio folio ſaepe longiores, ſubtus conuexi, ſupra profundo ſulco exarati et prope baſin ſuam in alam membranaceam, caulem ex parte cingentem et cum oppoſita vaginam circa eum efficientem, extenuati.

Caulis ſimpliciſſimus, ſucculentus, glaber, a dodrantali ad pedalem nonnunquam longitudinem adſcendens. E radice gracilis oritur et ad mediam vsque partem ſuae longitudinis foliis deſtitutus eſt.

Folia caulina quatuor vel quinque parium; inferioribus oppoſitis, reliquis alternis, atque magnitudine ſenſim decreſcentibus, magisque ſibi approximatis, quo propius a ſpica florali diſtant. Caeterum ſeſſilia ſunt haec folia atque mox ab inſertione ſua in laminam ex rotundato acuminatam,

ſuccu-

ſucculentam, neruis e baſi radiatim excurrentibus ſtriatam et in margine acutis dentibus ſerratam ampliantur.

Summo cauli ſpica foliis ſuffulta inſidet, pollicaris vel bipollicaris longitudinis; figurae nunc ex ouato acuminatae, nunc cylindricae ex floribus et bracteis denſe congeſtis formatae.

Bracteae calycibus anterius et paulo lateraliter accumbunt, eosque longitudine ſua paulo ſuperant; inferiores prorſus foliaceae et caulinis foliis ſimiles ſunt, ſuperiores autem ſenſim minores et praecipue verſus marginem acutis dentibus ſerratam, membranaceae fiunt.

Calyx pariter membranaceus, ſubdiaphanus, coſta viridi in dentem ſetaceum excurrente, vtrinque notatus.

Corollae et Antherae caeruleae. Labium inferius in pauciſſimis ſimplex, apice tantum inciſum, in multis bifidum, in plurimis vero trifidum eſt; laciniis oblongis, acuminatis: aequalibus, ſi bifidum, inaequalibus autem atque media reliquis anguſtiore, ſi trifidum ſit labium.

Singularis varietas huius plantae in Herbario STELLERIANO occurrit, foliis ſcil. radicalibus ternatis longo petiolo inſidentibus, inſtar foliorum Menyanthis trifoliatae; foliola partialia autem crenata ſunt prorſus vt in praecedenti ſpecie, cui etiam

iam in omnibus reliquis partibus atque tota ſacie externa ita ſimilis eſt, vt potius pro varietate eius, locis paludoſis ſorte nata, quam pro diuerſa ſpecie habenda eſſe videatur. Habitat in Kamtſchatka.

III.

E graminibus, quorum plusculas nouas ſpecies habeo, duo ad praeſentem ſcopum faciunt, heic itaque proponenda. Primum eorum mihi dicitur:

BROMVS (*ouatus*) panicula ouata, faſciculata, erecta; ſpiculis oblongis: intermediis primoribus breuius pedunculatis; ſecundariis ſeſſilibus.

Deſcr. Gramen eſt annuum pedalis circiter longitudinis, gaudens radice faſciculata, ex fibris craſſiuſculis breuibus, parum ramoſis compoſita.

Culmi ſpithamales, ſtricti, tribus plerumque geniculis laeuibus diſtincti; intermedio ſupremo longiſſimo ſeminudo.

Folia ſex pollices longa, duas lineas lata atque ſubtiliſſimo tomento albicante vtrinque obducta. Vaginae ſtriatae glabrae, annulo membranaceo lacero terminatae.

Panicula bi-vel triuncialis, erecta ouato oblonga ex tribus ſpicularum faſciculis, alterno ordine culmo affixis, compoſita. Singuli faſciculi fiunt ex nouem ad duodecim pedunculis prima-

 riis,

riis, quorum vnus medius atque duo extremi reliquis longiores ſunt et paniculas ſecundarias, paruas ſtrictas efficiunt; reliqui autem, intermedii terni, quaterniue numero, prioribus multo breviores, ſimplices, et vnica tantum vel duabus ſpiculis inſtructi ſunt

Spiculae oblongae compreſſae, pollicares, ſubſexflorae, ariſtatae; ariſtis diuergentibus.

Calycis valuula *ſuperior* linearis, acuminata, compreſſa, longitudinis dimidiae ſpiculae; *inferior* priori ſimilis, anguſtior tamen atque breuior; vtraque vero villis minimis conſperſa et margine membranaceo albicante cincta.

Corollae tereti compreſſae; gluma exteriore vncia dimidia paulo longiore, ſtriata, pubeſcente, in mucronem membranaceum, album, diaphanum terminata, infra quem ariſta ſemipollicaris, recta, dorſo huius glumae inſeritur. Interior gluma minor, oblonga, plana, membranacea et diaphana eſt.

Nectarii ſquamulae minimae, obouatae, ciliatae.

Semina teretiuſcula rufeſcentia.

Sponte prouenit hoc gramen ad maris caſpii littora, vnde ſemina Aſtrachania miſſa accepi. Ad bromum ſcoparium prope accedere videtur, differt tamen ab eo: ſpiculis villoſis atque glumis ſupra ariſtae inſertionem in longum et acutum mucronem productis, denique etiam habitu externo.

IV.

IV.

Alterum ad quod tranſeo gramen, proprii omnino atque inter Bromum et Triticum medii generis eſt, cum hoc enim calycis ſitum, cum illo locuſtarum quodammodo ſtructuram communem habet, ſed ab vtroque facie externa et propriis notis a calyce praeſertim petitis, ita recedit, vt, ad facilitandam, per ſe iam ſatis difficilem graminum cognitionem, nouum ex illo genus, ſub quo etiam Bromus criſtatus comprehendendus erit, iure confici poſſe cenſeam. Nouo generi nomen AGROPYRI facio eiusque characterem naturalem hic ſubiungo.

CALYX. gluma quadriflora, biualuis: *Valuulis* nauicularibus, mucronatis, adſcendentibus, lateralibus.

COROLLA biglumis: gluma *exteriore* lanceolata, concaua, apice in ariſtam breuem excurrente. Gl. *interiore* lineari, membranacea, breui.

STAM. *Filamenta* tria capillaria. *Antherae* lineares.

PISTILL. *Germen* ouato oblongum. *Styli* duo, filiformes, hirſuti. *Stigmata* ſimplicia.

PERICARPIVM et nectarium nullum; Corolla ſemina inuoluens.

SEMEN vnicum oblongum, hinc conuexum inde ſulco tenui exaratum.

Duas ad hoc genus refero ſpecies, quorum altera ſpecifico nomine dici poterit: Agropyron (*criſtatum*) ſpica compoſita, floſculis hirſutis. Haec ab Ill. LINNAEO, bromus ſpiculis diſtiche imbricatis, ſeſſilibus, depreſſis, dicta, a beat. GMELINO autem ſub denominatione: Feſtucae culmo ſpicato, ſpiculis multifloris, in Flora ſibirica deſcripta et delineata fuit. Altera vero, noua ſpecies, erit:

AGROPYRON (*triticeum*) ſpica ſimplici, floſculis laeuibus.

Deſcriptio. Radix annua, fibroſa, capillaris. Culmi ex ea plures, ſemipedales, adſcendentes, ſimplices, ex quatuor vel quinque internodiis inaequalibus conflati.

Folia plana, acuminata, nuda, ſtriata: vaginis inferioribus cylindricis, ſtriatis, arctis; ſuprema autem laxa, ventricoſa, magis ſtriata atque annulo membranaceo, lacero, tenui, terminata.

Spica ouata, ſimplex, compreſſa, facta ex ſpiculis decem ad quindecim, diſtiche imbricatis, alternis, depreſſis, ſeſſilibus, adſcendentibus glaberrimis.

Calycis glumae ex triquetro nauiculares, dorſo inſigniter carinato, planam ſpicae partem reſpiciente apice autem in mucronem ſubulatum, ſurſum incuruatum, extenuato, ita, vt baſis atque dorſum

valuu-

valuularum, latera ſpicae plana, mucrones autem ariſtati, aciem eius efficiant.

Corollae teretiuſculae acuminatae, mucronibus in roſtrum conuergentibus, quod extra calycem, leuiter adſcendendo, producitur.

Ad Iaicum fluuium locis editis et ſterilibus elegans hoc gramen lectum fuit.

V.

Graminibus his ſubiungo Rubiam *cordifoliam* transbaicalenſibus Sibiriae ciuuem, a Cl. D. Prof. FALKE mecum beneuole communefactam. Similis eſt illi, quam Ill. LINNAEVS, ſub denominatione Rubiae foliis quaternis cordatis, in ſyſtem. Nat. Append. pag. 229. recenſuit, nec dubium, quin ſpecie quoque inter ſe conueniant; quum vero deſcriptio LINNAEANA fructificationis partes et florendi modum ſileat, ita vt vel de ipſo genere adhuc dubitari poſſit, noſtrae plantae, quae praeterita aeſtate laete in horto academico floruit, breuem heic addidiſſe delineationem, non ſuperfluum videbitur.

Sunt autem Rubiae *cordifoliae* radices perennes fibroſae ramoſiſſimae: ramis ſuperioribus lateralibus, repentibus, geniculatis, turioniferis. Color in recenti aurantius, in exſiccata ruber, ſed nimis pallidus, quam qui vſui tinctorio inſeruire queat.

Caules e radicibus plures, quaquauerſum diffuſi, cubitales, brachiati, tetragoni, angulis acutis

 retror-

retrorſum ſcabris. Rami ſimiles cauli, longioribus tamen internodiis diſtincti, praeſertim verſus extremitatem.

Folia vt in congeneribus verticillata, inferius ſena, in medio caulis et ramorum quaterna, in extimis ramis tantum bina. Figurae ſunt ex cordato lanceolatae, pagina *ſuperiore* ſcabriuſcula, ſaturate viridi et fere verticaliter patente; *inferiore* luteola, glabra; vtraque neruis quinque arcuatis ſtriata. Margo integerrimus, reflexus, retrorſum ſcaber. Petioli pariter ſcabri, in ſpontanea planta, folio longiores.

Flores racemoſi, pedunculis communibus binis vel quaternis ad latera petiolorum inſertis.

Calyx minimus, denticulis quinque vix conſpicuis germen coronans. Corolla monopetala cyathiformis; limbo patente, in quinque lacinias triangulares ſiſſo; coloris pallide luteſcentis. Stamina conſtanter quinque, corolla breuiora. Germen ſubrotundum glabrum. Corollae itaque ſtructura genus abunde declarat. Floret apud nos per omnem aeſtatem, ſed fructus raro perficit.

VI.

Ad Anemones nouam ſpeciem quae inter varias huius generis ſibiriae proprias ſtirpes non infimum locum tenet, progredior. Denominatione ſpecifica dici illa poterit.

ANE-

ANEMONE (*puſilla*) flore calyculato; ſcapo aphyllo pubeſcente; foliis radicalibus ternatis, inciſis.

Deſcr. Puſilla planta eſt, vix duos pollices longitudine ſua attingens; inſtructa radice perenni, ſimpliciſſima, paucis lateralibus fibris ſtipata, atque ſuperius denſo foliorum faſciculo coronata.

Folia radicalia plerumque ternata; compoſita, ex foliolo medio, reliquis longiore (in aliis anguſto et lineari, in aliis latiuſculo et fere cuneiformi, in omnibus vero vtrinque profunde inciſo) et foliolis duobus lateralibus priori ſimilibus, ſed minoribus et exteriore tantummodo latere inciſis. His quandoque alia foliola vario numero, eiusdem tamen cum praecedentibus figurae accedunt, vt folium ex ternato fiat digitatum, imo pinnatum; ſed rarius id nec niſi in quibusdam foliis aeſtiualibus euenire video. Omnibus iſtis foliolis, quae laete viridia et glaberrima ſunt, communis ſubeſt petiolus, longus, teres, laeuis, folium in ſitu erecto ſuſtinens et prope baſin ſuam in vaginam, caput radicis cingentem ampliatus.

Scapus vnico flore terminatus e centro faſciculi foliorum radicalium oritur, aphyllus eſt et foliis paulo longior, atque totus ferrugineo tomento obtegitur.

Inuolucrum calycem mentiens, monophyllum proxime ſub corolla poſitum, in octo vel decem

lacinias

lacinias diuiſum, quarum alternae latiores, ouatae concauae, alternae lanceolatae, planae, omnes vero extus virides, intus ſericea lanugine ſplendentes.

Corolla pentapetala patens; petalis ſubrotundis, concauis, ſtriatis, flaueſcentibus, inuolucro paulo longioribus.

Stamina numeroſiſſima, breuia. Germina in globum conuergentia, teretiuſcula, alba lanugine obducta. Stigmata ſimpliciſſima acuminata.

VII.

Vltimo denique loco addo Digitalem *glutinoſam* plantam flore quidem congenerum ſatis ſimili, ſed creſcendi modo ab iis non parum diuerſam. Gaudet enim radice repente tortuoſa, perenni, raris fibris lateralibus aucta. Ex hac variis locis caules enaſcuntur dodrantales vel paulo longiores, prope baſin foliis veſtiti, in medio plerumque nudi, verſus extremitatem ſuperiorem autem floribus atque foliis in ſpicam depreſſam collectis onuſti: Simplices caeterum ſunt iſti caules, herbacei, teretes et qua parte foliis deſtituuntur, ferruginea hirſutie ſcatent.

Folia radicalia alterna, approximata, ouata, obtuſe dentata et vtrinque villoſa. Petioli dimidio folio breuiores, ſulcati, caulem ex parte amplexantes.

Folia

Folia caulina raro alia, quam quae floribus ſubiacent, adeoque tantummodo floralia; ad ſingulum florem ſingula, ſeſſilia, lanceolata, dentata, vtrinque villoſa et floribus duplo breuiora.

Flores in capitulum ſpicatum congeſti, breuibusque pedunculis hirſutis affixi.

Calyx monophillus, hirſutiſſimus, venis reticulatus, laxus, in quinque lacinias aequales minus profunde inciſus. Corolla calyce triplo longior, piloſa, purpuraſcens; *baſi* anguſtata; tubi *ventre* deorſum gibbo; *dorſo* leuiter ſurſum incuruo; *limbo* quinquefido: laciniis rotundatis, duabus *ſuperioribus* erectis, nonnihil replicatis, *mediis* patentibus, *infima* reliquis maiore antrorſum producta.

Stamina quatuor, ſine veſtigio quinti; filamenta flexuoſa tubo corollae breuiora. Antherae bipartitae, lobulis lanceolatis. Germen ouato acuminatum, baſi oblique truncatum et margine receptaculi nectarifero cinctum ſtylus filiformis ſtaminibus paulo longior. Stigma bipartitum lanceolatum. Capſula bilocularis, biualuis. Semina numeroſiſſima, ſubrotunda, receptaculo diſſepimenti carnoſo affixa. Quum itaque fructu, antheris, et corolla cum digitali conueniat, ad hoc quoque genus referendam eſſe cenſeo plantam noſtram atque dicendam: Digitalem foliis radicalibus ouatis petiolatis,

 flora-

floralibus lanceolatis ſeſſilibus; caule ſubnudo, villoſo. Habitat verſus chinam.

Explicatio Tabularum.

Tab. XVIII. Fig. 1. Veronica grandiflora.

Tab. XVIII. Fig. 2. Lagotis glauca.

a. Calyx cum bractea florali.

b. Idem labiis diductis.

c. Corolla labio inferiore tripartito.

d. Piſtillum cum receptaculo nectarifero.

e. Sectio tranſuerſalis capſulae.

f. Semina naturali magnitudine. F. eadem aucta.

Tab. XIX. Fig. 1. Bromus ouatus.

a. Spicula naturali magnitudine paulo maior.

b. Eadem floſculis diductis.

c. Corolla cum germine et ſtylis.

Tab. XIX. Fig. 2. Anemone puſilla foliis anguſtioribus cum floris parte ſuperiore.

Fig. 3. Eadem foliis latioribus et parte floris inferiore.

Tab.

Tab. XIX. Fig. 4. Agropyron triticeum: naturali minus.

5. Spica et pars culmi, magnitudine naturali.

a. Calycis valuulae. *b.* Corollae glumae.

Tab. XX. Digitalis glutinoſa.

a. a. Radix. *b.* Caulis. *c.* Calyx. *d.* Corolla cum ſtaminibus. *e.* Piſtillum. *f.* Sectio germinis tranſuerſalis.

DESCRIPTIONES QVADRVPEDVM ET AVIVM ANNO 1769. OBSERVATARVM.

Auctore

P. S. PALLAS.

Exhibit. d. 16. Apr. 1770.

Pergo in deſcribendis nouis animalibus Imperii Rutheno-Aſiatici, quorum annus proxime elapſus, (MDCCLXIX.) largam meſſem obtulit, et forte largiorem dabunt ſequentes. Plura omnino quam ſperaueram in Zoologicis noua occurrerunt, imo plura quam Commentarii Academici limites capiunt. Ideoque ſelecta tantum praemitto ex quadrupedibus et auibus eaque breuiter deſcripta, multaque ex omni Zoologiae parte collecta in aduerſariis relinquens, *Faunae* olim *Rutheno-Aſiaticae*, quam, poſt exantlatos, ſi fortuna dederit, labores, copioſiſſimam praeſtare animus eſt, non exiguo ornamento futura. Praemitto haec autem, vt ſentiant hiſtoriae naturalis cultores, quantum proſperet ſcientia PROPITIO ſub NVMINE, quod vniuerſum orbem litterarium radiis ſuis illuſtrat, et ſub moderamine Patroni ſcientiarum, quibus augendis natus videtur, amore flagrantiſſimi, *Illuſtriſſimum* dico *Comi-*

Comitem VLADIMIRVM ORLOF, vt gaudeant, inquam, Phyſiophili tanto ſucceſſu, ſub Auſpiciis tantis, rem ſuam agi, notioremque CATHARINA *Ruſſis Imperante* futuram, quam inquilina ipſius Europae paſſim eſt, in remotis Orientis plagis Naturam.

I. *MVS CITILLVS.*

Citillus, quem poſt AGRICOLAM Zoologi nominarant omnes, at nemo illorum oculis viderat, in campeſtribus Ruſſiae et Sibiriae auſtralioris copioſius eſt animal, quam in ſyluis ſciuri, imo fere quam ratti in vrbibus et pagis. Iam ad Pianam et Suram fluuios paſſim occurrit, ſed rarius; inde vero quo magis verſus meridiem et verſus orientem procedas, copioſius. Tandemque in deſertis trans Volgam campis adeo numeroſum habitat, vt facile vna die centeni intra paucorum ſtadiorum ſpatium capi poſſint. Notiſſimus ille vbique eſt ruſtico nomine *Suslik* (сусликъ) quod mire cum Germano-Slauonico, ab AGRICOLA adhibito *Ziſel*, et cum Polonico apud *Rzaczinskium* expoſito Suſel conuenit. Contra Tataris appellatur *Θymron* (*), quod a Morduanis in *Simral* et *Imral* corrumpitur, aput Calmuccos vero in *Zurrma* deflectitur. Accepi in Sibiria Tab. XXI. Fig. 1 et 2.

Zzz 3

(*) Conſonantem tataricae linguae proprium non potui aliter exprimere, quam per Θ Graecorum, quod moderni Graeci ſibilo pronunciant, vti Angli *th* et Hiſpani *ç* ſua in lingua vtuntur.

ria nomen *Iemuranka* illis appropriari, et in *Provincia* Iſetenſi, a rudi aliqua ſimilitudine, *Feles campeſtres* (степныя кошки) ab incolis appellari; imo quibusdam locis ſub nomine *Avraſchka* veniunt.

Non vti Criceti, qui in campis hiſce deſertis et graminoſis paſſim, ſed rarius multo, habitant, campeſtrium plantarum ſemina varia legit citillus, ſed teneriores plantulas, et ſucculentiora atque inſipida vegetabilia depaſcitur. Sicubi forte in vicinitate ſatorum, hortorumque quibus Citrulli coluntur, (бахчи Ruſſi vocant) latitet, ibi ſegetem quoque teneram et Citrullorum fructus maturos depopulari dicitur. Cultioribus tamen in locis in genere rarius habitat, neque ſyluas et montanos tractus colit, ſed campis elatis, apricis, aridiuſculis maxime abundat, contra atque, ſatorum hoſtis et pernicies cricetus.

Cum ob hanc cauſam, tum quia parco victu et ipſis praeſertim herbis victitat, neque ad hyemem granaria replet, multo minus, imo vix quidquam noxae Agricolis citilli inferunt, vnde nec a ruſticis incurioſis infeſtantur, neque ab iis qui venationi et capturae ferarum indulgent requiruntur, cum pelles illorum, quamuis elegantes, in veſtibus adhibere, ob pili raritatem, nondum in Ruſſia receptum ſit. Adeoque ſolos humano e genere hoſtes habent calmuccos, quibus eorundem in deliciis caro eſt, et puerulos, qui otioſi in campis infuſa

antris

antris aqua expellunt, vel poſitis in aditu laqueis decipiunt illos, funiculisque laneis, quos non facile corrodunt, adligatos varios in luſus captiuant. Certe ob lepiditatem, morumque innocentiam et mitem indolem vtique meretur animalculum, vt parceatur illi, quamquam pelles, ſi magis innoteſcerent, apud exteros elegantia ſeſe ſatis commendaturae forent; caro autem in cibum ab expertis laudata mihi fuerit, gliresque Romanorum in menſis cum laude ſupplere poſſe videatur, autumno praeſertim, quum ſunt pinguiſſimi Citilli.

Tutus a maiore parte hominum Citillus non aeque tutus eſt a minoribus, nocturnis, campeſtria habitantibus feris, muſtelino e genere; Putorio ſpeciatim Ermineoque, quorum aeſtate facilis et ſolemnis eſt praeda. Neque antra, quae ſibi fodit, ſecurum illum praeſtant, quia vnico gaudent aditu, eoque, ob molem corporis, praeſertim maſculis, ſatis capaci, vt Putorii maiores quoque ſubire posſint; quos animalculum, incondito morſu non bene oppugnare valet, timidum praeſertim, et ineptum quando terrore percellitur. Extra antrum, dum interdiu vagatur, non raro etiam Falconibus variis obuolitantibus in praedam facillimam cedit.

Ad antra fodienda praeſertim eligit campos, vt iam monui, altiores, vel plana et decliuia collium apricorum, vbi ſolum arenoſum vel pauco limo mixtum et firmatum eſt; et herbae nonnimis luxu-

luxuriant. Seniores; vel qui ſeniorum deſertos cuniculos occuparunt, facile produnt foramina duo vel tria ampliora, modo aliquot paſſis, modo parum ab inuicem remota, ſpithamae plus minus in profunditatem peruia, quorum vnum praeterito autumno occluſum indicat egeſta ibi terra. Nouus, quo eo anno vtitur animal, canalis anguſtior eſt reliquis, et exacte animalis magnitudini ſolet eſſe proportionatus; nullam ibi terram egeſtam videas, ſed nihil praeter foramen rotundum, in terram directione perpendiculo plerumque proxima deſcendens, et herbis ſaepe ita tectum, vt lynceo vix oculo detegas. Maris antrum denotat apertura, per quam iunctos transuerſim tres digitos facile inſeras, minutum vixque duos digitos admittens feminas. Canalis obliquata parum directione in terram penetrat, ad duum, trium, quatuorue pedum profunditatem ea lege vt multo profundior ſemper ſit feminae cuniculus, quam maris. Vlterior cuniculi pars dein obliquius pergit, poſtque varios anfractus dilatatur in cameram oblongam vel ſubrotundam, ſubpedalis vel minoris diametri, depreſſiuſculam, culmis ſiccis comminuti graminis molliter ſtratam, vndique praeter aditum clauſam. Iuniora animalia, vel, quod ſaepe fit, quae nouum ſibi fabricant cuniculum, praeter ſolitum aditum, nihil niſi caecum, aliqua ab iſto diſtantia, cum egeſta terra, foramen indicat. Nempe per obliquum cuniculum plerumque terram ſubit animal, terram continuo

retro

retro proiiciens, totamque e camera quam parat et canali quem pro exitu habet, partim per obliquum priorem canalem euerrit, partim huic ingerit, eumque obturat firmiſſime. Appropinquante hyeme, nouum ſibi incipit parare canalem animal, quem ad caeſpitem vsque perducit, omnemque ex illo terram vſitato prius canali intrudit, quo ſimul ille ad hyemem clauditur, nunquam tamen ita pleniter, vt non ſequenti vere coecum eius, vt dixi, veſtigium appareat. Quem vero ad caeſpitem perduxit nouum exitum, primo vere, quamprimum defluxere niues, et extima terrae cruſta reſoluta eſt, ex hyberno torpore excitatus pertundit, inque lucem exit Citillus.

Exitus ergo antri conſtanter eſt vnicus, et quoties nouum fodit animal obturat antiquum, tranſeuntis forte aëris impatiens, quem contra Cricetus, duplici apertura conciliare ſibi ſtudet. Ea vero ſtructura tunc fit pernicioſa Citillo, quando a rapacibus Muſtelis in antro oppugnatur, vel aqua infunditur; cuius tamen ſaepe quinque vel plures amphorae, praeſertim pro antris feminarum, requiruntur, ad exturbandum animal, quod ſenſim altius et altius adſcendit, donec repleto cuniculo madidum exeat tandem, frigiditate aquae ita perculſum, vt ad fugiendum vires fere deſint. Alias curſu quo pollet ſatis expedito, ſubſultante, ſaepius effugeret.

In hiſce ſuis cuniculis, ſolitarii viuunt Citilli, nec niſi tempore veneris, maris feminae in cu-

 niculo

niculo ſubinde deprehenduntur; mas vero mordacis feminae anguſtum cuniculum ſubire ipſe nequit. Primo mane, et oriente fere ſole antris exeunt, totaque die, ſi ſerena fuerit, interpoſita ſubinde quiete, vsque ad quintam et ſextam horam, et ſolis fere occaſum, vagantur, pabulantur, inſolantur, colludunt mares cum feminis. Feminarum tunc in campis fiſtulatus crebro exaudiuntur. Mares magis taciturni ambulant. Si hominem viderint ſtatim ad antra refugiunt. Videas etiam paſſim prope antra excubantes, inque talos erectos circumſpicientes; et quantocyus inimicum viderint, edito conſueto fiſtulante ſono, in cuniculos ruentes; quod marmotis etiam ruthenicis ſolemne eſt.

Vix vidi animal, quod facilius cicurari poſſit Citillo. Mares omnes, etiam ſeniores, vnam fere intra diem, iuniores aliquot horis, non ſolum catenulae adſuefiunt, ſed et ita manſueſcunt, vt coram hominibus ambulare, pabulari, lauare, ludere non pertimeſcant, imo poſt aliquot dies, domeſticorum inſtar animalium ad hominem ſponte accedant, ſeque manibus demulceri atque tractari patiantur, vel e digitis cibum legant. Feminae tamen, praeſertim ſeniores, vti natura ſunt mordaciſſimae atque ſubdolae, ita nunquam feritatem, plane deponunt. Contra marmotae noſtrates, etiam feminae et adultae, intra aliquot dies domi manſuetiſſimae fieri ſolent.

Multos

Multos domi alui Citillos, moresque animalis ſimpliciſſimos et innocuos otioſe contemplatus ſum. Noctem ſemper totam ſopiti quieſcunt, a prima iam veſpera torpeduli. Saepe et interdiu, pluuia maxime et procelloſa tempeſtate, plenoque ventre ſopiuntur. Dormiunt autem clunibus inſidentes, conglobato corpore, palmis et capite inter proiecta femora reconditis, more prorſus marmotae, cum qua ſummam ſtructurae et indolis habent ſimilitudinem; paulo agiliores tamen, minusque ſtupidae mihi viſae. Somno plerumque adeo profundo torpent, vt aegre excitentur, dormientes ſubinde in latus prouoluantur, imo ex altiore loco decidant, iaceantque mortuorum fere ſimiles, per minutum et quod excedit.

Ambulant, ſaltabundi currunt, in clunes vel talos varie eriguntur circumſpicientes, corpore extenſo et diuaricatis cruribus, anguſtias perrepere poſſunt, cibum minutum et herbas ore e terra legunt, maiora vero fruſtula, dentibus prehenſa in palmas accipiunt et conſumunt ſedentes, *omnia vti Marmotae.* Lepidiſſimum eſt videre, poſt paſtum vel quandocunque roſtrum vel pedes inquinarunt, qua diligentia non ſolum os et faciem, ſed totum quoque caput palmis lingua humefactis ſciuri inſtar permulceant aut lauent, poſticis pedibus ſcabendo excutiant puluerem, linguaque et palmis latera et ventrem pectant. In genere etiam ſcabi, et mani-

 bus

bus foueri atque demulceri amant. Inter ſcabendum pigreſcunt, et oſcitabundi pandiculantur, praeſertim poſt ſomnum, quod et in Marmotis cicuratis obſeruatur.

Qui in hypocauſto aliquam latebram ſubire poterant, minus cicurabantur, qua in aprico detenti. Vinculis liberati electa quacunque latebra, praeſertim feminae grauidae, congerebant lanam, pilos, foeni et herbarum quidquid conquirere poterant, et ſi haec deeſſent, ligna et limum fornacum rodebant, chartasque cominuebant, vt nidum ſibi pararent.

Cicurati mares raro, niſi perterriti aut irritati, fiſtulatum penetrantiſſimum ſuum, hiante ore, edunt. Feminae multo clamoſiores ſunt, vocemque paulo productiorem et debiliorem, magisque querulam ſaepe iterant iracundae, impatientes, aliterue turbatae. Praeterea iracundi grunniunt, quod Marmotae potius blandientis eſt, et feminae ſtertunt, fere vt felis, quando deprehenſae commordent. Famelici et irritati, aliterue ad acuendos dentes, colliſis iisdem et contritis ſtrident, quaſi *Gryllum ſtridulum* dictum, volantem audires. Pugnantes feminae ſtatim in latus et dorſum ſeſe proiiciunt dentes vnguesque hoſtibus opponentes, felium inſtar. Mares tantum dente et palmis ſe defendunt.

Cicures mares, qui primo vere capti erant, adlatas e campo feminas auide excipiebant, demulcebant,

cebant, totoque corpore velut deoſculabantur, continuo fiſtulante et quaſi leuiter repugnante femina, quam tandem reluctantem palmis mediam arctiſſime complexus mas, ſecum in latus proiiciebat, et cute ceruicis mordicus adprehenſa poſticis pedibus circa femora faeminae adfixus, ſubigebat, inquietam et ſubinde paſſerum ſimili voce ſtridulam, donec poſt vnum alterumue minutum perageretur opus. Poſt congreſſum piger mas, eandem vix vltra curabat feminam, raroque in nouam eadem die venerem ſufficere videbatur. Praegnantes feminas odore detegebat, et cito relinquere ſolebat intactas. Habui mares, quos e magnitudine anniculos eſſe conſtabat, qui ad venerem inepti fuerunt; ſed an hoc lege naturae, non dixero. Pepererunt feminae omnes intra vigeſimum quintum vel trigeſimum ab inito congreſſu diem, quod in initium Maii menſis circiter incidit. Pariunt nudos et caecos, informes, mole ſatis inſignes pullos, trinos, quaternos, interdum ſenos. Hi tunc tanta celeritate adoleſcunt, vt ineunte Iunio captos parum iam a magnitudine matris abfuiſſe viderim. Non tamen prius, quam ſub autumnum matris cuniculum deſerunt, ſibique ipſis proprium fodiunt, puto illos tertio demum anno generare; certo tamen affirmare non auſim. Vitae interim breuitatem ex tempore geſtationis atque adoleſcentiae exiguo hariolari licet.

Pabulum cicuratis meis vſitatiſſimum fuit triticum, et ſecale, auena, panis. Herbas inſipidas

et teneriores omnes depaſcebantur; praeſertim tetradynamas, polygonum auiculare, trifolia, cytiſos, robiniam fruteſcentem, betulam, cet. Raro ſitiebant, ſique recuſaretur potus, vrinam propriam lambebant; nunquam vero ſi aqua praeſto eſſet. Bibunt lambendo et parciſſime, vti feles. Niuem non comedebant ad reſtinguendam ſitim, vt hyeme ſciuri auidiſſime ſolent. Contra perdite amarunt lacticinia, Marmotis pariter expetita, iisque vltra modum ventrem replebant, ita vt ſaepe inde aegros et diarrhôea laborantes, imo pereuntes viderim. Neque aquam curabant lacti adſueti, et recentes capti oblatum lac, ſtatim ac deguſtauerant, lubenter hauriebant, indeque maxime cicurabantur. Praeterea ſaepe panem butyro illitum, placentulas butyratas, carnes coctas et aſſatas, imo lardum ſalſum comederunt cicurati et in genere pinguia impenſe amare viſi ſunt. Famelici vero nihil fere, niſi maxime contraria, reſpuebant, imo propria excrementa, quae Rattorum fere ſimilia ſunt, ſaepe deuorarunt.

Cum Marmotis, in eo maxime conuenit Citillo, quod tota hyeme ſine alimento in antris ſuis torpeat. Primis plerumque ſeptembris diebus, quo fere tempore frigora, ſaltem nocturna primulum incidunt, exitum antri ſui aeſtiuum claudit citillus, terra, quam vt dixi e nouo canali euerrit, quem ad caeſpitem vsque, pro futuri veris exitu, parare inſtin-

inſtinctu quodam ſolet. Eo tempore pinguiſſimi ſunt totique adipoſo cortice quaſi incruſtati, eoque iam pigri atque tardi, quippe naturaliter ſomnolentae indolis. Accedens frigus adhuc pigriores reddit, in cuniculis coercet, et ad ſomnum diſponit ſenſim, tandem, poſtquam propter frigus cuniculum obturavit animal, incluſus aër prioribus cauſis iunctus, plane torpidos et immobiles reddit. Minuitur in hiſce animalibus ab externo frigore ſanguinis calor, vnde lentior circulatio et forte primaria cauſa ſoporis et ſine alimento vitae. Minuitur, inquam, ſed non eo gradu, quo BVFFONIVS in mure auellanario decedere calorem obſeruauit, quemque ipſe in Sciuro Glire LINNAEI et Erinaceo, hyeme quaſi mortuis animalibus certis et repetitis experimentis atque thermometro ſenſiliſſimo et exactiſſimo obſeruaui. Scilicet in Citillo ſummus ſanguinis calor aeſtate conſtans ſolet eſſe 91° ſcalae *De l'Islianae*. Sed quando infuſa aqua ex cuniculis proturbatos, indeque quaſi torpentes examinaui, ſaepe non vltra 106°. imo nonnullis vix ad 110° adſcendiſſe Mercurium vidi. In cella glaciali aliquot diebus detentis tandem, et dormitabundis factis, gradum caloris 130°. circiter perſtitiſſe expertus ſum.

Primo ſtatim vere, ſecundum ruſticorum calculum feſto circiter annunciationis, ſecundum Ruſſicum nempe calendarium, (April 5. Styl. nou.) vel paulo poſt, plerumque certe ipſo Aprilis initio vel,

vel, qui tardiſſime, ante eiusdem medium (ſec. Styl. nou.), ex antris paulatim pertuſo caeſpite exeunt Citilli; in altioribus auſtroque obuerſis collibus, vbi cito pereunt niues, citius, in frigidiori et inundato a niualibus vndis campo tardius. Macilentiſſimi tunc ſunt, tantum in iliis, axillis et omentis relicta pinguedine, quam autumno adeo copioſe collegerant. Ventriculum et inteſtina tunc inuenias vacua, et vsque adeo contracta, vt etiam vehementi ſufflatione vix ad dimidium ſolitae capacitatis diſtendi queant; etiam coecum, quamuis hoc, ſub finem quoque hyemis, ſemper fuſcae ſaburrae aliquantum contineat. Primis temporibus ob hanc ipſam cauſam Citilli nonniſi parciſſime cibum capiunt, cauente Natura; vt lente a diuturno ieiunio deſueſcant. Nihilo tamen ſecius, hyberno ſomno et diaeta quaſi praeparati, ſtatim atque exeunt tumidis teſtibus mares atque florido vtero feminae in venerem ruunt. Videas tunc in campis vbique per paria ambulantes.

Quamuis eo tempore vix pullulare incipiat herba tamen cito admodum pingueſcunt. In ventriculis, verno tempore diſſectorum, adhuc non bene diſtentis, plerumque nil niſi gramen et fruticum cortices commanducatos inueni contentaque ventriculi in puriſſimo hocce animalculo non ſolum nauſeoſi nihil olent, quod pleriſque tamen animalibus ſolemne eſt, ſed gratiſſimum etiam et quaſi e conciſis

Betu-

Betularum virgis odorem ſpirant, quod in Tetraone Tetrice quoque obſeruari ſolet. Ipſum tamen animal, Marmotae ad inſtar, ex ore ferinum quiddam redolet, toto ceteroquin corpore omnis foetoris expers, nec niſi eo turpe, quod aeſtate adulta pediculis peculiaribus, cimicum minutae proli ſimillimis, ſcatere ſoleat.

Haec omnia generatim propoſui; quia omnibus Citillis conueniunt. Notabile autem eſt duas dari varietates diſtinctiſſimas, quarum ortus eo difficilior explicatu erit quia in finitimis admodum terris, nunquam tamen mixtim, habitant. A quinquageſimo ſexto vel ſeptimo ſcilicet latitudinis borealis gradu in deſertis ſecundum Volgam et vsque ad Tanaim ſitis, ad gradum quinquageſimum tertium fere vsque minores occurrunt Citilli, vellere pulcherrime maculoſo vel guttato, proceribus etiam expetito, nobiles, cauda vero breuiſſima tereti; neque lanata inſtructi, qualem Tabula XXI. fig. 2. ſiſtit. Quamprimum vero Volgam tranſeas, vel a montano tractu inter Suram et Volgam a Syſtanienſi regione extenſo, ad auſtrum procedas, vbique copioſos quidem citillos, ſed longe maiores, vellere ſtictico, e cano fuſcoque mixto, ſubflaueſcentes inconſpicuos; cauda vero paulo longiore et ſciuri ad inſtar, longioribus villis criſtata inſignes. Et tales per vniuerſum deſertum inter Volgam, Samaram, Iaicum fluuios et Caſpium lacum incluſum, perque Varietates. Fig. 2.

 vaſtiſ-

vaſtiſſimos Nomadum campos ab orientali parte Iaici latiſſime patentes, imo in Sibiriam trans Irtin vsque fluuium abundant Citilli, vix vlla mutatione notabili, praeterquam quod ad Irtim fluuium, vnde adlatas pelles vidi, paulo obſcuriore dorſi, et magis ad rufum inclinante proni corporis colore deprehendantur. Certe ſi vllam in proportione partium, in viſceribus, moribusue animalis differentiam obſeruare potuiſſem, pro diuerſa ſpecie vtramque varietatem tradere nullus dubitaſſem. Sed multo magis inter ſe conueniunt, quam marmota alpium helueticarum, cum marmota ruthenica, in cuius vellere et palmis pollice inſtructis, (mores vt ſileam diuerſos) aliquam ſpecificam differentiam quilibet facile notabit, licet minimam.

Hoc ſolum diſcrimen in moribus inuenire potui, quod *Citilli*, *cis-Volgenſes*, vtpote minores, multo exiliorem cuniculum minusque profundum, quam *altera varietas*, fodiant. Explicent ergo alii, admirandum hunc Naturae effectum, cuius ego cauſas neque in pabulo, neque in climate aſſequi poſſum, contentus vtriusqne deſcriptionem adieciſſe, et quidem primo copioſioris maiorisque varietatis.

Deſcriptio. Tab. XXI. Fig. 1. Maſculi huius varietatis mole ſciurum ſuperant, et ieiuni atque macilenti vere, plerumque libram vnam et aliquot vncias medicas pondere ſuperant; imo ſeniores habui, quorum pondus librae cum nouem vnciis aequale fuit. Anniculi vero et

biennes

biennes minores et leuiores omnes ſunt; et feminae etiam his minores, quippe quae nouem vel decem vnciarum pondus excedere nunquam, niſi grauidae ſolent.

Caput minus depreſſum, quam in marmota, roſtrum magis conicum, parotides minus gibbae et collum tenuius. *Naſus* nigricans, conuexus, pubeſcens; nudus tantum circa *nares* lunulatas, *ſepto* canaliculato diremtas. *Labium* ſuperius vsque ad naſum bipartitum. *Buccae* ſubſinuatae auellanae maxime in femina capaces. *Dentes* primores ſuperiores conuexi, parum luteſcentes (vix in feminis) truncati inferiores albi, apice adtenuato-rotundati.

Myſtaces nigri capite breuiores, minus ordinati, quinque fere ordinibus, per latera roſtri conuexa ſparſi, ſupra oculum anterius ſetae nigrae, 4, ſerie transuerſa; ſetae paroticae itidem transuerſo ordine 4, vt in marmotis. Sub gula verrucula ſetis tribus tenellis, albis. Seta longa ſolitaria, in medio antibrachii, exterius.

Oculi magni, prominuli; *Irides* brunneo-fuſcae; *pupilla* maiuſcula, etiam ad lucem longitudinaliter oualis. *Periophtalmii* loco, caruncula canthi vnguiformis, fuſca.

Auriculae nullae. *Meatus auditorii* nudi, anfractuoſi, poſterius margine craſſo, piloſo cincti; quale reſectae auriculae, cicatrice obductum veſtigium in canibus fricatoribus eſſe ſolet.

Corpus reptabundum, depreſſum, minus ventricoſum, quam marmotis, flexile et per anguſta ſpatia facile penetrans. *Pellis* tenuis, laxa, praeſertim ad armos atque ſemora.

Artus tenuiores, quam in marmota; *palmae* tetradactylae, vnguiculo pollicari conico, inſigniter prominulo, magis quam in marmota ruthena. *Plantae* pentadactylae tribus mediis ſubaequalibus. *Vngues* nigri, compreſſi, acuti, palmis longiores.

Cauda poſticis artubus breuior, linearis, ſubannulata (murino more), ſed piloſiſſima, villisque longis in latum ſparſis ſciureae aemula, maxime quum iracundum expandit illam animal.

Vellus breue, laxum, ſatis molle; *vertex* pilis fuſcis, extus albicantibus caneſcit; ſed naſus, latera roſtri, tractus ſupra ciliares et oculorum cum genis, auriumque ambitns luteo ferrugineſcunt; intenſius naſus, ſupercilia, et macula ſub oculo.

Corpus ſupra totum pilis extremo albidis, annulo fuſco notatis, imo gryſeis mixtipile, caneſcens, aliqua flauedine. Subtus corpus e flaueſcente album, rudiori vellere veſtitum; ſed collum ante armos, et pedes quatuor lutei. *Caudae* villi corpori concolores, vnde ex luteo extus albicat, fuſco immixto.

Feminae in dorſo paulo magis luteſcunt, et caudam habent villoſiorem. *Papillae* a ſinu axillari ad

ad inguina vtrinque octo, aequidiſtantes, praeter inguinales viciniores. *Glandulae* diſtinctae lactiferae ad ſingulam papillam. *Scrotum* maſculis nudiuſculum, fuſcum. *Anus* citillis, vti marmotae, ſub compreſſionem ventris tribus papillis conicis extrorſum riget, quae in ſtatu contractionis totidem ſinus ſebaceos intra ipſum marginem orificii conſtituunt.

Longitudo maſculorum maiorum, ab apice naſi ad ortum caudae, ſolet eſſe 10 pollicum; in feminis 9 pollicum et aliquot linearum, etenim minores quamuis hae, longitudine tamen corporis vix cedunt maſculis. Cauda huic ſpeciei 2 poll. 10 lin. in maribus pariter atque feminis; ſed villus extremitatem adhuc pollice et vltra exſuperat.

Panniculus muſcularis in dorſo inſignis, vti marmotis et dorſum autumno totum ſub panniculo pinguedinoſum. *Glandulae* thymo analogae ad collum, ſub muſculis pectoralibus, et thymus maxima, vt in iisdem. *Foetor* aperti abdominis, item vt in marmotis, inſignis. *Omenta*, vt in illis, lumbaria pinguiſſima, a latere viſcera obuoluentia; *Omentum* ventriculi vero circa ipſum ventriculum conuolutum.

Hepar tripartitum; *Cyſtis* maiuſcula, globoſo-adtenuata; bile ſaturatiſſima turgens. *Lien* mediocris, triquetro-depreſſus. *Vetriculus*, *coecum*, et *coli* conduplicatio, vt in marmotis. *Tenuis inteſtini*

 Longi-

longitudo circiter tripedalis; *Colon* a coeco vsque ad anum 20 pollicum.

In *genitalibus* maſculis maxime notabiles *glandulae* duae globoſae vtrinque ad caudam ſub pelle haerentes, duriſſimae, in aqua ruptae eructantes gelatinam hyalinam, tenaciſſimam. Hae ampliſſimo canale effunduntur in vrethrae portionem dilatatam, intus lacertulis quaſi pinnatam. *Glans* acuminata, margine agariciformi cincta, apice rigido, continens oſſiculum incuruum, extremo ſpatulato atque denticulato extra cutem prominulum, vix longitudine $\frac{2}{3}$ lineae. *Veſiculae* ſeminales ſimplices, triquetra portione terminali replicata ſupra inferiorem. *Teſtes* maximi. *Vulua* feminae ſimplex, *clitoride* papillari, terminata oſſiculo vnguiformi, denticulato; minutiſſimo, vti maſculae glandis. *Vteri* cornua per omentum lumbare decurrentia; foetuum inaequali plerumque numero grauida. *Placentae* craſſae, ſimplices, orbiculatae. Sed longum foret omnia proſequi, in animalculi curioſiſſimi ſtructura.

Deſcriptio. Fig. 2. Ad minorem accedo *Varietatem guttatam*. *Pondus* his etiam autumno, cum ſunt pinguiſſimi, vix vltra decem vncias; et pinguedo omnis deglupta in talibus ponderabat vncias duas et aliquot drachmas, praeter omenta, larga quidem et albiſſima, ſed leuiſſima pinguedine farcta, quorum pondus fuit drachmarum tantum quatuor cum ſemiſſe. Animal, niſi magnitudine et colore, plane non a priori diverſum.

verſum. *Color* capitis et dorſi magis ad gryſeum fuſcumque declinans; in capite ſticticus, vti maiore varietate; ſed in dorſo albedo fere omnis collecta in maculas diſtinctas, orbiculares, quae pellem elegantiſſime guttatam reddunt. Praeterea ambitus oculorum albeſcit, naſus pallide luteſcit, vix ferrugineſcunt ſupercilia; ſed litura infra oculum lunata intenſe ferruginea. Latera colli et pedes, maxime antici lutei, non vt in altero, ruſeſcunt; contra vero prona corporis facies non albicat, ſed tota obſolete luteſcit; tantum gula late alba. *Cauda* vti iam monui, longe breuior, et piloſiſſima quidem, ſed pilis ſtrictis atque breuibus teres, nec lanata. Et hic coloris et corporis habitus plusquam in ducentis ſpeciminibus a me examinatis aeque conſtans fuit, quam ſupra deſcriptus maioris varietatis, cuius pariter aliquot centenos mihi ceperunt ruſtici, in loco a priorum patria non multo plus quam centenis ſtadiis Ruſſicis (milliariabus germ ferme 15.) diſtante. Neque vnquam in eodem loco varietatem vtramque obtinere potui. *Longitudo* minorum ſumma ſolet eſſe nouem circiter pollicum; ſed multo minores naſcuntur feminae. *Cauda* in maximis tantum linearum quatuordecim pollicis. Interraneorum conſtitutio ita per omnia ſimilis, vt iterare ſemel iam dicta ſuperuacaneum foret.

II.

II. MVS TALPINVS.

Fig. 3. Datur animal in regionibus auſtralioribus Ruſſiae, ad occidentem Volgae ſitis, mole fere Citilli vel Sciuri, quod ſub terra continuis cuniculis incedit, et magnos cumulos egerit; coecum, auribus deſtitutum, natura tamen et characteribus omnibus a murino genere haud abludens. Mihi quidem admirandum hocce animalculum ſubterraneum, quodque Zoologos hucusque omnes latuit, non occurrebat, nec niſi pauca eius exempla a Socio itineris *Academiae Imperialis Adiuncto et Med. Doctore Dn.* LEPECHIN circa Saratouam lecti vidi; ſed aliud deſcribam iſti, praeter magnitudinem ſimillimum; et adeo analogum, vti citillns marmotae, a qua pari etiam gradu magnitudinis differt. Mirum eſt, vulgatiſſimum hocce animalculum, quod etiam Germaniae quibusdam regionibus inquilinum eſſe ſcio, a nemine hucusque Zoologorum indicatum fuiſſe. In campeſtribus auſtralioris Ruſſiae et, quantum exquirere potui, Sibiriae nusquam non datur, et arida quoque deſerta non reformidat, quamuis in herbidis, ſubtumidis et iis praeſertim locis maxime abundet, vbi Phlomis tuberoſa vel Lathyrus tuberoſus copioſe creſcunt; quorum in radice tuberculis maxime delectatur, vario ceteroquin radicum genere victitans. His vt potiatur, ſub ipſo caeſpite et ſuperficie terrae cauos canales per longos tractus fodit, ſesquiorgyae vel maiori minoriue interuallo pertundens caeſpitem et terrae cumulum talpino ſimilem

milem, ſed longe minorem, et ſpithamalem vix diametrum ſuperantem egeſtans. Hoc labore praeſertim veſperi et ſub auroram occupatus obſeruatur Mus talpinus, et totam forte noctem in eo conſumit. Noctu etiam cuniculo relicto migrat, alioque denuo loco propter quaerendum pabulum et latebras, ſeſe ſuffodit. Interdiu vero nusquam apparet; ceterumque ſolitariam ſemper vitam agit. Nidum aeſtate certum vix niſi femina habet, et de huius quidem nido et partu mihi non conſtat. Accepi et veroſimile eſt, vere adulto parere et nidum e molli gramine ſubterraneum parare pro pullis. Hoc certe noui, ad hyemem vel ſub foeni aceruis in campo hybernaculum quaerere, murem talpinum, vbi ſaepius verno tempore vidi, ablato foeno innumeris canalibus quaquauerſum ſulcatum et perfoſſum caeſpitem, comeſtasque radices; vel ſi huiusmodi deſit auxilium pro hybernaculo ſibi fodit loco aliquo depreſſo cuniculum, ad vlnae vel ſesquiulnae ſaepe profunditatem, quem egeſtae terrae vndique inſigniores cumuli produnt, et in quo effoſſarum etiam radicum ſibi paenum, peculiari cauernula effoſſa, colligere certo ſcio.

Facile capitur animalculum, ſi ſit patientia. In locis vbi recentes cumuli terrae apparent veſperi vel primo mane vigilandum eſt, et leni greſſu accedendum ad locum vbi tunc plerumque animalculum oſtio in caeſpite facto terram ſumma agilitate

 egerere

egerere videas. Dum in hoc eſt, canalis ſubterraneus, cuius directio facile ex prioris diei cumulis cognoſcitur, infixa ſpatha intercludendus, et manu cito inde ab oſtio auferendus caeſpes; ſic animalculum quod in ſuo canali vsque ad ſpatham receſſit, viuum capietur. Imo digitis in ipſo oſtio captum fuiſſe ſcio; namque oculis minutis adſtantem hominem non videt; auditu ſolo pollet Captum vocem edit nullam, neque maximis ſuis dentibus ad defenſionem vtitur, breuique et leuiſſima e cauſa moritur. Ruſticis vbique notum eſt ſub nomine vago *Slepuſchtſchonka*, quod coecam ſignificat, vel magis ſpeciei appropriata denominatione *Semljaroika*, quod terrae foſſorem denotat. Innocuum hucusque eſt, deſertis et vaſtis praeſertim campis addictum; ſed horticulturae infeſtiſſimum eſſe animal, quod plantarum culinarium radices corrumpit, et multo maius damnum infert, quam talpa, quae in profundiori terra lumbricos quaerit, Germanorum horti ſatis experiuntur, vbi ſub nomine *Râütmauſſ* paſſim notum, ſed a nullo tamen Zoologo viſum et deſcriptum fuit.

Deſcriptio Fig. 3. *Magnitudo* muris talpini fere quae *Muris amphibii*, quem etiam facie et forma aliquantum refert mutatis ſcilicet, quae propter ſubterraneam vitam mutanda ſapiens Natura coaptauit. *Pondus* drachmas decem rarius, nec vnquam vndenas excedit.

Caput

Caput grande, ſubrotundum; roſtrum breuiſſimum, craſſum retuſum, lateribus hirſutiſſimum. Naſus plane non productus, truncatus, didymus, fuſcus, nudus, *nares* conniuentes, diſtantes.

Labium ſuperius vsque ad nares late bipartitum, hians, dentesque ſuperiores vsque ad baſin detegens, ab vtroque latere vero tumidulum, pubeſcens, intraque os conniuens et coëuns, palato pone dentes primores deficiente. *Inferius* labium craſſum, dentes vaginans, vt in congeneribus omnibus.

Dentes primores ſuperiores denudati, quaſi extra os porrecti, magni, interius plani, lataque acie terminali rotundata. *Molares.*

Myſtaces nigri, breues, deorſum vergentes, per hirſuta roſtri latera ſparſi, 5 fere ordinibus. Punctum ſupraoculare tripile, paroticum et gulare vnipiles; pili ſparſi per inferioris labii ambitum.

Oculi vertici, et naſo propiores, minutiſſimi, vellere ferme latentes, nigri. *Aurium* apertura mediocris, vellere obumbrata, poſterius margine prominulo marginata.

Corpus breue ventricoſum; *artus* breues, robuſtiſſimi. *Pedes* nudiuſculi, albidi, omnes pentadactyli, digitis ſubsquamatis. Palmae maiores, latae foſſoriae, digitis interioribus ſenſim longioribus, praeter pollicem breuiorem. Palmae plantaeque exterius

terius ad digitum vſque pilis rigidis, deflexis, crebris ciliatae.

Cauda breuiſſima, teres, truncata, vix alto vellere clunium eminens. *Vellus* murinum, tenerum, molle, circa clunes et caput denſiſſimum, ſub armis et in ventre rariuſculum aeſtate, hyeme vero vbique largum. *Color* capiti, praeſertim circa roſtrum ſubater, mentum albet; reliquum corpus ſupra fuſco gryſeoque mixtum murinum, verſus latera, magisque ſubtus et in artubus caneſcens.

Varietatem coloris, eodem anni tempore, notaui; quidam magis gryſeo mixti et murini plane coloris ſunt, alii nigriores, imo dantur carbonis inſtar toti atri. Hanc coloris naturalis in nigrum tendentiam in animalibus ſubterraneis variis Natura prodit. In mure terreſtri BVFFONIVS obſeruauit, et ego Cricetos toto vellere, praeter album os et pedes, aterrimos ſimulque nitidiſſimos, in quibusdam auſtralioris Ruſſiae regionibus, v. gr. circa oppidum Simbirsk; copioſiores fere eſſe vulgaribus luteis, pallido maculatis, admiratus ſum. Cum his tamen miſcentur, vnoque ſaepe partu naſcuntur neque diſtinctam conſtituunt ſpeciem.

Longitudo integri animalis, quod deſcribo, 3 pollices et 9. lin. non excedit; capitis menſura 1″. 3‴. caudae 4‴.

Zootomica. Vti facie externa, ſic et interaneis mus talpinus, cum mure amphibio magnam affinitatem habet.

habet. *Corpus* macilentum, pinguedine parca ad armos et inguina collecta. Ceruix muſculoſiſſima, glandulisque collo circumpoſitis aucta. *Inguinales* glandulae, quae vniuerſo murino generi, huic geminae, altera minuta.

Omentum exile, pinguedine fere deſtitutum. *Ventriculus* cylindraceus, fundo maxime productus, antro pylori ad ipſum oeſophagum recuruato. *Inteſtinum* tenue, a pyloro ad coecum ampliuſculum, 11 pollices aequat *Coecum* maximum in ſpiram contortum, obtuſum; *Coli* initium oblique ſtriatum, in flexus ſigmoideos contortuplicatum, excrementitius denique canalis 3″. 8‴. et calami ſcriptorii amplitudine. *Hepar* multilobum et cyſtis omnino nulla bilaria. *Genitalia* exilia; autumno teſtes maribus vix lini ſemen aequantes, in ſinu annulorum abdominis latentes. In *ſceleto* cranium maximum, coſtae tantummodo duodenae.

III. ERINACEVS AVRITVS.

Eelegantiſſimam et minime notam Erinacei ſpeciem ad inferiorem Iaikum aliquoties inueneram a Falconibus ſemidilaniatam, et tandem viuam obtinui in nemoroſa ripa inter excubias Koſchacharof et Budarin, Septembris 5, 1769. In genere autem in auſtralioris deſerti fruticetis, a quinquageſimo circiter ſecundo gradu latitudinis, abundare dicitur, et in vulgaris Erinacei, qui rarior ibidem occur-

rit, locum ſuccedere videtur. Similitudo cum vulgari ſumma eſt, ita tamen diſtinguunt *Auriculae pregrandes* nouam noſtram ſpeciem, vt alio charactere vix opus ſit. Accedit quod ſemper paulo minor reperiatur, et puritate atque mollitie vrbana velleris inferiorem corporis faciem obueſtientis, ruſticum Erinacei vulgaris habitum antecellat.

Deſcriptio. Fig. 4. *Pondus* decem vnciarum non excedit haec ſpecies, omnibusque partibus, vt dixi, minor eſt Erinaceo vulgari. *Roſtrum* paulo productius et argutius, quam in illo, ſupra conuexum, ſubtus bicanaliculatum apice nudum. *Naſus* apice profunde didymus, niger; nares lunulatae, longitudinales, margine exteriore reflexo prominulo, crenulato.

Maxilla inferior multo breuior, triangularis. *Labia* nudiuſcula, carneola; rictus ad oculos vsque reſciſſus. *Dentes* primores maiores vtrinque duo, diſtantes, ſuperiores quidem magis, inferiores tamen non adeo vicini vt in Erinaceo vulgari. *Canini* infra continui vtrinque tres, medio maiore. *Supra* maior cum minuto vtrinque, et remoti ab inciſoribus et molaribus. *Molares* inferne vtrinque 4, quorum primus et poſtremus *bifidi*, reliqui *multicuſpides*; *ſupra* tres maiores, et ſeriem vtrinque claudentes minores duo, praeter acceſſorium anterius conicum, caninis maiorem et ſimilem.

Myſtaces quatuor ordinum longitudinalium fuſci pili inferiorum ordinum poſtici vltra aures producti.

ducti. In labio inferiore vtrinque pili tres, longiores, albidi, ſerie diſpoſiti. *Verruca* gulae bipilis, ſupraciliaris bipilis, et pone oris angulos vniſeta.

Oculi paulo maiores, quam Erinacei vulgaris. *Palpebrarum* ambitus, nudiuſculus, fuſcus; margines extus nigri. Irides fuſco luteſcentes. *Periophtalmium* ad medias fere corneas extenſile.

Auriculae maximae, patentiſſimae, ouales, flaccidae nudiuſculae, ambitu fuſcae, interius pilis albidis teneris pubeſcentes. Margo auricularum interior ſubreflexus; *Atrium* auditorium extus pilis obuallatum, ſuperius terminatum *lamella* auriculae interius transuerſa, medio productiore rotundata.

Artus paulo longiores et graciliores, quam in Erinaceo vulgari, extremo nudiuſculi, ſubsquamati atque fuſci. *Pedes* omnes pentadactyli; volae pulpoſae ad digitos, ipſisque digitis tumidulae.

Cauda breuior, quam Erinacei vulgaris, fuſca nudiuſcula murinae inſtar ſubannulata, baſi craſſiuſcula, apicem in acutum adtenuata.

Teſtudo ſpiniſera conuexa, ouata, in verticem vsque productae *ſpinae* teretes, baſi tenui recuruatae ceteroquin rectae, fuſcae annulo ad apicem et verſus baſin albicante; vnde color fere qualis in Erinaceo vulgari. *Caput* pilis rigidioribus, gryſeo-ſordidis, in roſtro et circa oculos ſubfuſcis. Subtus vero

corpus

corpus totum cum artubus, et aliquousque ſupra caudam, *vellere* albo, molli veſtitum.

Longitudine animal totum aequat 6. poll. et fere 9 vncias menſurae pariſinae; caput cum roſtro 1″. 11½‴. aequat, auriculae longitudine 1″. 4‴. latitudine 1″. 1‴. cauda non plus, quam 7‴.

Zootomica. *Omentum* ad hypogaſtrium deſcendit; *lobulus* pinguedinoſus cardiacus diſtinctus, didymus, epigaſtrium obtegit. *Ventriculus* fere globoſus, ſupra bicornis oeſophago in medium inſerto, et duodeno dexteriore. *Inteſtinum* a pyloro ad anum ſub aequabile, laxum, longitudine 2. ped. 10. pollicum. *Hepar* mediocre, tripartito - ſubſeptem - lobatum *Cyſtis* inſignis, ouata in ſinu loborum ſemirecondita. *Renes* ſitu ſuboppoſiti, dexter tamen paulo altior ad ſpinam. *Clitoris* feminae fungiformis intra aperturam vaginae prominula, plicaque lunata cucullata *Pulmones* maguſculi ſecundum amplitudinem inſignem thoracis; ſiniſter indiuiſus, dexter maior trilobus. *Coſtae* in ſceleto 14. caudae articuli circiter 12.

Corpus pinguiſſimum. Totius animalculi dorſalis pinguedo quintam partem totius ponderis exaequabat. (Vnc. 1. drachm. 6.). Praeterea notabilis eſt, in noſtro pariter et vulgari Erinaceo, apparatus ſingularis *glandularum*, quas *nutritorias* forſan appellare poſſis. Omnia ſcilicet animalia, quae hyeme torpent, vti Marmotae, Citillus, veſpertiliones,

tiliones, Glis, Erinacei; ſub armis et ad collum latiſſima habent glanduloſa corpora, acinoſa, facie et ſubſtantia Thymo eorundem animalium ſimillima et a pinguedine diſtinctiſſima. Solent duo ſub gula, duo alia paulo inferius ad collum, prope ſternum duae item pectoralibus muſculis vtrinque ſubſtratae, et ad axillas dorſumque extenſae, imo ſaepe adhuc aliae vtrinque inter ſcapulam et ceruicem adeſſe. Cum aliis animalibus, hyeme pariter atque aeſtate vigentibus et cibum capientibus hae glandulae deſint, vero ſimillimum eſt, illas ad nutriendum, et ſuſtinendum, durante ſopore hyberno, corpus et ſubigendos forte ſuccos deſtinatas eſſe. Imo forte vſus Thymi in foetubus inde facilius explicabitur. Aderant in noſtro Erinaceo omnes iſtae glandulae et ſimul ſumtae pondus circiter 89 granorum explebant. Hyeme ergo *Erinaceus Auritus* pariter ac *vulgaris* ſopitur, admiranda naturae lege; quam aeſtate quoque in minoribus animalibus, Citillo, Glire, Erinaceo, Veſpertilionibus, artificiali frigore in cellis glacialibus, imitari didici. Animalcula enim iſta viuidiſſima, ſi per noctem in eiusmodi cellam incluſa reliqueris, ſequente die iam torpent, et luce tertia plane ſtupent, ita vt ſenſu, etiam ad vulnera, fere careant. Obſeruaui tunc calorem ſanguinis in Erinaceis praeſertim vsque ad 145°. ſcalae *De l' Islianae* deſcendiſſe, dum aëris externi temperies erat ad minimum 125°. Imo aeſtate etiam naturali in ſtatu vix 28 gradibus atmoſphaera

 calidio-

calidiores eſſe ſolent Glis et Erinaceus, omnesque illius mutationes calore ſuo ſequuntur. Fateri tamen debeo, in marmotis cicuratis praedictum experimentum inutiliter me tentaſſe. Imo praeterita hyeme (1768.) rigidiſſimo gelu expoſita marmota, per duos et quod excurrit menſes, neque cibo abſtinuit, neque torpida eſt facta, et calorem ſanguinis ſeruauit paulo ſupra 93°. ſed ferae marmotae, quas captas habui; ad leuiſſimum frigus torpidulae et ſomnolentae fieri ſolent; et Citillus, marmotis maxime conſanguineus, qui aeſtate ſupra 92°. calere ſolet, ſi tantum aqua frigida perfundatur, fit ſtupidiſſimus, et vsque ad 115°. vel 110°. frigeſcit inque glaciali cella depoſitus certiſſime obdormeſcit.

Praeterea hoc in Erinaceo noſtro, aeque ac in vulgari, obſeruabile eſt, quod cum praecipuus eorum, praeter cadauera victus conſiſtat in inſectis e Gryllorum et Coleopterorum genere, a natura, cautum ſit, vt ea quoque inſecta, quae ſale acerrimo, veſicatorio et paene cauſtico ſcateant, ab his animalculis, ſine noxa, copioſe ingurgitari poſſint, imo gratiſſimam ipſis eſcam praebeant. Vidi enim (et quilibet experiri poteſt in ſpecie vulgari) cantharides, quibus medici vtuntur (*Meloidesue ſicatorias*) vltra centum imo paſtu ingerentes nec quidpiam inde mali paſſos Erinaceos, quum tamen canes et feles horrendis tormentis afficere, imo interfi-

terficere multo minori numero haec inſecta ſoleant. Vnde nouum eluceſcit Naturae omnia proſpicientis et ad fines inſtruentis mirifice varios argumentum.

IV. ANAS RVTILA.

Pulchritudine coloris et elegantia formae in ſuo genere illuſtriſſima auis, quam *Anatem rutilam* dixi, apud auctores non occurrit (*), in auſtralioribus tamen vniuerſae Ruſſiae atque Sibiriae copioſa eſt. Dicitur ad Tanaim occurrere et peculiari nomine illic appellari; Volgam inferiorem copioſe inhabitat, ibique, vt et ad Iaikum Ruſſicis nominibus *Krasnaia Vtka* (Anas rubra) et *Karagatka* omnibus nota eſt. In Sibiria vero *Turpan* vel *Norowoi Gus* et Tataris quibusdam *Aath* vocitatur, finitimasque auſtro regiones ibi quoque ſeruat, vix vnquam in latitudine borealiori quam 55 graduum obſeruata et quo propius auſtro deſcendas, eo copioſior. Eſt enim earum e numero auium, quae hyemem in calidis Perſiae et Indiae regionibus tranſigunt, et vere ad nos commigrant prolis ſub temperatiore coelo generandae cauſa. Pro nido tunc quaerit vel praeruptarum rupium Volgenſem paſſim ripam exaſperantium cauernas et fiſſuras, vel antra, in colliculoſis deſertis a marmotis olim effoſa, imo ipſa Tab. XXII. Fig. 1.

 quo-

(*) Poſſet confundi cum anſere aegyptiaca *Briſſonii*, quem adeo citare volui, *Osnithol. Edit. Belg. Vol. II. pag.* 87-9.

quoque more *Tadornae* ſubinde cuniculum ſibi fodere dicitur. Viſa etiam eſt in cauo arboris trunco nidum propriis plumis ſtrauiſſe. Monogama, vt congeneres omnes, viuit et aquas propter victum alternatim frequentant mas et femina. Oua ponit nouena circiter, alba, anatinis maiora, polita; Pullosque excluſos roſtro ex ala ſublatos ad aquas rapere fertur. Ad Volgam a curioſis conquiri ſolent oua, et domeſticae anati excludenda ſubponi vnde domeſtica facta proles in vrbibus paſſim occurrit, nunquam tamen mole et pulchritudine ſpontaneae par, nunquam feritatem deponens, et plerumque quando adulta eſt, niſi diligenter alas reſeces, libertati ſeſe reddens. Neque ſi captim retineatur ſpeciem multiplcat, ſed oua in abditiſſimos quosuis angulos abiicit et ſpargit.

Volatus propter alarum magnitudinem leuis et ſine ſtrepitu. Inceſſus elegans et expeditus. Maxime ſingularis autem eſt vox huius auis, quem excitata inter volandum continuo iterat, cornuum muſicorum (*Clarinettes*), fere aemulum. Alia vox in cicuratis maſculis veſperi et mane exaudiri ſolet, pauoninae ſubſimilis. Alio tempore rariorem edunt, quaſi galli breuiter cucurientis ſonum. In genere minus timida eſt auis, neque hominem conſpectum ſtatim reformidat. Occiſo mare, vidi feminam diu circa venatorem, continuo clamore obvolitantem, nec niſi tertia ſclopi exploſione regione

in qua nidus erat, plane depulſam. Inter ſapidiſſimas ceteroquin ex anatino genere menſarum delicias laudanda eſt, nec minimum piſculenta, quamvis piſciculis ſaepius paſcatur.

Magnitudo ſpontaneae auis ſupra domeſticam anatem, et moſchatae fere par; maior autem videtur ob proceritatem pedum et alarum magnitudinem. *Roſtrum* anguſtius, ſemicylindricum nigrum, maxillis laxe coeuntibus. *Irides* oculorum e fuſco vix luteſcentes. *Periophtalmii* et palpebrarum margines nigricantes. *Deſcriptio.* Tab. XXII. Fig. 1.

Caput cum initio ceruicis albet, fronte et genis gulaque vix luteſcentibus. Collum inferius ferrugineſcit et in *maribus torque* cingitur inſigni atra, ad ceruicem paululum deſcendente, interdum ſubreticulata, quae deeſt feminis. Iugulum et criſſum intenſiſſime rufa, venter obſcurus, pectus atque latera dilutius rutila; dorſum inter ſcapulas et alae ſpuriae adhuc dilutiora. Poſtica dorſi cano fuſcoque obſoletiſſime vndulata; vropygium vero atrum et cum cauda leuiter rotundata, quatuordecim rectricibus compoſita, ſplendore virideſcente nitidum.

Alarum remiges primariae atrae, ſecundariae (11. 22.) exterius viridi ſericeae, violaceo variantes, interius extremitate nigrae; verſus baſin aliquae albae, ſubpulueratae. *Intimae* (23-27.) extus

 ferru-

ferrugineae, ſenſim dilutiores, interius canae; ſed 23 fuſca. Tectrices ſecundariae, cum tota baſi alarum albae; ſolae incumbentes apice luteſcunt. *Subtus* tectrices primariae, albae, apice nigro, ſecundariae albae; ſed aliquot intimae, elongatae fuſcae. *Pedes* longiuſculi nigri.

Longitudo extenſae auis a roſtro ad vropygium eſt vnius pedis, quinque pollicum cum dimidio; caudae 4″. 9‴. Expanſae alae tres cum dimidio pedes excedunt, et compoſitarum, caudam exaequantium, vlna 1′. 1″. 4‴. explet.

Labyrinthus tracheae in maſculo vix piſo maior. *Inteſtinum* decem e dale, *coecis* inſtructum ſemipedalibus; reliqua haud inſolita.

V. STERNA CASPIA.

Tab. XXII. Fig. 2. Iure Caſpiam Sternam appellari puto, quam nullibi praeterquam verſus ipſum mare caſpium et circa oſtium Iaïci obſeruaui, vbi apud Ruſſos incolas nomen *Tſchagraua*, (чаграва) obtinuit. Piſcatur et in mari et in fluuio, lari atricillae fere more, in aëre ſuſpenſa et teli inſtar ſubinde deuolans, vel et hirundineo volatu vndas ſtringens. Laris immixta, ripis et inſulis copioſe inſidet, et inter alias aquatiles aues in nudo deſertarum inſularum ſolo *oua* ponit maiuſcula, fuſco maculata. Ceterum *moribus*, ſtoliditate, facie et colorum compoſitio-

poſitione cum plerisque ſternis noſtratibus conuenit, ſed magnitudo ea eſt, vt etiam neglectis reliquis characteribus ad diſtinguendam ſpeciem ſufficiat.

Mole larum atricillam excedit; pedibus fere, vt ille, procerioribus ingreditur. *Roſtri* forma ſternas exprimit, ſed magnitudine vincit; compreſſum illud eſt, conuexum, carina tamen ſubangulatum, integerrimum et ſaturate rubrum *Nares* a baſi roſtri remotae, oblongae, totae peruiae et nudae, quamuis a fronte plumae roſtri baſin aliquousque obueſtiant. *Oculorum* irides obſcurae. *Deſcriptio.* Tab.XXII. Fig. 2.

Caput ſupra totum vltra lora et oculos et vsque in ceruicem nigrum, attamen plumarum apicibus albicantibus, maxime in iuniori aue adſperſum; in biennibus magis nigret vertex et apicibus rarioribus caneſcentibus ſpargitur. Tempora pone oculos in omnibus late nigra immaculata.

Auis *ſubtus* tota niuea eſt. *Dorſum* vero leucophaeum, colore magis exſoleto, quam in ſterna hirundine et laro atricilla, et in adultis quidem immaculatum. *Anniculis* vero, qualem *icon* noſtra exhibet, contermina ceruicis pars, liturio fuſcis adſperſa, alae ſpuriae vero *notis* ſagittatis, nigricantibus diſtinguuntur.

Alae longiſſimae anguſtae, caudam longe excedunt. Remex prima, minutiſſima, fuſca, apice alba.

alba. Reliquae primariae 9 cum tectricibus fuſcae et niueo quaſi rore candicantes, a longiſſima ſecunda cito decreſcentes. Secundariae 15 breues, adhuc magis caneſcentes, et albo terminatae.

Cauda breuiuſcula, profunde forcipata; *rectrices* fuſceſcenti canae, interiore latere albae; mediae latiuſculae, extimae elongatae, anguſtae.

Pedes longiuſculi, ſubrubicundi, fuſci. Digitus interior breuior, breuiſſimus poſticus, vngues nigri. Longitudo auis a ſummo roſtro ad vropygium tredecim pollices, roſtrum ad angulos oris vsque tres fere pollices, cauda extimis pennis quinque circiter pollices, ſed alarum vlna quatuordecim, et quod excedit pollices aequare ſolet.

VI. MOTACILLA LEVCOMELA.

Tab.XXII. Fig. 3. *Motacillam leucomelam* montoſi praeruptique tractus propriam ſibi vindicant, qui Volgae inferioris dextram ripam maxime conſtituunt. Copioſam ſatis praeterito vere obſeruaui in rupeſtribus inter Samaram et Sysranum vrbes, neque poſtea vſpiam viſa fuit. Elegantiſſima auicula mas eſt, et feminae ita diſſimilis, vt niſi e cauda haec vix dignoſceretur. Circa ripas verſari et vermiculas legere ſolet; ad pagos etiam accedit, truncis arborum et ſaxis paſſim inſidens et hirundineo ferme garritu cantillans. Vti pleraeque motacillae, hominem proxime

xime admittit, et minime timida eſt, ſed excitata ſemel inquietior vagatur, conſidensque alas crebro, et ſubinde caudam motitat. Inter volandum vero pipitus idem, qui ab hirundine exauditur. *Nidulatur*, praeſertim in rupium praeruptarum cauernis, rimisque, et inter confragoſa ſaxa, rubetrae ad inſtar; verum circa pagos quoque imo eccleſiarum ſub tecto nidum inſtruxiſſe obſeruata eſt.

Magnitudine conuenit cum motacilla flaua. *Deſcriptio.* Tab. XXII. Fig. 3. *Roſtrum* nigrum, baſi latiuſculum, apice vtrinque ſubemarginatum. *Faux* luteſcens. *Vibriſſae* ſinus oris biſetae. *Nares* denudatae, ouali oblongae, patulae, exiguo lumine peruiae. *Lingua* membranacea, fuſca anguſta, extremitate lineari bifida. *Palpebrae* nigrae. *Periophtalmium* albeſcens. *Irides* obſcurae.

Vertex albidus, plumarum extremis plus minus fuliginoſo inquinatis; ceruix candidior. Reliquum caput et collum ſubtus vltra medium aterrima, in genis tamen et gula limbis plumarum albicantibus. *Subtus* a iugulo auicula tota, itemque poſtica dorſi, candore intemerato niuent. Inter alas dorſum et baſes alarum atra, plumarum limbis gryſeo-albicantibus.

Remiges 19. tectricesque, fuſco-nigricantes, exteriore margine obſoletae, interiore verſus baſin

albicante. Subtus brachia alba, antico margine fuſco - ſubſquamata.

Cauda longiuſcula, aequalis, rectrices duae mediae fuſco - nigricantes, tecta baſi albae, laterales omnes niueae, extremo abrupto atrae, et nigredine exterius altius adſcendente, praeſertim in extima.

Pedes longiuſculi, tibiae tantum inferius aliquot loricis annulatae, caeterum laeues, vt in motacillis eſſe ſolent. Auricula in longitudinem a ſummo roſtro ad vropygium menſurata 5 poll. et 10 linearum deprehenſa eſt. Cauda 2″. 4‴. Expanſae alae 9″. 11‴. Alarum compoſitarum vlna dimidiam caudam vix aequans 3″. 5‴. *Pondus* auiculae, plusquam ſemunciale eſſe ſolet.

Femina colore diuerſiſſima eſt a mare. Supra nempe tota furua, ſeu fuſco - cinerea, capite et ceruice paulo dilutioribus; ſubtus cineraſcens, iugulo colloque ex gryſeo cinereis. Ductus ſupraocularis a roſtro albicans. Cauda ſola vt in maſculis. *Anatome* nihil notatu digni habet: contenta ventriculi Coleoptera varia minuta et maiorum fragmenta eſſe ſolent.

VII.

VII. LOXIA ERYTHRINA.

In ſiluis et arbuſtis denſiſſimis habitat loxiae ſpecies, quam ego primum ad Volgam, MESSERSCHMIDIVS olim in Sibiria circa Tomum fluuium paſſim obſeruauit, et ſub *Paſſeris Erythraei* nomine in *Ornithologico* manuſcripto recenſuit. Ad Volgam et Samaram vulgatiſſima eſt, et ſub nomine Paſſeris rubri (*Krasnoi Verobei*) vel lenticulariae (*Tſchetſchewiza*) notiſſima. Mas incondito et breui carmine cantillat, et ſtultitia compar eſt Emperizis. Femina pulcritudinis maſculae expers nidum inter arborum ramos foenilem ſtruit. Hyeme cum Emberizis niualibus circumuolare viſa eſt haec auis, verum rarior tunc occurrit. In genere autem ſeminibus plantarum paſcitur, vti Fringillae. Tab. XXIII Fig. 1.

Magnitudo Chloridis, ſed caput minus grande. *Roſtrum* fuſco-corneolum, trochiforme-conoideum, breue, craſſum, maxilla ſuperiore ſubarcuata, inferiore ventricoſa. *Nares* depreſſae baſilares, ſetulis nigris, baſi gryſeis, a fronte procumbentibus tectae. Pili aliquot teneri ſupra oris angulos. *Deſcriptio.* Tab. XXIII Fig. 1.

Maribus lora gryſeo-cineraſcunt, ſed *caput* reliquum, cum *collo* et *iugulo*, extremis plumarum detectis intenſiſſime cinnabarinis, tota rubent; baſis autem plumarum in capite fuſca, in collo ſubtus albida. *Ceruix* et *dorſum* cinerea, rubore obſoletio-

 re

re obducta, veſtitrices alarum cum tectricibus remigibusque ſecundariis fuſcae, margine exteriore ex albido rubeſcente ſeu carneo. *Remiges* 18 primariae cum tectricibus fuſcae, margine luteſcentes. *Vropygium* intenſius cinnabarinum. *Tegetes* caudae cinereae, extremitate ruſſulae. *Subtus* auis alba, pectus et latera leui rubore perfuſa. *Cauda* ſubforcipata, rectricibus ſubacutis fuſcis, rhachi et margine luteſcentibus. *Pedes* corneo-fuſcidi.

Femina ſupra tota cinereo flaueſcit, vertice ſubliturato vropygio et pennarum alae marginibus flaueſcentibus; latera capitis albidiora. *Gula* alba; per collum liturae exiguae ſparſae obſolete fuſcae, verſus iugulum euanidae. *Rectrices* obſoletius fuſcae, margine gryſeae. Solo roſtro et habitu corporis ad marem referenda, colore maxime diſſimilis.

Pondus auis vix drachmas quinque excedere ſolet. *Longitudo* a roſtro ad vropygium aequat 3 poll. 9 lin. Cauda 1″. 2‴. Alae expanſae 8″. 9‴. Vlnae alarum 2″. 11‴. In femina alae paulo maiores eſſe ſolent.

VIII. PARVS CYANVS.

Tab. XXIII Fig. 2. Praeter Paros Europaeos notos omnes, qui per Ruſſiae atque Sibiriae ſyluas etiam ſeptentrionales

les (*) abundant, elegantiſſima inde a Volgenſibus regionibus datur auicula, cuius patria, qua latiſſime ad orientem patet Sibiria extenditur, vbi ab accuratisſimo quondam MESSERSCHMIDIO paſſim obſeruata, et pro *Paro caeruleo* (quem forte non viderat, quia rarior reliquis omnibus in hiſce terris apparet), deſcripta fuit. Non ſolum tamen a *Paro caeruleo* vulgari toto coelo differt, ſed et pro noua et incognita inter Zoologos ſpecie habenda eſt; licet veroſimile videatur eandem eſſe, cuius *Aldrouandus* ſub nomine *Pari indici* breuiter mentionem fecit, et de qua dubitat *Raius* annon ex icone ſola apud *Aldrovandum* nata (†) fuerit. Etiam in *Fauna* LINNAEI *Suecica* proſtat quidem icon, quae *Parum Cyanum* apprime refert; adeo tamen imperfecta et incerta mentio huius auiculae ibidem facta eſt, vt inde pro confirmata et agnita ſpecie nemo adſumere illam velit, et ipſe quoque *Illuſtris* LINNAEVS non adſumſerit. Potuit noſtra tamen e boreali Aſia in Sueciam vsque transuolaſſe, et forſitan in Americam borealem vsque reperietur, quemadmodum *Emberiza niualis*, *Loxia enucleator*, *Picus tridactylus*,

(*) Solis ſcilicet exceptis, *Paro Pendulino* et *Biarmico*, qui tantum in auſtralibus Iaici et Volgae, inter riparum ſaliceta et arundines verſantur.

(†) *Rai. ſyn. av. p. 74. n. 7.*

et *viridis minor* (*), *Tetrao Lagopus* atque *Bonaſia*, aliaeque terreſtres aues vniuerſo orbi arctico communes ſunt.

Plumae in toto corpore Pari cyani laxae, molliſſimae et texturae rarae, prout in coruo glandario atque mimo obſeruantur. Sedens auicula ſaepe tota, praeter caudem quaſi glomus horrentium plumarum eſſe videtur, praeſertim cum dormitat, capite ſub alis condito. Semper etiam plumas molliter tumefacit et capitis plumas ſubinde arrigit in formam criſtae, minus tamen inſigniter, quam Parus coeruleus ſolet.

Deſcriptio. Tab. XXIII Fig. 2.

Pondere et magnitudine eundem parum coeruleum ſuperat paulo; plerumque drachmis tribus ponderoſior. *Roſtrum* breuius et craſſius quam in Paris omnibus etiam paro caudato, cui tamen craſſum prae ceteris roſtellum. Accedit forma roſtri ad tanagras fere, quamuis non graniuora auicula. *Lingua* cartilaginea, plana, extrorſum vix anguſtata, biloba, lobo ſingulo 3 vel 5 ſetis ciliato. Caput circa *baſin roſtri* plumoſiſſimum, fere vt in ſtrygibus; quod cum paro caudato commune noſter habet. *Oculi* e fuſco-obſcuri.

Vertex

(*) *Briſſon. ornithol. ed. citat. Vol. II. p. 46. n. 4.* Picus viridis Noruegicus, diſtinctiſſima certe ſpecies et nomine *Pici Septentrionalis* inſignienda.

Vertex e caneſcente niueus et ceruix alba; *lora* anguſta, nigra, vltra oculos continuata in taeniolam coeruleo nigricantem; vtrinque deſcendentem vſque ad *faſciam* ceruicis latam, tranſuerſam nigro-coeruleam quae in medio non, vti paro caeruleo, verſus nucham angulo adſcendit, ſed ibi anguſtior eſt, neque ad gulam coit.

Dorſum pallide coeruleſcens, non vireſcens vti paro caeruleo; vropygium e cano albidum. Auicula *ſubtus* tota niue candidior, neque in toto corpore flauedinis veſtigium vllum. In ſterno *macula* fuſco nigricans, longitudinalis.

Tectrices caudae obſcurius coeruleae, apice albae. *Cauda* longiuſcula, minus tamen quam in paro caudato, et rotundata. *Rectrices* mediae nigro coeruleae apice exterius albae, vt tandem extimae vix baſi interius nigreſcant..

Alae elegantiſſimae. Humeri e fuſco cyanei. *Tectrices* et alula nigricant, extus cyaneo perfuſa, extremitate alba. *Remiges* 18. primariae fuſcae, interiore margine albae, extus cyaneo perfuſae, ſed verſus extremitatem candidae, externae ſenſim vlterius. *Secundariae* apice albae.

Pedes

Pedes e nigro coeruleſcunt obſoletius; genua cinero annulato. *Longitudo* auiculae, ab apice roſtri ad vropygium, ſolet eſſe 2″. 4‴. *Corpus* deplumatum vix, extremum pollicem aequat, minime pingue. *Cyſtis* in hepate non conſpicua; *Coeca* nulla. Inueni in ventriculo et inteſtinis plurimorum *vermiculos* minutos, integerrimos qui intra auiculam vixiſſe videbantur. *Pediculo* praeterea infeſtatur minutiſſimo, vix arenulae magnitudine, quem tamen rigidiſſimo frigore in mortua quoque auicula vixiſſe vidi.

NOVAE INSECTORVM SPECIES.

Auctore

E. LAXMANN.

Inſecta Ruſſica, Academici Illuſtr. illa ſunt, quae in actis noſtris adhuc intacta inuenimus. Rerum naturalium ſcrutatores exteri, qui egregiis laboribus noſtrorum phyſicorum multum debent, nihil tam auide deſiderant quam etiam aliquid de Inſectis noſtrarum regionum legere. Ita hac de re Illuſtr. a *Linne* in litteris ad me datis: "Inſecta ex omnibus fere orbis terrarum partibus accepi et nuperrime etiam magnam collectionem illorum quae Caput bonae ſpei alit, de Ruſſicis autem et Sibiricis Inſectis Entomologis nihil conſtat. Maximopere vellam vt nonnulla eorum mitteres!" Vt itaque deſiderio magni Viri aliorumque de Zoologia bene meritorum aliquo modo ſatisfacerem, Inſecta haec Ruſſica rariora cum naturae curioſis communicare volui. Primum illorum eſto:

SCARABAEVS *bimaculatus* ſcutellatus, muticus, nitidus, elytris rubris, maculis duabus nigris. T. XXIV. Fig. 1.

Habitat in Ruſſia auſtrali.

Longitudo 4 Latit. fere 2 lin. Lond.

E grege illorum eſt, quibus in fimo et cloacis apta domicilia parauit natura.

Deſcriptio. Facies ſcarabaei fimetarii ſed fere duplo maior. Caput nigrum, ſcutellatum, ſubrotundum, glaberrimum. Antennae et palpi rufi. Thorax niger nitidus, marginatus, lateribus cinnabarinis. Elytra cinnabarina glaberrima; macula magna nigra, rotunda, verſus apicem. Abdomen medio nigrum, latera vero et pedes brunnea.

T. XXIV. Fig. 2. 2. LVCANVS *apterus* ater, thorace ſcutellato elytris connatis, gibbis, antennis clauatis, claua ſolidiuſcula.

Habitat in Ruſſiae auſtralis apricis ſub terra.

Longitudo maris pollicaris, latit. lin. 5. foemina paulo minor.

Deſcriptio. Animalculum hoc ſingulare, medium inter Scarabaeos et Lucanos genus conſtituens, ad hos, ob maxillas furcatas, dentatas, magnas maris, tuli. Caput antice trilobum. Oculi in lobis lateralibus parui. Labium apice medii lobi profunde emarginatum maxillaeforme. Maxillae e ſinubus loborum lunatae, dentatae, denticulis cum ipſo apice vndecim, in mare furcatae, furca e medio inferioris lateris incurua, glaberrima, maxilla duplo longiore. In foemina maxillae tantum dentatae. Antennae clauatae, articulis nouem, primo longiſſimo duabus ſpinis terminato, intermediis ſeptem ouatis, aequalibus, extremo, qui clauam conſtituit, craſſiſſimo, truncato, ſolido, vngulam equi-

nam

nam referente. Palpi ſex, quorum par exterius tribus, et medium duobus articulis, interius autem vno tantum articulo, cuius interius latus ſpinis armatum validis. Thorax laeuis, lateribus marginatis punctisque minutis vt ſcutellum excauatis. Elytra connata gibba. Pedum ſemora glabra, tibiae ſpinoſae, plantae duobus vnguibus terminatae.

3. ATTELABVS *dauricus* vertice, elytris medioque abdominis atrocoeruleis; thorace, pedibus lateribusque abdominis luteis.

Habitat in Sibiria transbaicalenſi. Ad ſelengam in Vlmo pumila legi. T. XXIV. Fig. 3.

Longitudo 3. Latit. $1\frac{1}{2}$ lin.

Deſcriptio. Facies Attelabi coryli. Caput ſupra nigrum, infra luteum. Os et palpi lutei. Antennae brunneae, clauatae. Thorax luteus. Scutellum et elytra atrocoerulea, nitida punctis minutiſſimis excauata. Abdomen medio atrocoeruleum lateribus luteis. Pedes lutei.

4. ATTELABVS *ircutenſis* totus atrocoeruleus villoſus, elytris faſciis duabus coccineis. Fig. 4.

Habitat ad Baicalem in Polygono Flor. Sib. Tom. 3. pag. 56. Tab. X.

Long. $3\frac{1}{2}$ Latit. 1 lin.

Deſcriptio. Facies Attelabi apiarii ſed paulo minor. Totus atrocoeruleus, hirſutie veſtitus.

Antennae clauatae vt in congeneribus. Elytra faſciis duabus, in medio et verſus apicem, coccineis. Pedes ob hirſutiem griſei.

T. XXIV. Fig. 5. 5. CERAMBYX *equeſtis* thorace ſpinoſo ater apterus, elytris connatis, margine, cruce in ſutura dorſali et duabus lineis ad baſin longitudinalibus, albis.

Habitat in apricis Ruſſiae auſtralis.

Longitudo fere pollicaris, latit. fere 4 lin.

Deſcriptio. Antennae mediocres, craſſae, fuſcae. Corpus quaſi holoſericum atrum. Thorax ſpinoſus, marginibus vbi cum capite et trunco nectitur albicantibus. Elytra connata, abdomine paulo breuiora, cruce in ſutura dorſali, margine et lineis duabus ad baſin longitudinalibus punctalis, albis. Alae nullae. Pedes validi, brunnei.

T. XXIV. Fig. 6. 6. LEPTVRA *vcranica* nigra, antennis pedibusque rufis, thorace faſcia et duabus maculis, elytris tribus et totidem faſciis flauis.

Habitat in Ruſſiae auſtralis vmbellatis.

Longitudo 7. latit. 2 lin.

Deſcriptio. Caput vbi cum thorace nectitur faſcia flaua, quae vsque ad ateriorem angulum oculorum extenditur. Frons ſiue regio inter antennas et labium flaua. Antennae rufae, corpore paulo breuio-

breuiores. Thorax ſubrotundus, faſcia flaua verſus caput et maculis duabus oblongis transuerſaliter ſitis verſus elytra. Scutellum flauum. Elytra punctis ad baſin duobus oblongis vnoque communi verſus medium, tribus faſciis curuatis transuerſalibus et lineis dubus ad angulum exteriorem baſeos longitudinalibus flauis. Pedes rufi exceptis quatuor femoribus anterioribus nigris.

7. LEPTVRA *altajenſis* atra, elytris coccineis medio atris. T. XXIV. Fig. 7.

Habitat in vmbroſis ad radices alpium altajenſium in vmbellatis.

Longitudo 6. latit. 2 lin.

Deſcriptio. Tota atra holoſerica. Antennae longitudine corporis. Thorax ſubrotundus. Elytra coccinea macula maxima in medio atra, ad apicem rotundata, lata.

8. GRYLLVS *dauricus* apterus, teſtaceus nigro luridoque nebuloſus, thorace ſcutellato, ſcuto quadrato, rugoſo, antice bituberculato poſtice ſpinis dentato; abdomine lineis quinque albicantibus, longitudinalibus obſoletis.

Habitat in campis apricis glareoſis Sibiriae transbaicalenſis.

Longitudo cum enſe $2\frac{1}{2}$ poll. latit. 6 lin.

Deſcriptio. Corpus teſtaceum nigro luridoque nebuloſum. Antennae ſetaceae longitudine fere corporis. Thorax ſutellatus, ſcutum planum, rugoſum, fouea transuerſali in duas partes diuiſum, quarum anterior ſingulo latere tuberculo ſpinoſo terminatur; poſterior pars quadrata, rugoſa, medio excauata, lineis lateralibus eleuatis inſtar duarum carinarum tuberculis ſpinoſis; angulis vero vti et antico et poſtico latere rotundatis. Alae nullae. Abdomen lineis quinque longitudinalibus obſoletis. Femina cauda enſifera. Quoad pedes cum Gryllo pupo aethiopico conuenit. Mordaciſſimus in propriam ſpeciem ſaeuit.

NB. Gryllus noſter *dauricus* Chinenſibus eſculentus et in deliciis eſt. Ruſſis autem transbaicalenſibus abominabilis; morbo enim in Ruſſia noto Woloſetz (волосецъ) infici credunt, ſi contigerit edere aut bibere e vaſe, in quod haec beſtiola caſu cecidit.

Tab. XXV. Fig. 8. 9. GRYLLVS *Sibiricus* locuſta thorace ſubcarinato, antennis clauatis, tibiis anticis ouato clauatis craſſis.

Habitat Barnauliae in campis paſſim, Ircutiae autem et in Sibiria transbaicalenſi copioſiſſime.

Longitudo 8. ſ. 9. latit. $1\frac{1}{2}$ lin.

Deſcriptio. Corpus griſeum nigro nebuloſum. Antennae thorace duplo longiores, clauatae, gri-

ſeae

ſeae articulis quatuordecim, claua nigra ouata articulis quinque. Thorax viridiuſculus ſtria longitudinali eleuata recta carinam conſtituente et duabus lateralibus obliquis, arcubus carinae approximatis. Alae ſuperiores griſeae nigro nebuloſae, inferiores plicatae hyalinae. Pedes griſeae, tribus vnguibus, medio craſſiori obtuſiuſculo; tibiae anticae clauatae craſſae, femora poſtica ſupra griſea nigro maculata ſubtus flaua.

NB. Illuſtr. a *Linne* huius mentionem fecit ſyſt. nat. ed. XII^{ma} Tom. I. pag. 701. n. 51.

10. MYRMELEON. *Kolywanenſe* antennis clauatis longitudine corporis; oculis oblongis, magnis, linea obliqua, piloſiſſima, in duas partes aequales diuiſis; thorace nigro, punctis et lineolis plurimis flauis; alis flauo, nigro et hyalino variis. Tab. XXV. Fig. 9.

Habitat in Alpibus Maloi Altai, Sinie Sopka et ad argentifodinam Tſchagirenſem rarius, victitans muſcis et culicibus.

Longitudo pollicaris et minor, latit. $1\frac{1}{2}$ lin.

Deſcriptio. Caput piloſiſſimum, pilis in oculis et in fronte ſiue interſtitio oculorum nigris, in flauo autem occipite et tractu inter os et oculos, albis. Oculi magni hemiſphaerici, in quatuor partes lineis eleuatis, piloſiſſimis diuiſi; *ſuperior* pars nigra, nitida, lunulata; *media*, ſeu ipſe oculus compoſitus, oblonga, rectangularis, linea obliqua, eleuata

eleuata piloſiſſima, cuius arcus thoracem verſus, in duas partes aequales diuiſa; *inferior* pars flaua, nitida, lunulata. Antennae nigrae clauatae longitudine corporis. Stemmata nulla. Os maxilloſum. Thorax niger, piloſus, punctis et lineolis plurimis flauis. Alae quatuor coloratae, reticulatae, infl xae, abdomine longiores; *ſuperiores* ad baſin nigrae, a baſi ad medium flauae, a medio ad apicem hyalinae, reticulatae, duabus maculis nigricantibus magnis; *inferiores* a baſi ad medium nigrae, medio faſcia latiſſima, et in nigro apice macula magna orbiculata, ocellum referente, flaua. Pedes breviuſculi, femora a baſi vsque ad medium nigra, a medio ad apicem flaua; tibiae flauae; tarſi, qui duobus vnguibus validiſſimis terminantur, nigri. Abdomen atrum ſimplex.

Tab. XXV. Fig. 10. 11. ICHNEVMON *Gigas* antennis rufis, ſcutello flauo, corpore ruſo brunneo et flauo vario, alis fuſcis.

Habitat Barnauliae et Kolywani in ſiluis rarius.

Maximus in ſuo genere: longitudo corporis cum aculeo $4\frac{1}{2}$ poll. corporis $1\frac{1}{2}$ poll. aculei 3 poll. antennarum 8 lin. latitudo thoracis $1\frac{1}{2}$ lin.

Deſcriptio. Caput flauum, oculis, ſtemmatibus, interſtitio oculorum et maxillis nigris. Antennae rufae, corpore paulo breuiores. Thorax rufus,

fus, antice, ad latera et radices alarum flauus, qui color a ruſo interiacentibus lineolis fuſcis discernitur. Scutellum flauum, linea longitudinali nigricante. Alae ſubfuſcae longitudine antennarum. Abdomen ſubpetiolatum ſegmentis ſeptem rufis; *primo* ad baſin tenuiſſimo verſus apicem dilatato faſcia flaua in apice; *ſecundo* macula magna flaua, lateribus fuſcis, quae in medio macula triloba rufa picta eſt; *tertio*, *quarto*, *quinto* et *ſexto* aequalibus, reliquis maioribus, maculis duabus, ocellatis, ouatis, flauis, nigredine inſtar iridis, cinctis; *vltima* rufo et fuſco vario. Aculeus penultimo ſegmento affixus, longiſſimus, niger, vagina fuſca. Pedes flaueſcentes.

12. CONOPS *petiolata* antennis clauatis nigris, claua rubra, capite flauo, abdomine petiolato. Illuſtr. a *Linne* ſyſt. nat. ed. XII. Tom. I. pag. 1005. n. 9. Tab. XXV. Fig. 12.

Habitat Barnauliae poſt ſolſtitium aeſtiuum in floribus, rarius.

Longitudo 4. latit. 1 lin.

Deſcriptio. Antennae baſi geniculatae. Roſtrum nigrum. Thorax niger, macula in angulis anticis tuberculata albo rufeſcente. Abdomen apice rotundatum nigricans marginibus ſegmentorum albicantibus, primo ſegmento tenuiſſimo, longiſſimo verſus apicem dilatato, faſcia in medio flaueſcente. Alae fuſcae, margine tenuiore apiceque hyalino pedes rufeſcentes. Halterum clauae flauae.

NB. Varietas maculis thoracis tuberculatis quas oculos primo intuitu putares, nigris.

13. ARANEA *ſingorienſis* teſtacea nigro nebuloſa, piloſa, abdomine faſciis quatuor trausuerſalibus albidis, geniculis et apicibus oſſium ſubtus nigris.

Habitat in Singoria ſub terra in modum Scarabaei ſtercorarii cauernas fodiens Ad Argendifodinam cui a ſerpentibus nomen paſſim occurrit, ad Irtim autem circa oſtium Vlbae fluuii et in vallo terreo arcis Vſtkamenogorsk copioſiſſime inueni.

Inter maximas ſui generis ſpecies numeranda. Longitudo thoracis cum abdomine $1\frac{1}{4}$ poll. Latit. thoracis 5 abdominis 6 lin. Longitudo pedum breviorum pollicaris, longiorum $1\frac{1}{2}$ poll.

Deſcriptio. Tota teſtacea nigro nebuloſa, piloſa. Oculi octo nitidi quorum duo verſus tergum, magnitudinis mediae, brunnei, duo in fronte magnitudine prima nigri, quatuor verſus os transuerſo ordine minores nigri. Thorax ouatus antico latere eleuatus, obtuſus. Palpi quatuor articulis, rufeſcentes, apicibus nigris. Retinacula valida vngue nigro nitido terminata. Pedes validi, craſſi, articulis ſex, *primo* ſubtusnigro; *ſecundo* ſiue femore griſeo; *tertio* ſiue geniculo nigro; *quarto* ſiue oſſe griſeo apice nigro; *quinto* ſiue pede duorum anteriorum parium toto, poſteriorum vero apice nigro; *ſexto* nigro mutico.

Supra

Supra omnes pedes griſei nigro maculati. Abdomen ouatum ſupra teſtaceum faſciis quatuor albicantibus, ſubtus nigrum holoſericum.

Obſeru. Nutricatio pullorum ſolis foeminis relicta. Oua ſubrotunda, griſea, ſeminibus Braſſicae ſatiuae paulo maiora circiter ducenta ponit, telaque in globulum, magnitudine maioris nucis Coryli auellanae inuoluit. Hunc globulum nocte in fundo cauernae ſeruat die autem imprimis ſereno et calido in oſtio aprico circumuertit. Pulli excluſi aliquot dies corpori matris inſident vnde haec duplo maior et horridula euadit; validiores facti diſperguntur imitando vitam et mores maiorum.

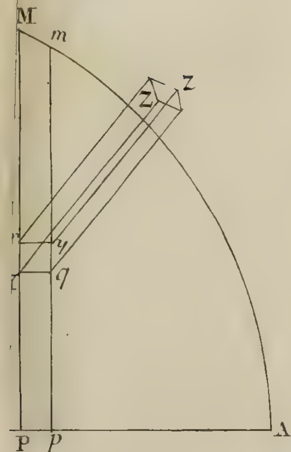
EXPLICATIO TABVLARVM.

Tab. XXIV. Fig. 1. *a.* Scarabaeus bimaculatus.
b. infera pars huius inſecti.
Fig. 2. *a.* Lucanus apterus mas.
b. - - - - - - foemina.
c. infera pars maris.
d. infera pars foeminae.
e. maxilla maris magnitudine aucta.
f. maxilla foeminae magnitudine aucta.
g. palpi maris.
h. palpi foeminae.

Tab. XXIV. Fig. 3. *a.* Attelabus dauricus.
b. infera pars huius inſecti.
Fig. 4. *a.* Attelabus ircutenſis.
b. infera pars huius inſecti.
Fig. 5. *a.* Cerambyx equeſtris.
b. infera pars huius inſecti.
Fig. 6. *a.* Leptura vcranica.
b. infera pars huius inſecti.
Fig. 7. *a.* Leptura altaienſis.
b. infera pars huius inſecti.

Tab. XXV. Fig. 8. *a.* Gryllus Sibiricus.
b. pes anticus clauatus huius grylli per Microſcopium delineatus.
Fig. 9. *a.* Myrmellon Kolywanenſe.
b. idem animalculum alis expanſis.
Fig. 10. Ichneumon gigas naturali magnitudine paululum minor.
Fig. 11. Conops petiolata.
Fig. 12. *a.* Aranea ſingorienſis magnitudine naturali paululum minor.
b. infera pars huius inſecti.

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY



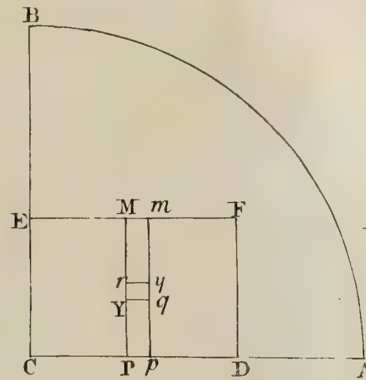


Fig. 2.

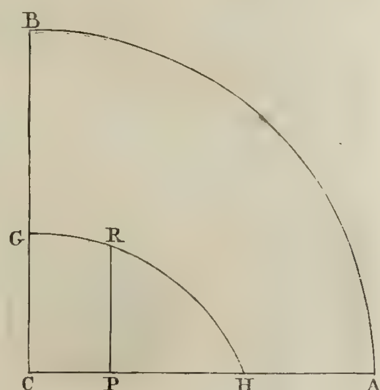


Fig. 4.



Fig. 5.

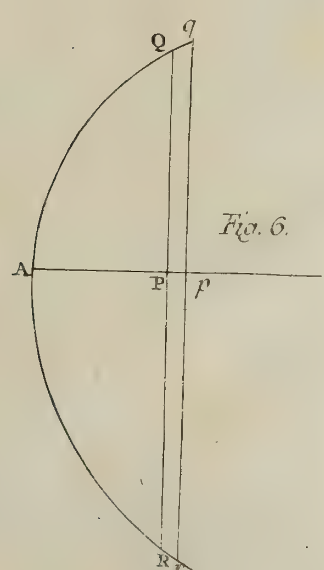


Fig. 6.

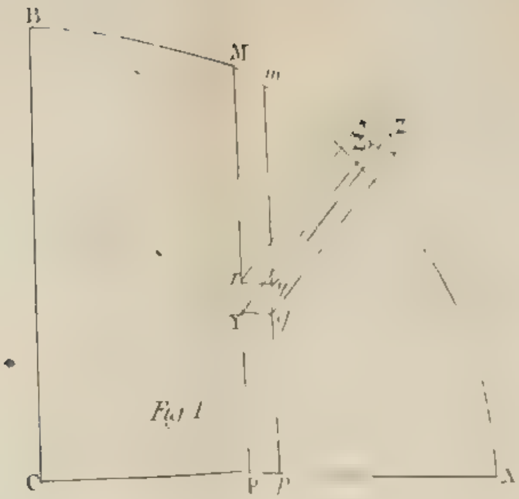


Fig. 1

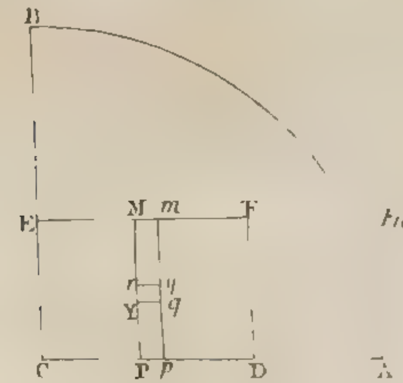


Fig. 2

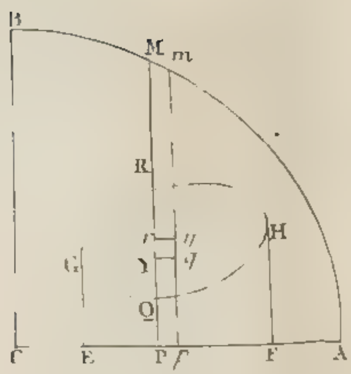


Fig. 3

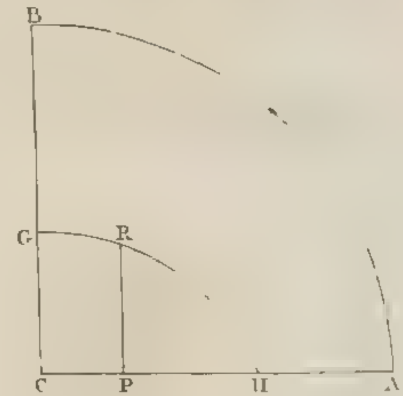


Fig. 4

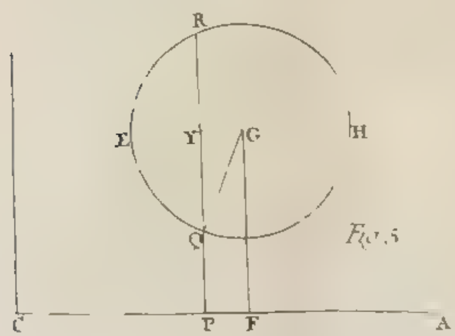


Fig. 5

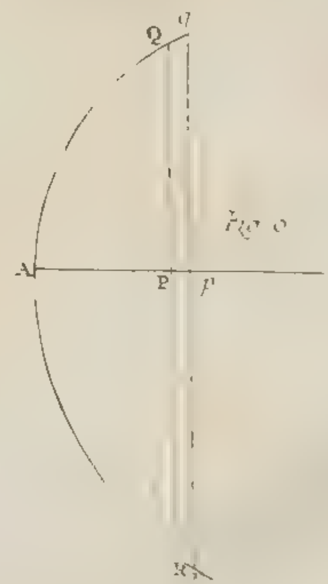
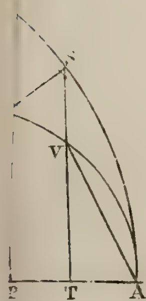


Fig. 6



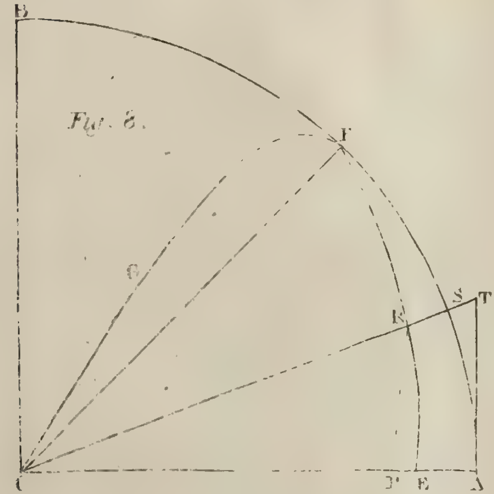


Fig. 8.

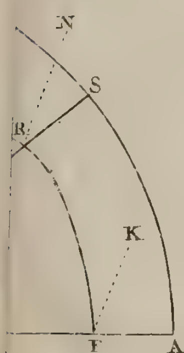
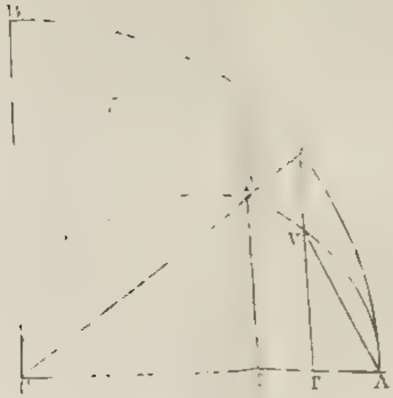
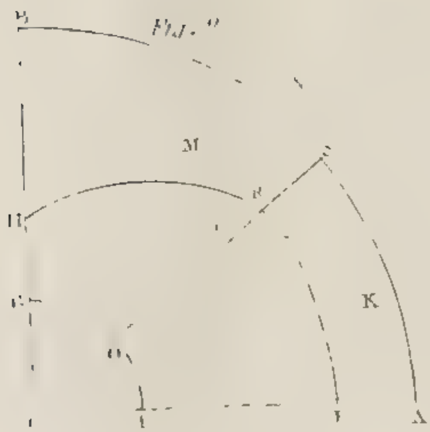




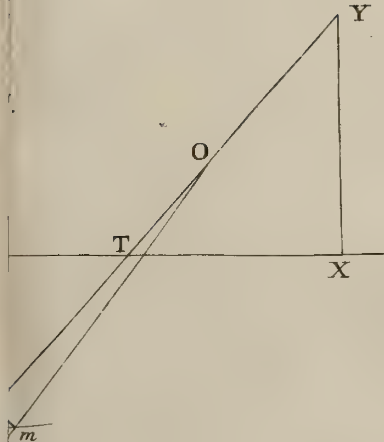
Fig. 10.


B
Γ
A


B
T


B
M
K
A





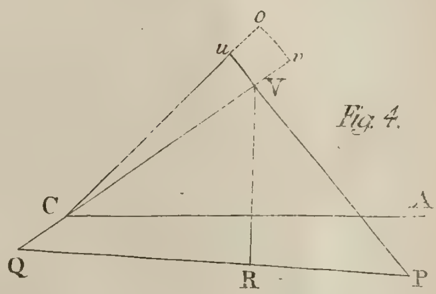
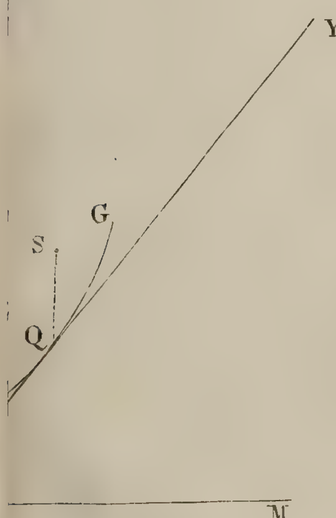


Fig. 4.



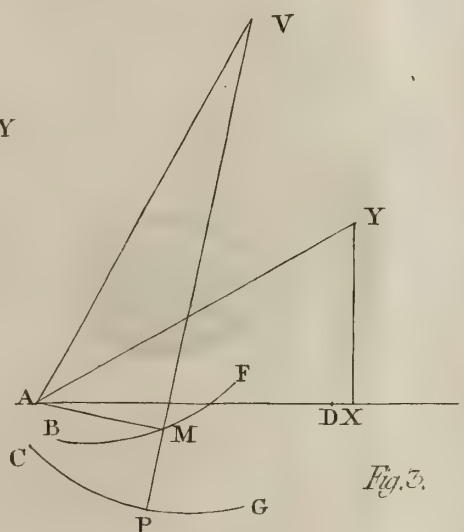
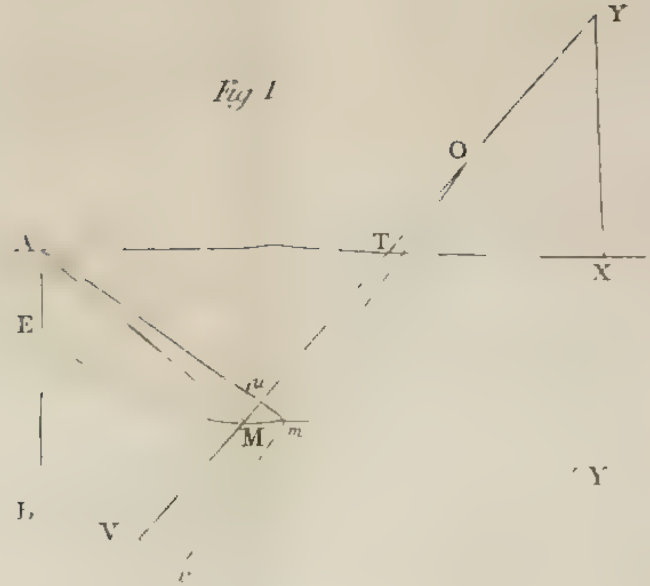
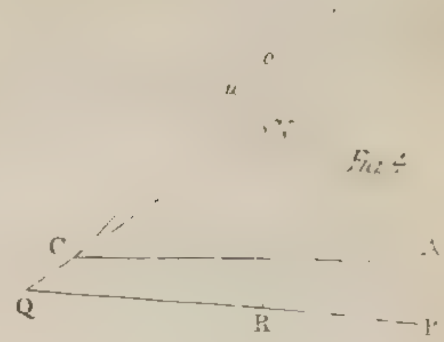


Fig. 3.

Fig 1





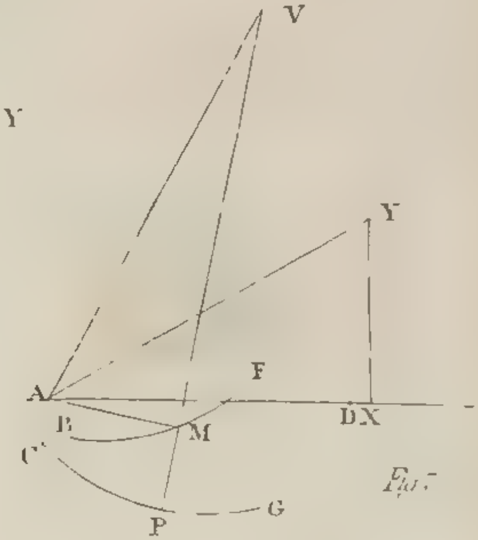
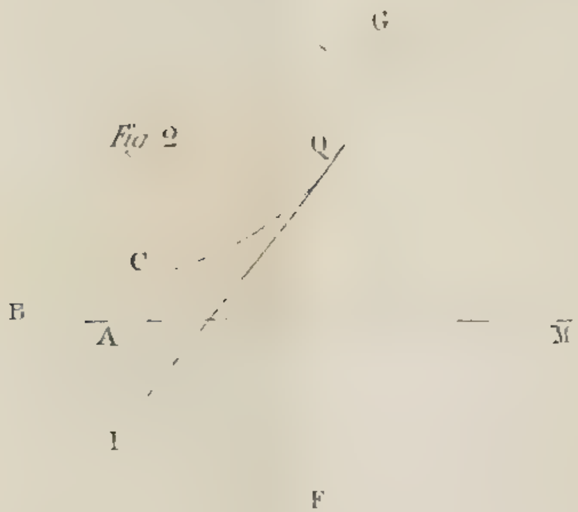
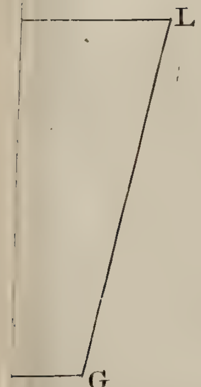


Fig 2





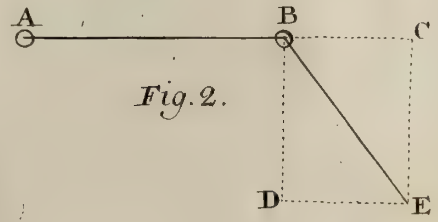


Fig. 2.

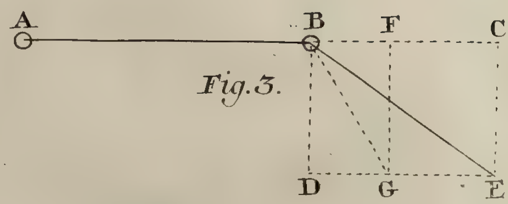


Fig. 3.

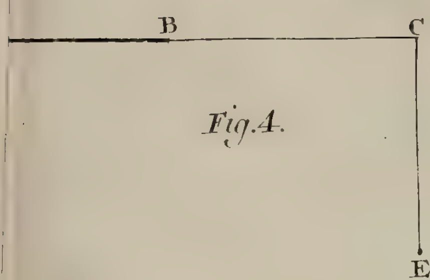
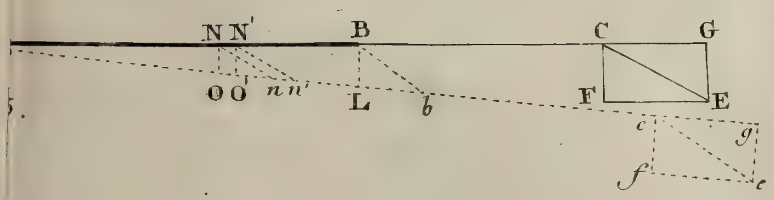


Fig. 4.



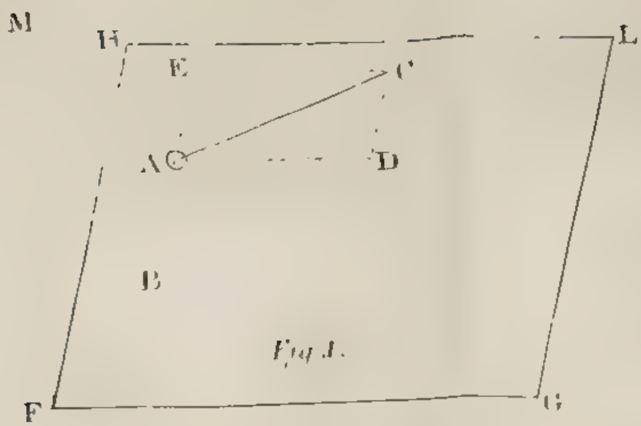


Fig. 1.

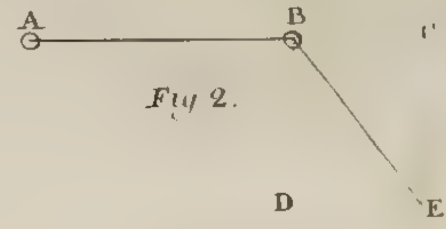


Fig. 2.

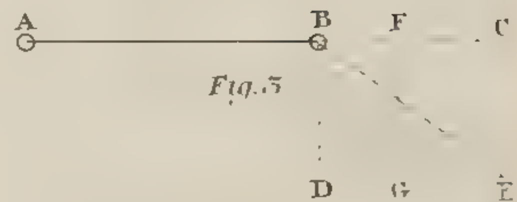


Fig. 3.

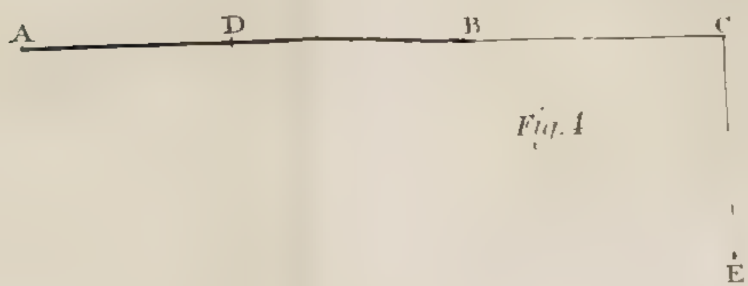


Fig. 4.

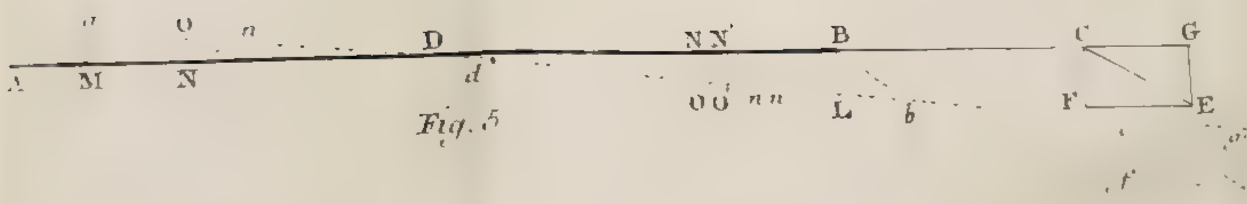
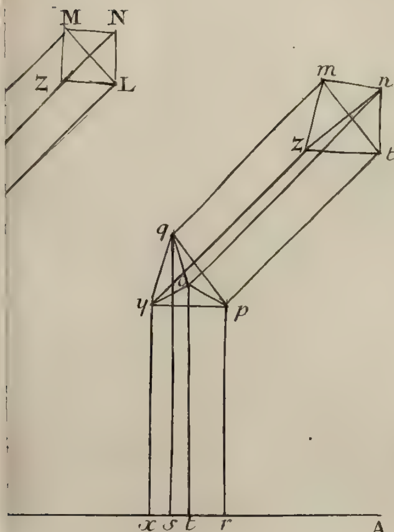


Fig. 5.



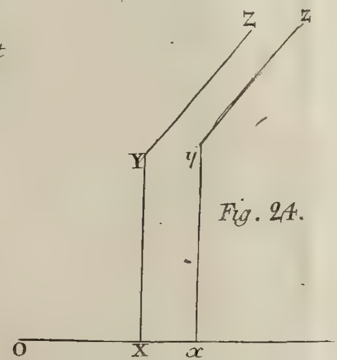


Fig. 24.

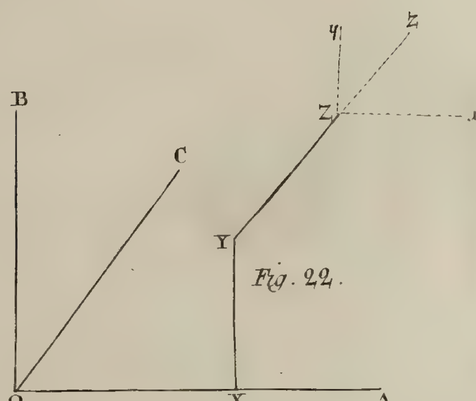


Fig. 22.

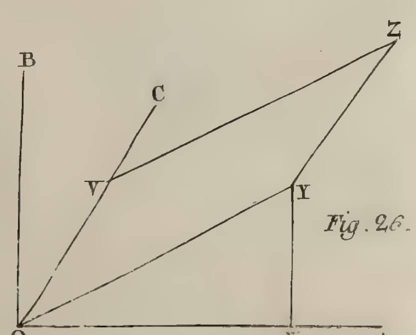


Fig. 26.

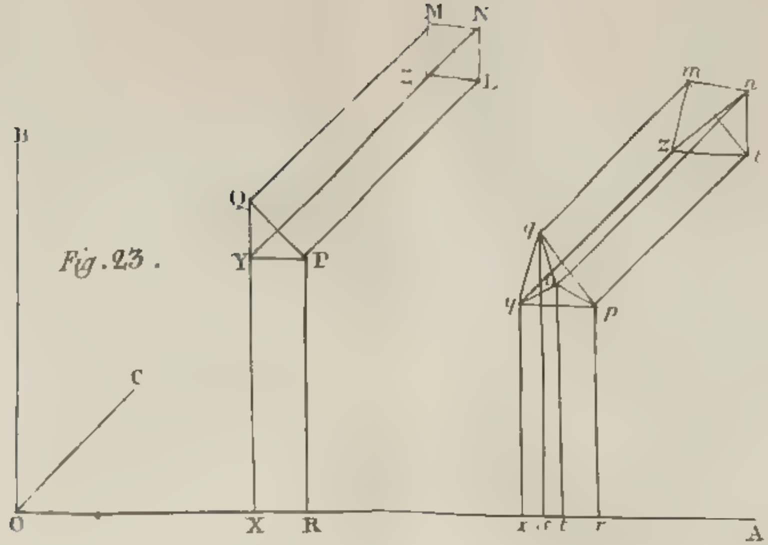


Fig. 23.

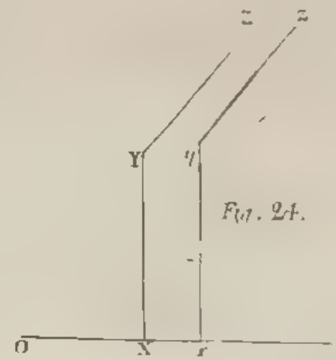


Fig. 24.

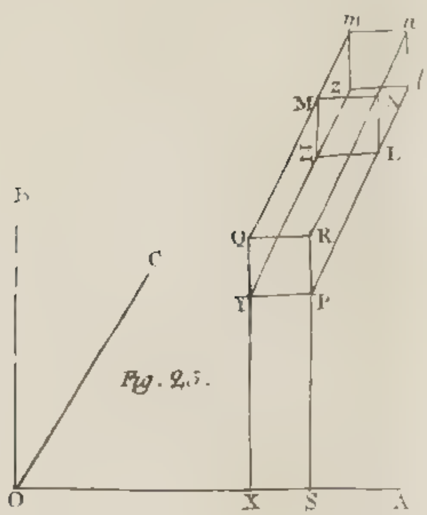


Fig. 25.

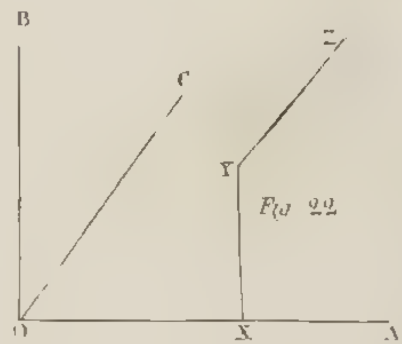


Fig. 22

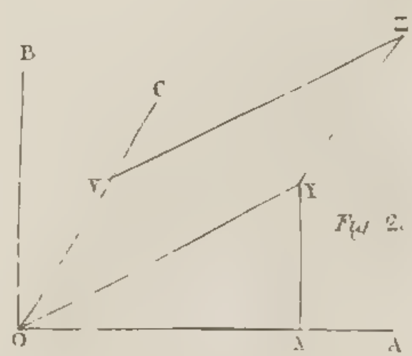
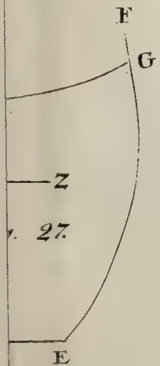


Fig. 2.



. 27.

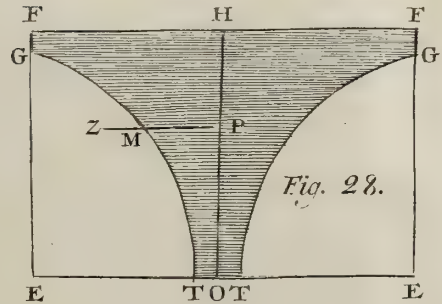
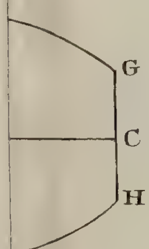


Fig. 28.



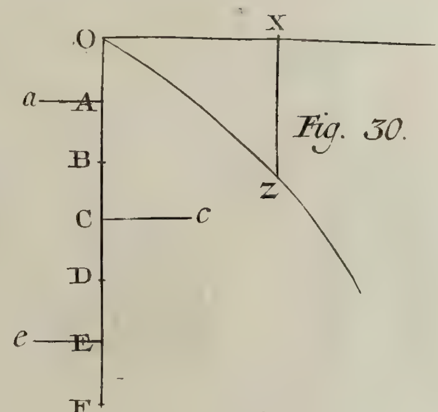


Fig. 30.

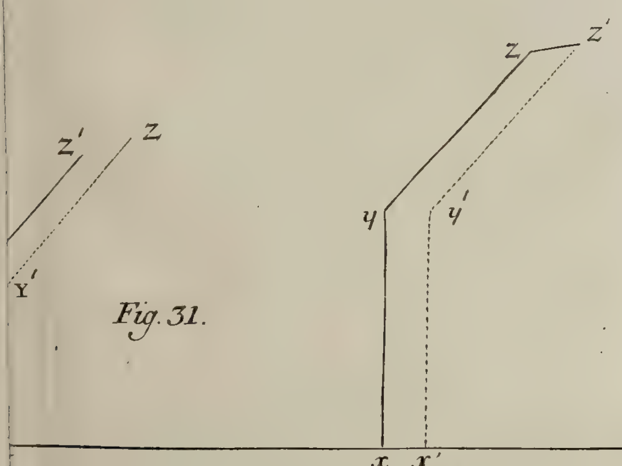


Fig. 31.

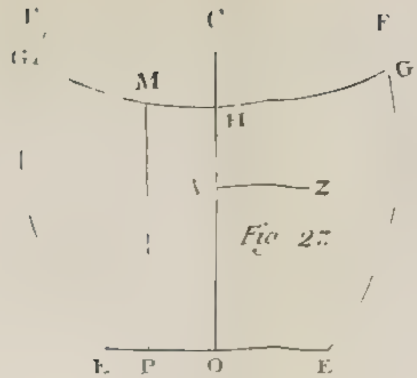


Fig. 27.

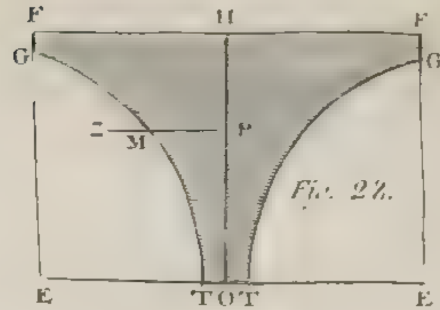


Fig. 28.

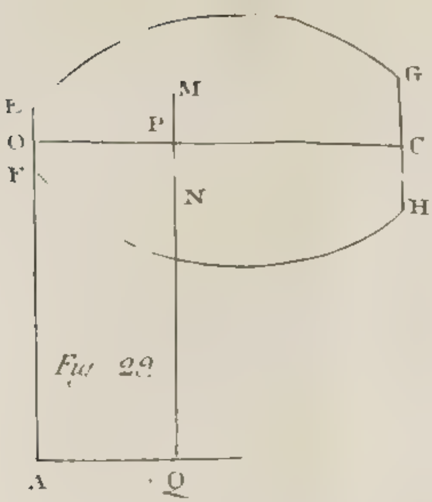


Fig. 29.

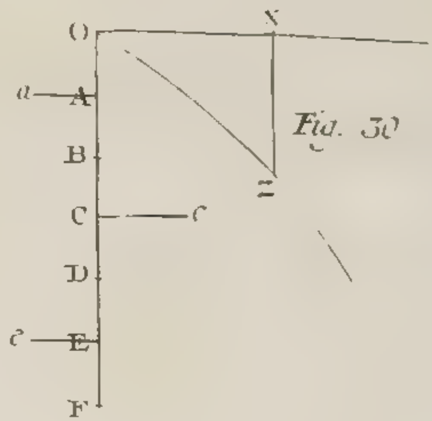


Fig. 30.

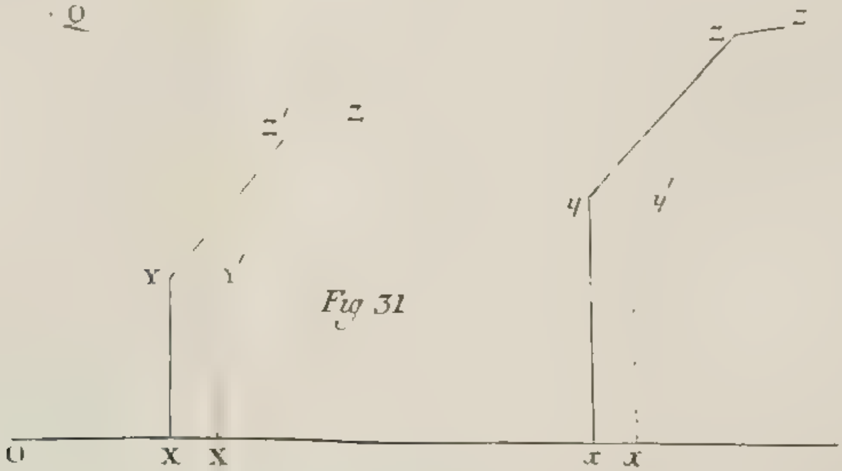


Fig. 31.







Fig. 2.

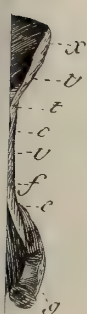


Fig. 7.

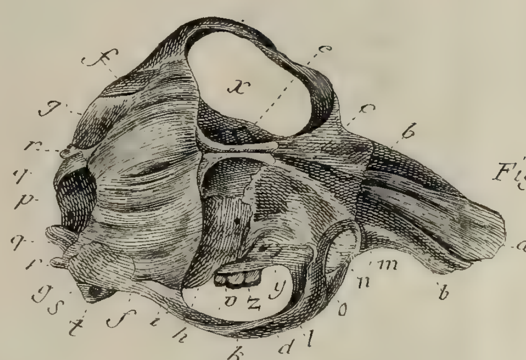


Fig. I.

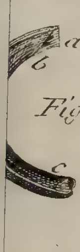


Fig. 5.


Fig. 2
Fig. 1

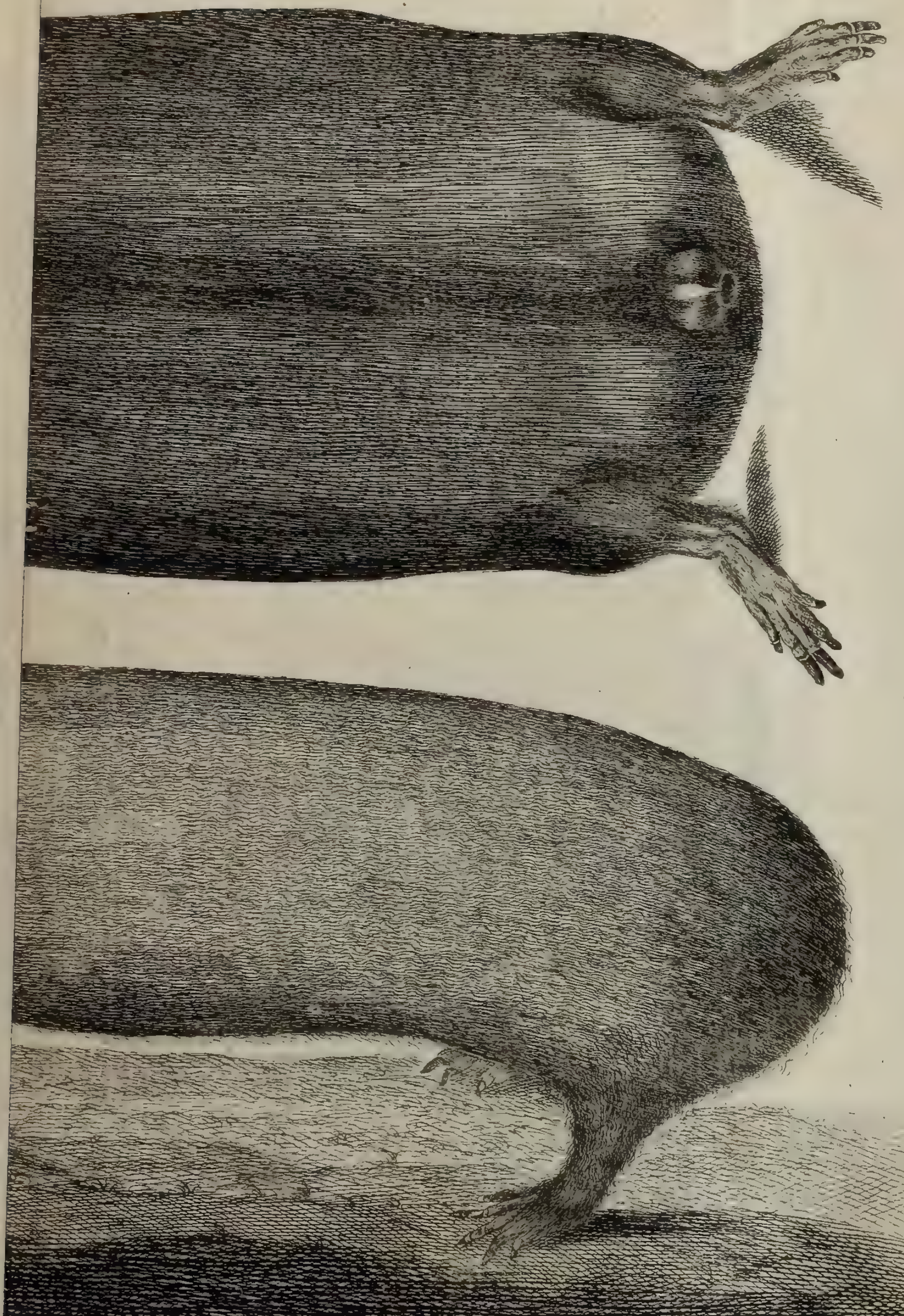


Fig.

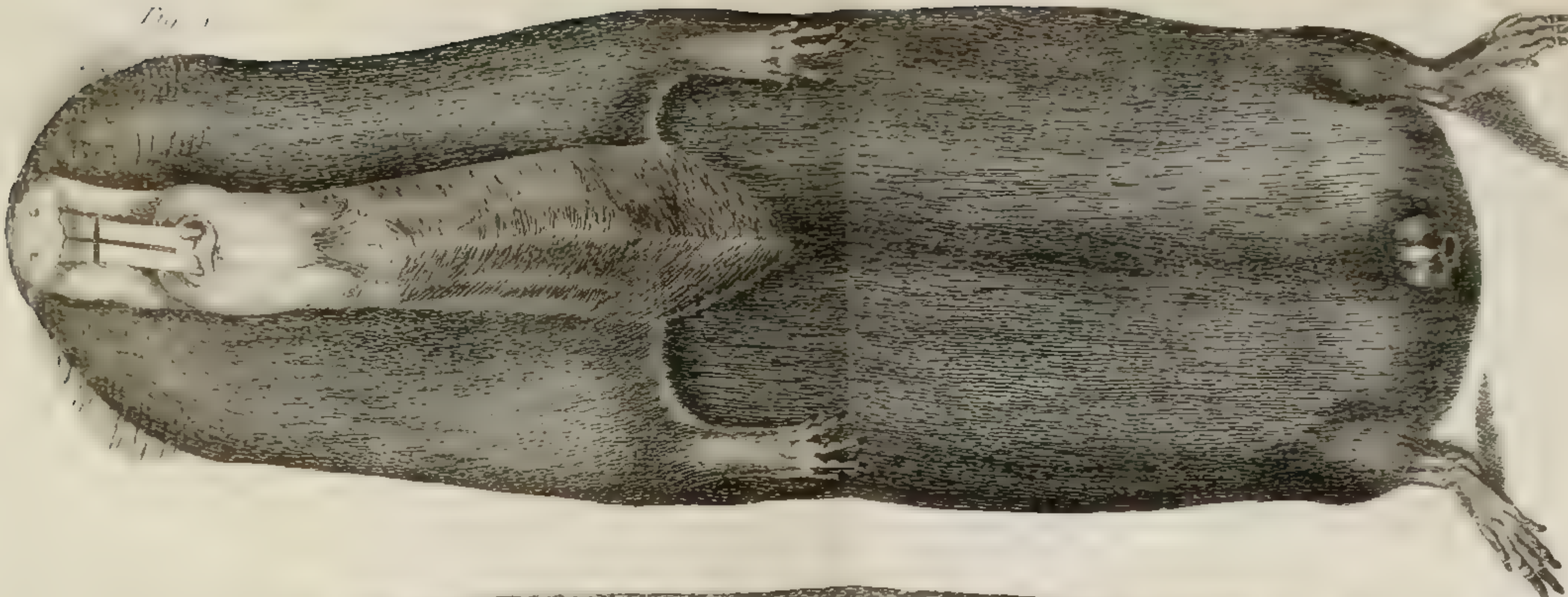
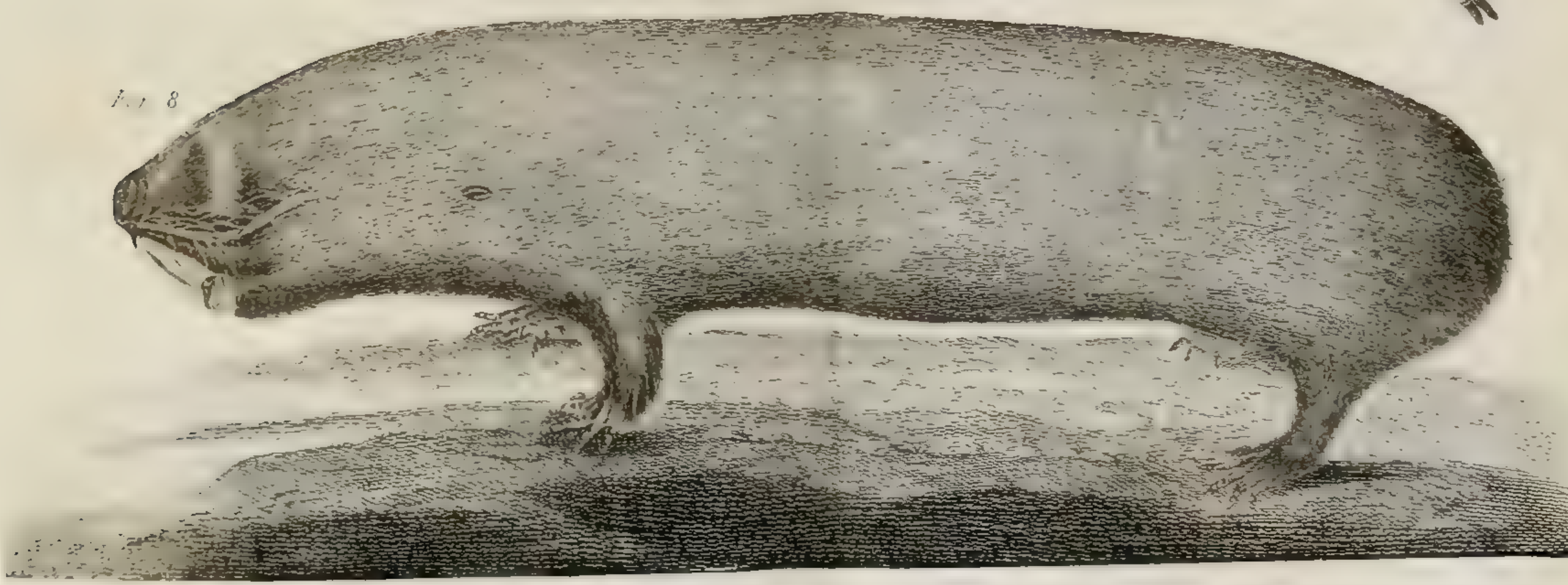


Fig. 8





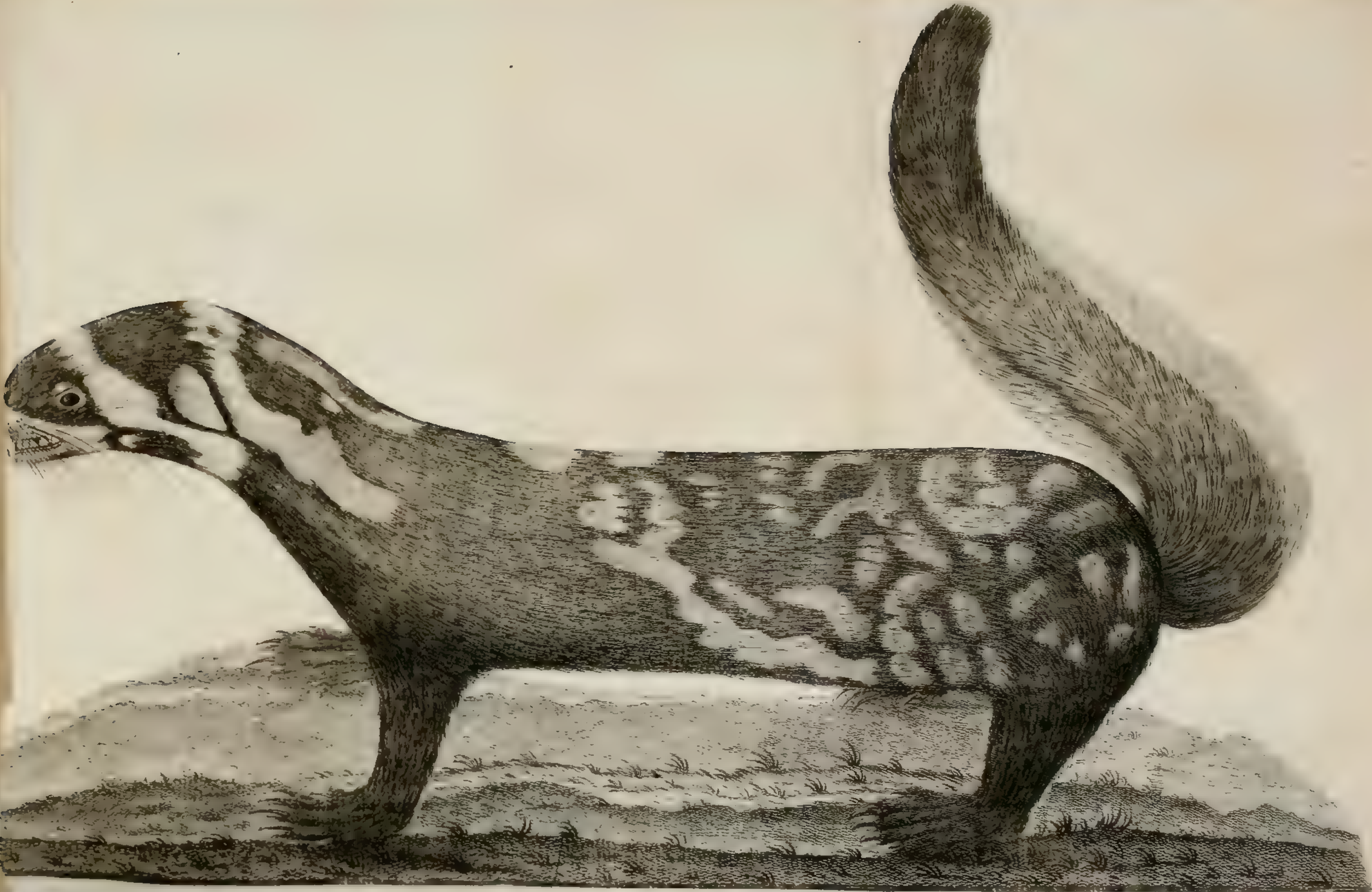
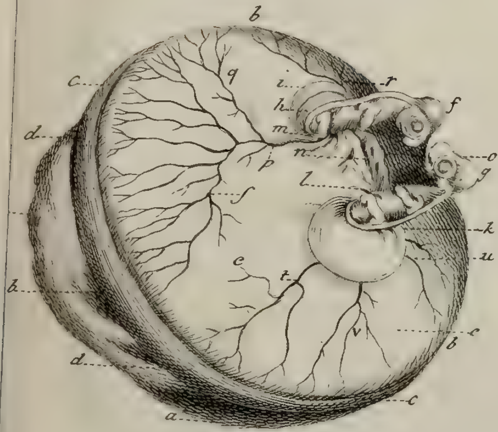


Fig. 1.



2.

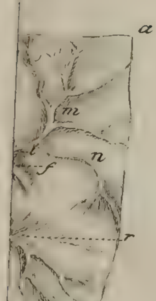


Fig. 3.



Fig. 1

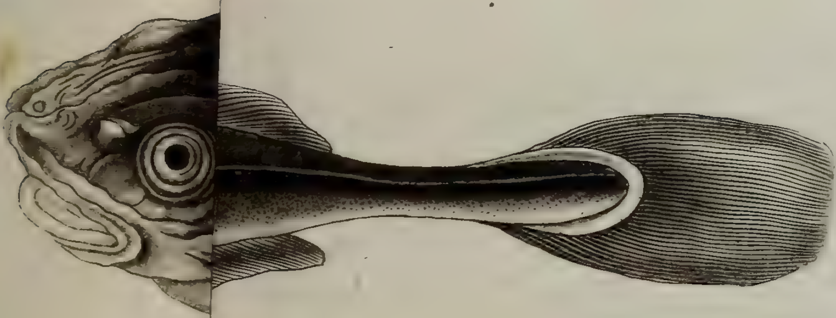


Fig. 2



Fig. 3





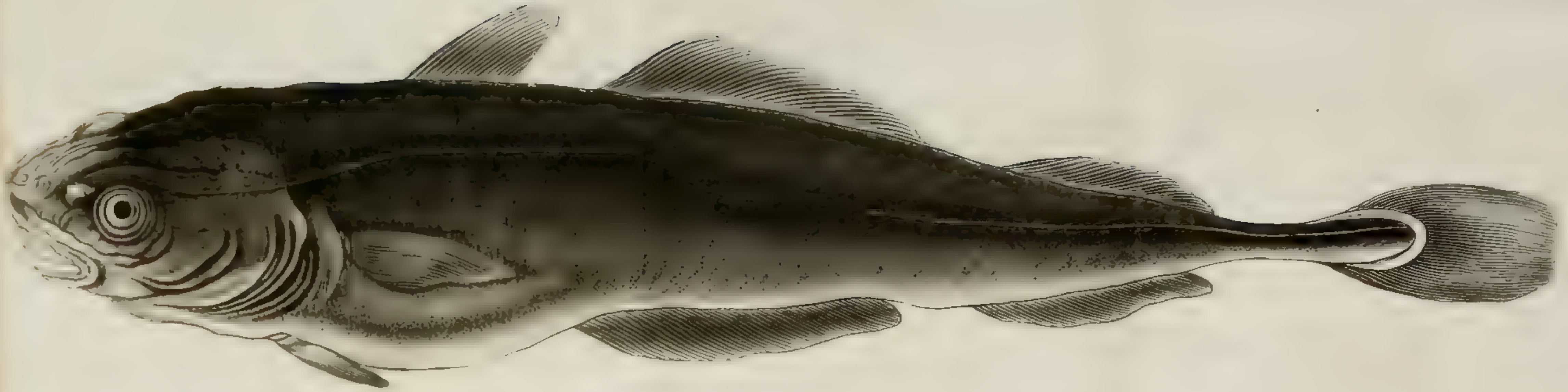


Fig. 1.



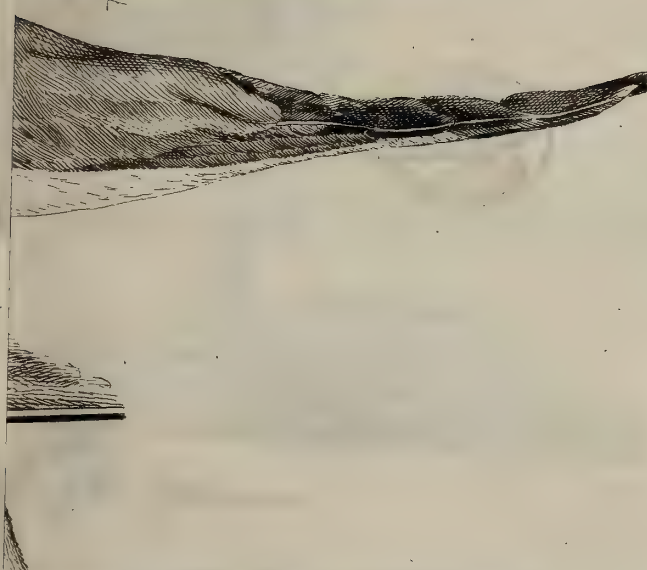



Fig 1
Fig 2.
Fig 3



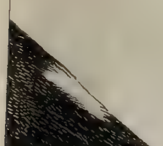




Fig. 1



Fig. 2

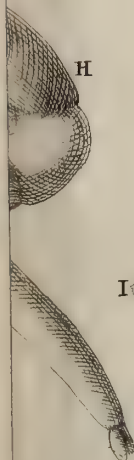


Fig. 2.

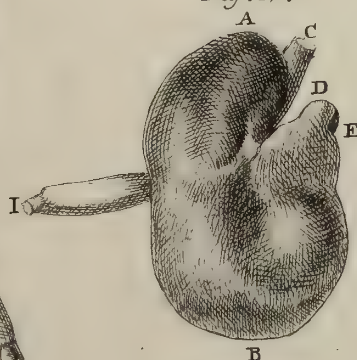
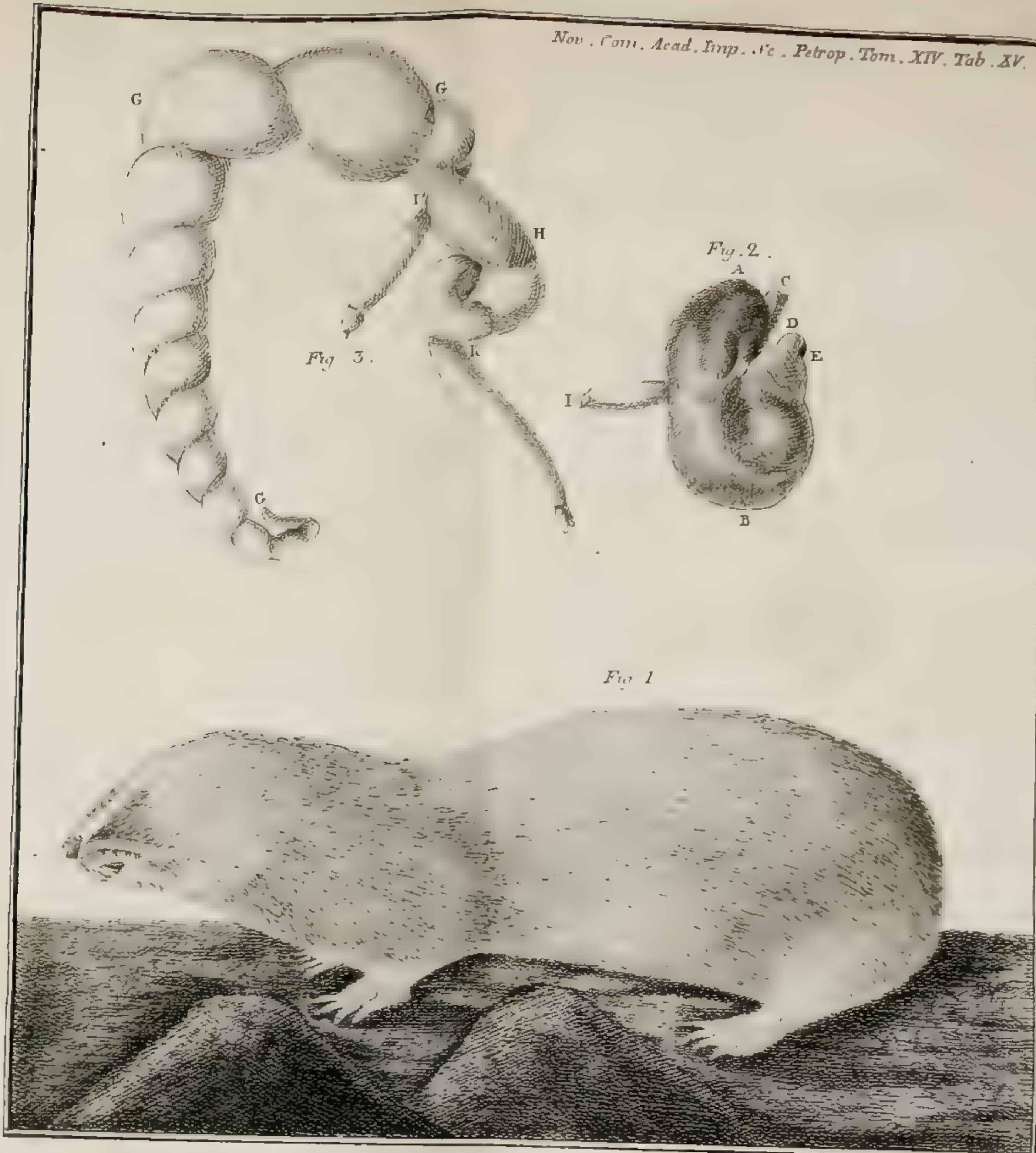


Fig. 1.



Nov. Com. Acad. Imp. Sc. Petrop. Tom. XIV. Tab. XV.



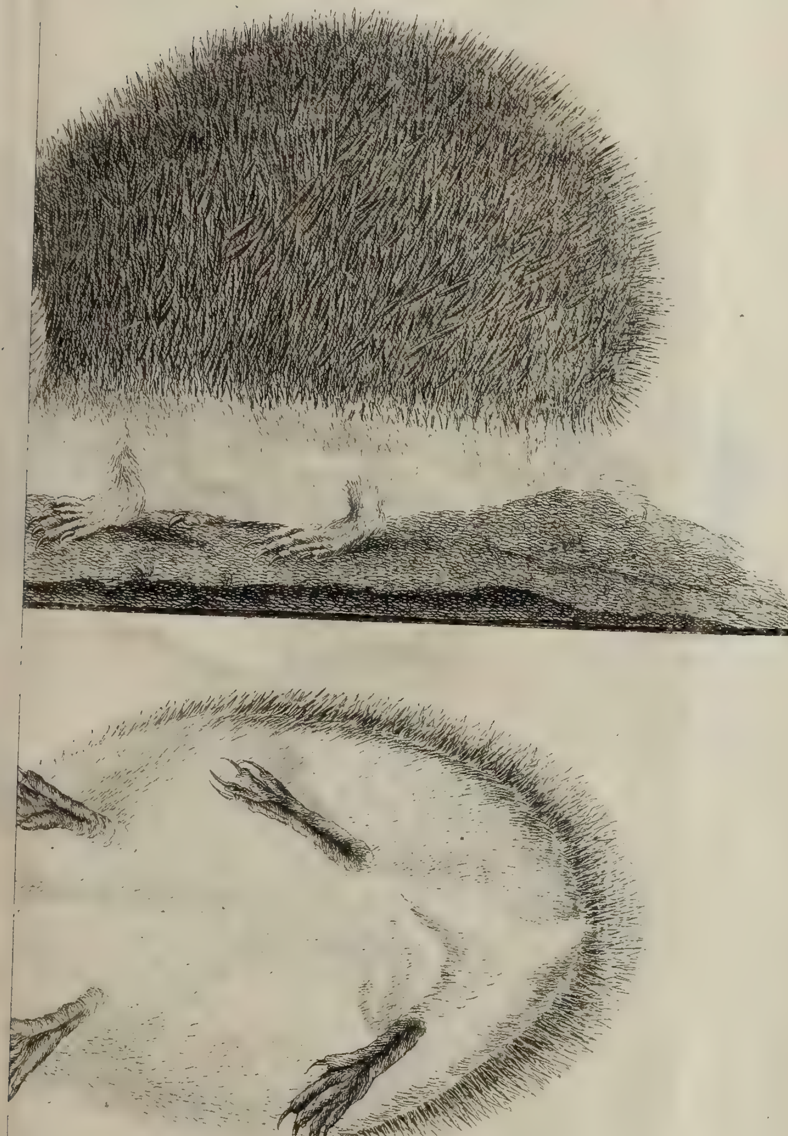






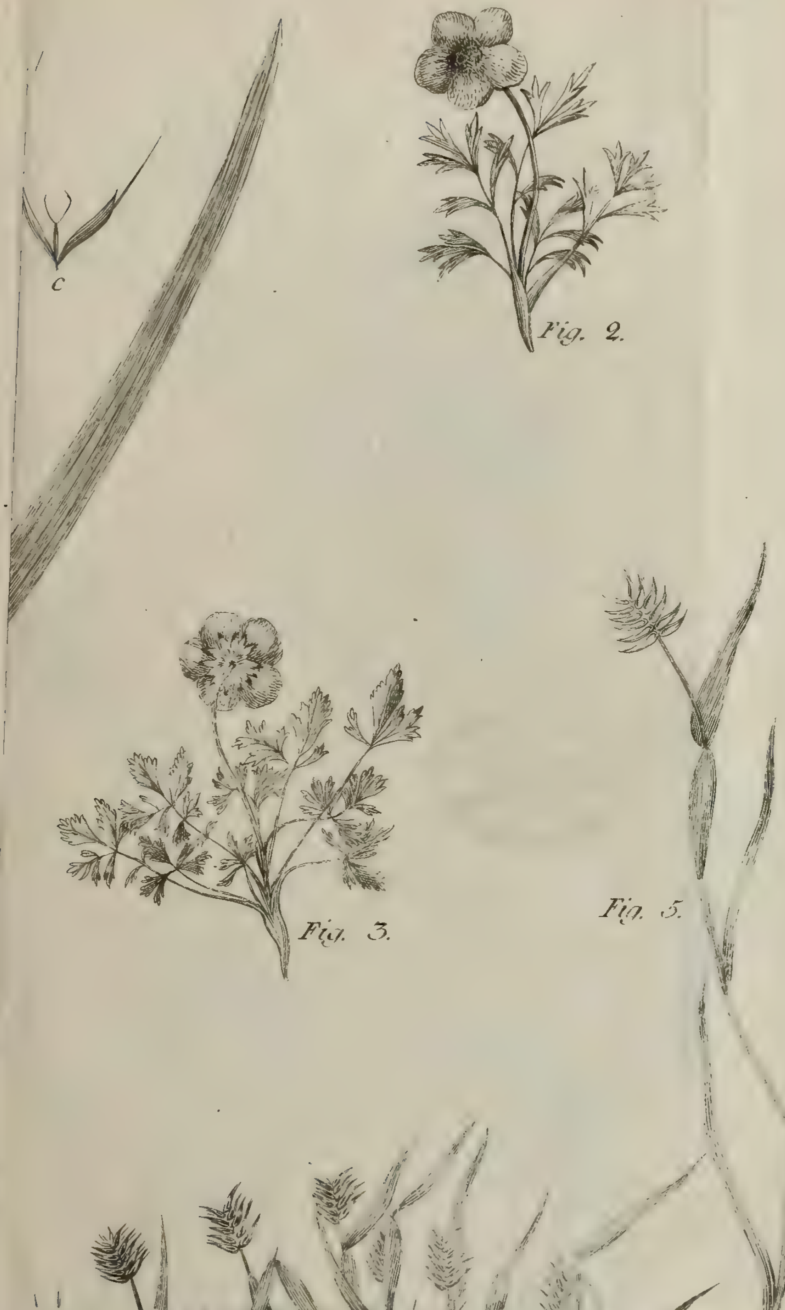
Fig. 2.


Fig. 1.
Fig. 2.



Fig. 2.


Fig 1
Fig 2
a
b
d


c
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 5.


a
b
Fig. 2
Fig. 1
Fig. 3
Fig. 4


b
b
a
a
d
c
f


b
b
a
c
d
a
e
f

Fig. 1.





Fig. 3.



Fig. 1

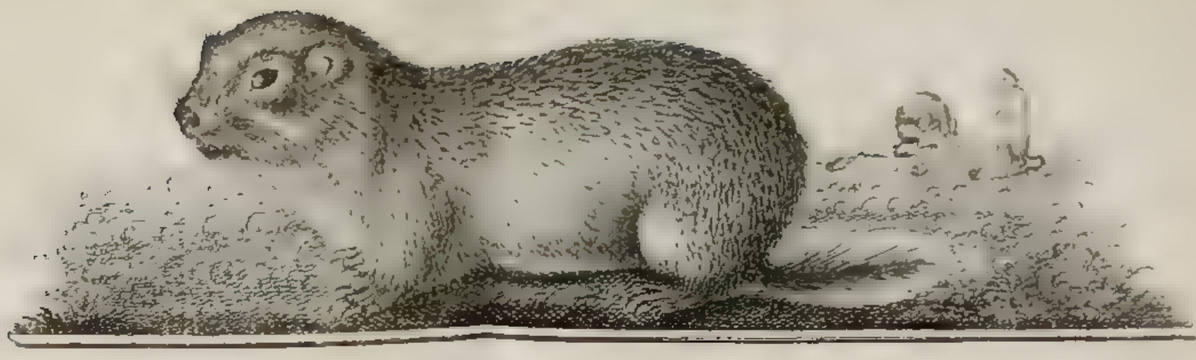
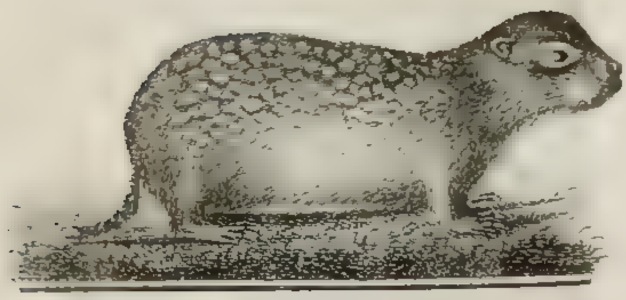


Fig. 2



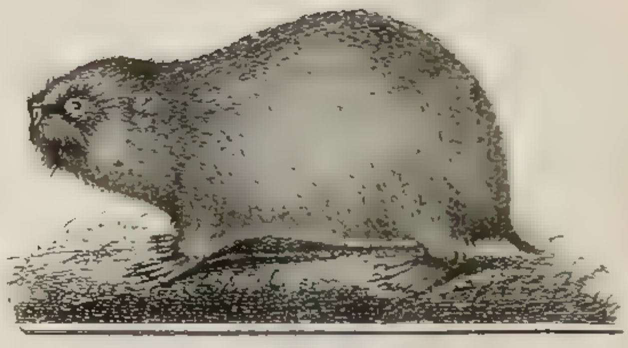


Fig. 4.



Fig. 5





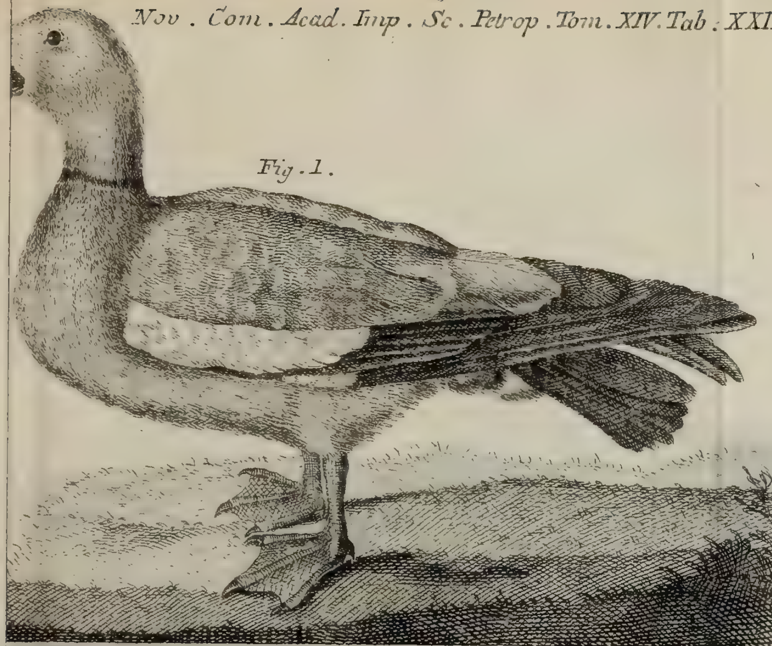
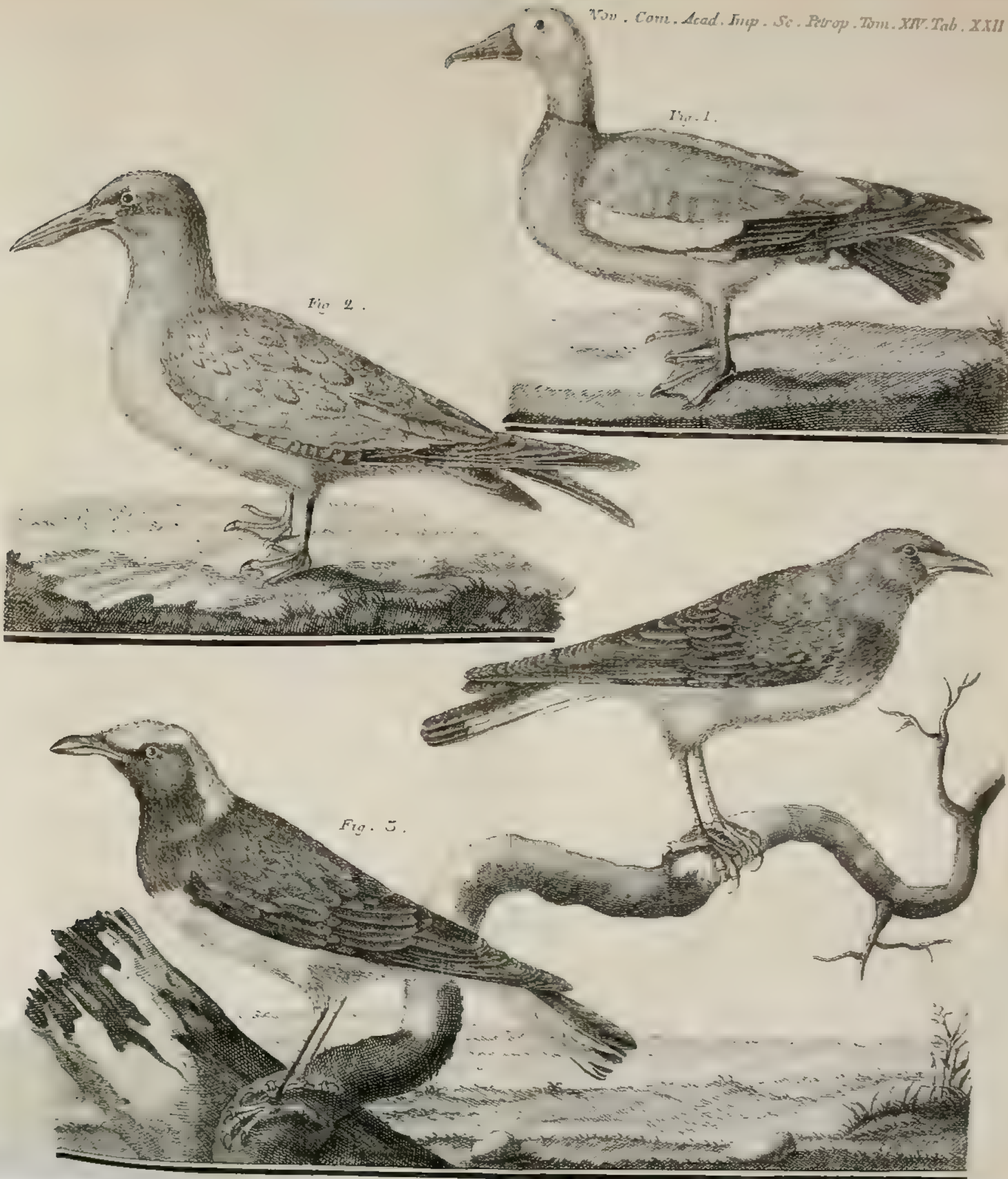


Fig. 1.



Nov. Com. Acad. Imp. Sc. Petrop. Tom. XIV. Tab. XXII.



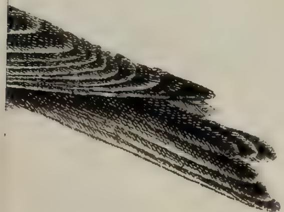


Fig. I.



Fig. 2.

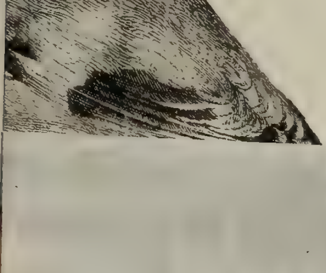




Fig. I

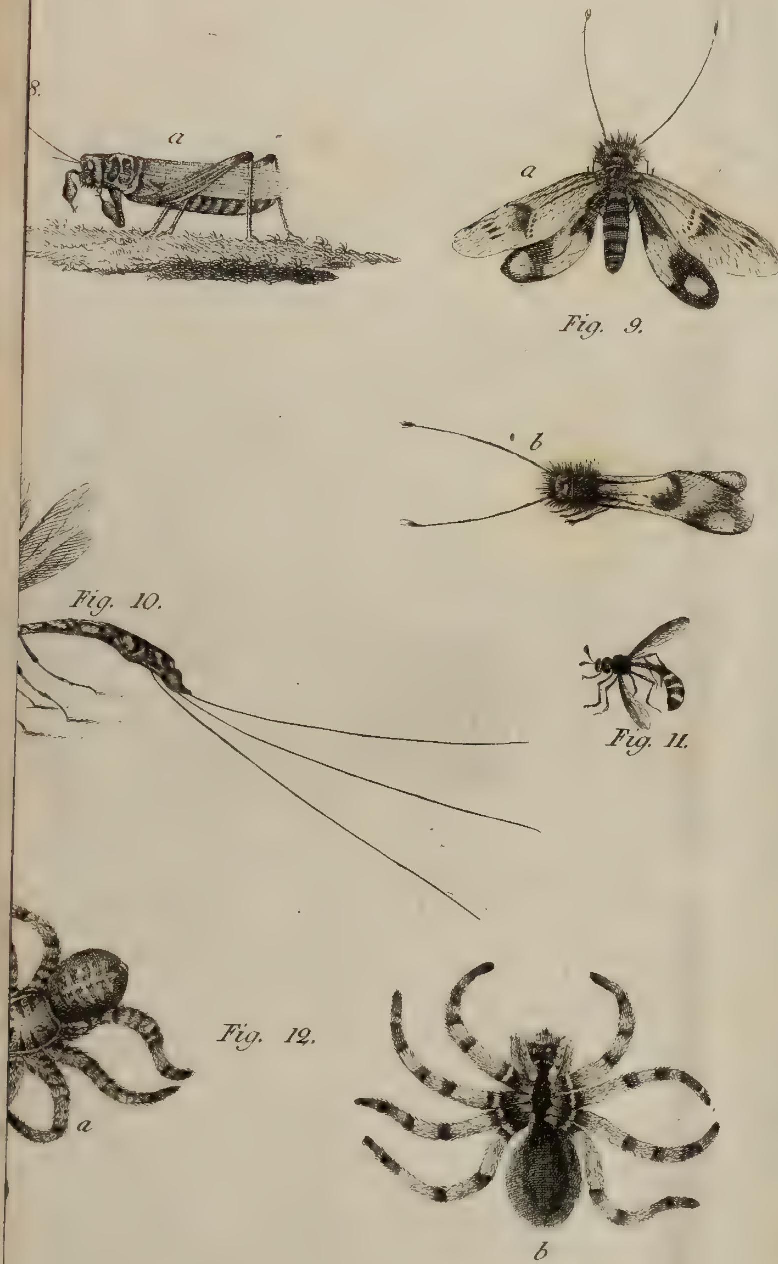


Fig. 2




a.
b.
Fig. 4.
a.
b.
Fig. 1.
d.
h.
f.
Fig. 5.
a
g.
c.
a.
a.
b.
Fig. 7.
a.




8.
a
a
Fig. 9.
b
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
a
b


a
b
a
Fig. 9
b
Fig. 10
Fig. 11
Fig. 12
a
b

BOUND [illegible]
[illegible]